

ЛЕКСИКОНЪ
ЧИСТОЙ И ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ,

СОСТАВЛЕННЫЙ

ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУКЪ ЭКСТРАОРДИНАРНЫМЪ АКАДЕМИКОМЪ И ДОКТОРОМЪ НАУКЪ
ПАРИЖСКОЙ АКАДЕМИИ

В. Я. Буняковскимъ.

ТОМЪ I

А - Д.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

Въ Типографіи Императорской Академіи Наукъ.

1839.

Съ одобренія Императорской Академіи Наукъ печатать

Напрямъ ный Секретарь П. Фусъ.

Октября 14 дня 1836 г.

П А М Я Т И

НЮТОНА, ЭЙЛЕРА И ЛАГРАНЖА

СЕЙ СЛАБЫЙ ТРУДЪ

СЪ БЛАГОГОВЪНІЕМЪ ПОСВЯЩАЕТЪ

СОУЩЕСТВЪ

ПРЕДУВѢДОМЛЕНІЕ.

Бѣдность нашей ученой литературы никогда еще не была такъ ощутительна какъ теперь, несмотря на довольно значительное число оригинальныхъ и переводныхъ сочиненій, приобретенныхъ ею въ послѣднее двадцатипятилѣтіе. Это кажущееся противорѣчіе объясняется тѣмъ, что любовь къ положительнымъ знаніямъ болѣе нежели когда нибудь начинаеть разиваться въ нашемъ отечествѣ. Очень естественно, что при такомъ стремленіи настоящаго поколѣнія къ умственному образованію, число существующихъ у насъ учебныхъ и ученыхъ нособій должно было оказаться весьма недостаточнымъ. Любознательность породила новыя требованія, и сдѣлала насъ болѣе взыскательными къ достоинству произведеній, появляющихся въ области наукъ. Можетъ быть, нные скажутъ, что эта самая взыскательность есть одна изъ причинъ скудости нашей современной ученой литературы, и это нотону, что не всякій рѣшается обнародовать свой трудъ, болѣе или менѣе несовершенный, опасаясь суда знатоковъ, правда, еще немногочисленныхъ. Но могла ли эта робость и недоувѣренность къ собственнымъ силамъ заедлить ощутительнымъ образомъ нашу литературную дѣятельность? Будемъ откровенны и сознаемся, что главная причина нашей бѣдности по всемъ отраслямъ положительныхъ знаній есть незрѣлость умовъ, неразлучная съ состояніемъ народа, уже ознаменовавшаго себя воинскими и гражданскими доблестями, но недавно вступившаго на ноприще умственнаго образованія. Это сознаніе не должно онечаливать насъ: развитіе ума человеческого подлежитъ тому же закону строгой постепенности, какъ и явленія въ вещественномъ мірѣ. Если примемъ въ соображеніе короткий промежутокъ времени, отдѣляющій насъ отъ поры невѣжества Русскаго народа, то утвердительно скажемъ, что возможное въ великомъ дѣлѣ просвѣщенія исполнено у насъ. И ежели бы чужеземецъ, считающій столѣтіями давность образованности своего

отечества, упрекнулъ насъ въ застоѣ умственнаго развитія, то мы раскрыли бы передъ нимъ наши лѣтописи на тѣхъ эпохахъ, когда Англія озарялась гениемъ Бекона, Локка, Ньютона, когда Франція гордилась Декартономъ, Паскалемъ, Ферматомъ, Германія — Кеплеромъ, Лейбницемъ, Италія — Галилеемъ: онъ увидѣлъ бы, что въ тѣ времена едва заводились у насъ типографіи для печатанія церковныхъ книгъ. Безпристрастное сравненіе Россіи XVIII вѣка съ Россіею XIX столѣтія, вполне убѣдитъ его въ той истинѣ, что можетъ быть въ одинъ народъ, въ такое короткое время, не сдѣлалъ столь быстрыхъ успѣховъ въ просвѣщеніи, какъ народъ Русскій.

Сказанное о бѣдности Русской ученой литературы вообще, можетъ быть отнесено преимущественно къ литературѣ математической, состояніе которой составляетъ разительную противоположность съ особеннымъ влеченіемъ нашего юношества къ изученію точныхъ наукъ. Не находя на Русскомъ языкѣ удовлетворительныхъ пособій, любители Математики по необходимости должны прибѣгать къ иностраннымъ сочиненіямъ; но, уразумѣніе книгъ, написанныхъ не на родномъ языкѣ, сопряжено для большей части читателей съ непреодолимыми затрудненіями, съ одной стороны потому что въ обыкновенныхъ Лексиконахъ математическіе термины переданы съ большою неточностію, а съ другой, по причинѣ недостаточности Русской математической номенклатуры.

Можно сказать съ достовѣрностію, что при такихъ обстоятельствахъ, первая потребность для распространенія и усилія математическихъ наукъ въ нашемъ отечествѣ, есть изданіе полнаго курса Математики и Математическаго Лексикона. Составленіе хорошаго и вѣстѣ полнаго курса чрезвычайно трудно: легко убѣдиться въ этомъ, принявъ въ соображеніе, что ни на одномъ языкѣ не существуетъ еще такого руководства, которое не заключало бы въ себѣ важныхъ недостатковъ, или, по крайней мѣрѣ, пропусковъ. Въ ожиданіи полнаго курса Математики на отечественномъ языкѣ я предпринялъ удовлетворить второму требованію изданіемъ Лексикона. Повторю необходимость такой книги становится у насъ со дня на день болѣе и болѣе ощутительно *). Спеціальный Лексиконъ, составленный съ добросовѣстностію и съ знаніемъ дѣла, можетъ замѣнить въ нѣкоторомъ отношеніи цѣлую бібліотеку по излага

*). Чтобы не обвиняли меня въ умысленномъ или неумысленномъ пропускѣ, я вынужденъ упомянуть объ одномъ опытѣ въ этомъ родѣ: я разую Военный и Математическій Словарь Вельшева-Вольницова, напечатанный въ 1808 году. Но, стоить только раскрыть это руководство, чтобы удостовѣриться въ совершенномъ его ничтожествѣ въ отношеніи математическихъ наукъ. Объ этой книгѣ можно смѣло сказать, что если она не причинила вреда своимъ превратнымъ понятіямъ о предметахъ а также своимъ искаженнымъ языкомъ, то нѣвѣрное не могла принести и никакой пользы. Сколько нѣтъ извѣстно, другихъ опытовъ на Русскомъ языкѣ не было.

мой въ немъ наукѣ, конечно не для ученыхъ, но для людей, занимающихся предметомъ съ цѣлю изучить его основательно.

Съ такими мыслями о потребностяхъ нашей математической литературы, я приступилъ къ осуществленію предпріятія, которое давно сдѣлалось любимую моею мечтою. Еще на скамьяхъ аудиторій, слушая лекціи знаменитыхъ Европейскихъ геометровъ, я замышлялъ уже Математическій Лексиконъ. По штръ того, какъ кругъ наукъ расширился передо мной, я болѣе и болѣе убѣждался въ трудности предпріятія; и теперь, отложивъ бы непремѣнно на нѣсколько лѣтъ изданіе моего Лексикона, если бы не былъ увѣренъ, что не смотря на всѣ его недостатки, онъ можетъ принести пользу многимъ соотечественникамъ. Увлекаясь съ одной стороны этимъ убѣжденіемъ, а съ другой ободряемый нѣкоторыми любителями Математики, которые конечно судили слѣшкомъ снисходительно о достоинствѣ моего труда, я рѣшился приступить къ его напечатанію, и представляю нынѣ на судъ ученыхъ первый томъ Лексикона.

Считаю необходимыми войти въ нѣкоторыя подробности относительно цѣли, образа исполненія и средствъ, которыми я располагалъ при составленіи моего Математическаго Лексикона.

Главная цѣль изданія состояла въ томъ, чтобы доставить многимъ соотечественникамъ, занимающимся Математикою, и уже нѣсколько знакомымъ съ мною, такую книгу, въ которой они могли бы почерпнуть достаточныя свѣдѣнія о всѣхъ важнѣйшихъ теоріяхъ, какъ старыхъ такъ и новѣйшихъ. Для этого я объяснилъ въ моемъ Лексиконѣ всѣ термины *Чистаго Анализа*, *Аналитической* и *Начертательной Геометріи*, *Механики*, *Исчисленія Вѣроятностей*, значительное число словъ изъ *Астрономіи*, *Геодезіи*, *Прикладной Механики*, *Оптики*, *Гномоники*, *Опытной* и *Математической Физики* и изъ другихъ наукъ, болѣе или менѣе сопряженныхъ съ Математикою.

Второю цѣлю изданія было обогащеніе Русской математической терминологіи, весьма неполной во многихъ отношеніяхъ. Я старался достигнуть этой цѣли во первыхъ, введеніемъ новыхъ словъ въ тѣхъ случаяхъ, — и число ихъ довольно значительно, — когда, для выраженія извѣстныхъ понятій, мы не имѣемъ никакихъ терминовъ, а во вторыхъ, умѣстнымъ употребленіемъ математическихъ реченій, получившихъ уже право гражданства въ нашъ языкъ. Когда, при переводѣ какого либо Французскаго термина, выставлено въ моемъ Лексиконѣ нѣсколько Русскихъ словъ, то вообще первое слово, по моему мнѣнію, должно быть предпочтено другимъ по какимъ либо причинамъ, напримѣръ, по своей опредѣлительности, или потому что оно болѣе свойственно духу Русскаго языка, и т. п. Впрочемъ, иногда слова бываютъ равносильны;

тогда фразеологін покажетъ, въ какихъ случаяхъ должно употреблять одно, преимущественно предъ другимъ.

Наконецъ, третья цель состояла въ томъ, чтобы доставить любителямъ точныхъ наукъ, мало знакомымъ съ Французскимъ языкомъ, возможность читать и понимать Французскія математическія книги. Польза отъ этого очевидна: утвердительно можно сказать, что ни одинъ народъ не имѣетъ такой богатой математической литературы, какъ Французскій. Для достиженія этой цели я расположилъ Лексиконъ по Французскому алфавиту, и перевелъ всѣ термины на Русскій языкъ съ надлежащими объясненіями, и съ присовокупленіемъ фразеологін, по возможности подробнѣйшей. Надѣюсь, что въ этомъ отношеніи онъ удовлетворитъ даже взыскательныхъ читателей. Въ немъ найдутъ они самый полный сводъ Французскихъ математическихъ словъ. Что касается до фразеологін, то меня скорѣе могутъ упрекнуть въ излишней полнотѣ, чѣмъ въ противномъ недостаткѣ. Наконецъ, для удобства читателей, во-все незнающихъ Французскаго языка, будетъ помещенъ въ концѣ Лексикона полный алфавитный списокъ Русскихъ математическихъ словъ съ ихъ переводомъ на Французскій языкъ. При такомъ пособіи, вписываніе статей не будетъ представлять ни малѣйшаго затрудненія.

Когда какая либо теорія, по значительному объѣму своему, не могла войти въ Лексиконъ со всѣми подробностями, то я дѣлалъ ссылки на книги или на отдѣльныя записки, въ которыхъ можно почерпнуть полныя свѣдѣнія о томъ предметѣ. То же самое наблюдалъ я вообще и въ разсужденіи различныхъ отраслей Чистой и Прикладной Математики. Такъ, напримѣръ, въ статьяхъ: *Алгебра*, *Астрономія*, *Исчисленіе Конечныхъ Разностей* и проч. читатели найдутъ указанія на лучшіе трактаты объ этихъ наукахъ. Впрочемъ, при изложеніи статей большаго объѣма, я старался по возможности обозначать порядокъ предложеній и ходъ доказательствъ такъ, чтобы читатель, нѣсколько свѣдущій въ Математикѣ, могъ безъ труда пополнить самъ пропущенное за недостаткомъ мѣста. Подобный способъ изложенія имѣетъ безъ сомнѣнія весьма полезную сторону, ибо заставляетъ читателя прибѣгать иногда къ собственнымъ своимъ силамъ, а это самое ведетъ его къ болѣе основательному изученію предмета.

Въ составъ Лексикона вошла также Исторія различныхъ отраслей математическихъ наукъ. Равнымъ образомъ читатели найдутъ въ немъ историческія и хронологическія показанія о разныхъ теоріяхъ и задачахъ, относящихся къ чистому и прикладному анализу. Эти двѣ статьи, весьма важныя по своему мнѣнію, служатъ необхо-

димымъ дополненіемъ къ курсамъ Математики, въ которыхъ, по большей части, во-все опущены какъ историческія, такъ и хронологическія свѣдѣнія.

Я уже сказалъ, что число новыхъ Русскихъ словъ, входящихъ въ мой Лексиконъ, довольно значительно. Они не оти́мчивы въ текстъ особеннымъ знакомъ; читатели, свѣдущіе въ Русской математической литературѣ, легко замѣтятъ ихъ. Опытность и время покажутъ, какія изъ предлагаемыхъ мною нововведеній могутъ быть приняты, и которыя изъ нихъ должны быть откинуты. Впрочемъ, я тогда только отступалъ отъ поименнаго языка Русскихъ писателей о Математикѣ, когда, по разумному моему, измѣненія были необходимы.

Для удобнѣйшаго приисканія статей, объясняющихъ чертежи, выставлены на сихъ послѣднихъ относящихся къ нимъ страницы текста.

Что касается до средствъ, которыми я располагалъ при составленіи моего Лексикона, то въ этомъ отношеніи я не могъ терять никакого недостатка. Съ одной стороны замѣчанія ученыхъ моихъ сослуживцевъ по Академіи, преимущественно же совѣты Г. Остроградскаго, а съ другой, богатство Библиотеки Императорской Академіи Наукъ, поставили меня въ возможность дать моему труду такую полноту, которой трудно было бы достигнуть, даже нѣсколькимъ дѣлателямъ, при обстоятельстве, менѣе благоприятномъ. Выставляю себѣ въ пріятный долгъ изъяснить предъ всѣмъ искреннюю благодарность тѣмъ Гг. Академическимъ, совѣтѣмъ которыхъ я пользовался при составленіи моего Лексикона.

Всякое сочиненіе, какъ дѣло человеческое, имѣетъ свои недостатки. Я очень знаю, что мой трудъ, болѣе нежели многіе другіе, долженъ, по сущности своей, подать поводъ къ справедливымъ критическимъ замѣчаніямъ. Разнообразіе предметовъ, которые для полноты должны входить въ составъ Лексикона Чистой и Прикладной Математики, трудность соразмѣрить объѣмъ статей съ относительною ихъ важною и не упустить изъ виду единства въ изложеніи, рѣшительная невозможность избѣжать въ некоторыхъ случаяхъ повтореній, необработанность нашего математическаго языка, — всё это заставляетъ меня думать, что несмотря на всѣ мои старанія, книга моя далѣко еще не удовлетворитъ условіямъ хорошаго лексикографическаго руководства. Можетъ быть, отечественные математики найдутъ также, что нѣкоторые термины и реченія переданы не совсѣмъ удачно въ моемъ Лексиконѣ; заранее прошу ихъ быть свисокательными къ такимъ недостаткамъ. До сихъ поръ у насъ не было никакого авторитета для Русскаго математическаго языка; и такъ, можетъ ли первый опытъ установить терминологию науки, въ такой степени обширной и многосторонней, какъ Математика?

Сознаваясь съ откровенностію въ слабыхъ сторонахъ моего труда, я позволяю себѣ вѣстѣ съ тѣмъ обратитъ вниманіе читателей на полноту моего Лексикона въ разсужденіи числа математическихъ терминовъ по предмету Чистаго Анализа, Геометріи, Умозрительной Механики и Ичисленія Вѣроятностей. Смѣло скажу, что въ этомъ отношеніи, Лексиконъ мой имѣетъ преимущество предъ всеми доселѣ изданными на иностранныхъ языкахъ математическими словарями, и вотъ на чемъ я основываю это утвержденіе. При составленіи алфавитнаго списка математическихъ терминовъ, я имѣлъ въ виду почти всѣ Математическіе Лексиконы и списки словъ на Французскомъ и на Нѣмецкомъ языкахъ *). Сверхъ того, непрерывныя справки съ Записками главныхъ Академій и Ученыхъ Обществъ, а также чтеніе отдѣльныхъ сочиненій, журналовъ и диссертаций по разнымъ предметамъ математическихъ наукъ, доставили мнѣ огромный итогъ терминовъ, сводомъ которыхъ я уже занимаюсь слишкомъ десять лѣтъ. При такихъ пособіяхъ нетрудно было составить самый полный сборникъ словъ и реченій математическихъ. Смѣю также надѣяться, что Лексиконъ мой не отсталъ и отъ современнаго состоянія науки.

Предпринятое мною сочиненіе будетъ состоять изъ *трехъ* томовъ: первый подвергается нынѣ суду отечественныхъ ученыхъ. Для втораго и третьяго, уже собрано у меня очень много матеріаловъ; но эти матеріалы требуютъ еще тщательной обработки и значительныхъ пополненій. Въ концѣ третьяго тома будутъ помѣщены нѣкоторые дополненія ко всему изданію.

В. Буняковскій.

Апрѣля 17 дня 1859-го года.

*) Вотъ главные изъ тѣхъ сочиненій, о которыхъ идетъ рѣчь: *Dictionnaire universel de Mathématique et de Physique*; par Saverien, Paris, 1755, 2 тома in-4°. *Encyclopédie méthodique; Mathématiques*; Paris, 1784, 3 тома in-4°. *Histoire des Mathématiques*; par J. F. Montucla, achevé par Jérôme de La-Lande; Paris, 4 тома in-4°; первые два изданы въ 1799 году, а 3-й и 4-й въ 1802. *Histoire générale des Mathématiques, depuis leur origine jusqu'à l'année 1808*; par Charles Bossut; Paris, 1810, 2 тома in-8°. Алфавитный списокъ математическихъ словъ, помѣщенный въ концѣ третьяго тома сочиненія: *Traité du Calcul Différentiel et Intégral*; par S. F. Lacroix, seconde édition; Paris, томъ 1-й напечатанъ въ 1810 году, 2-й 1814 г., 3-й 1819 г. in-4°, *Mathematisches Wörterbuch*; von Georg Simon Klügel, Leipzig, nebst Fortsetzung von Wolke und Grunert, 5 томовъ 1803 — 1831 года, in-8°. *Supplément zu Georg Simon Klügels Wörterbuche der reinen Mathematik*; von J. A. Grunert; 2 тома, 1833—1836 г. Недавно вышла во Франціи книга подъ заглавіемъ: *Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées*, par une société d'anciens élèves de l'Ecole Polytechnique, sous la direction de A. S. de Montferrier; Paris, 1835 — 1836 г. 2 тома большой in-4°. Но этотъ Лексиконъ, по неполнотѣ своей и по странному, часто даже ошибочному воззрѣнію сочинителей на некоторые предметы, не могъ мнѣ служить никакимъ пособіемъ.

ЛЕКСИКОНЪ

ЧИСТОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ.

АВ.

А.

АВ.

ABAISSEMENT. (Алг.) **ПОНИЖЕНИЕ.** Пониженіемъ уравненія называется дѣйствіе, посредствомъ котораго уменьшаютъ степень того уравненія; на сей конецъ употребляютъ прилчтія преобразованія. Собственно говоря, *пониженіе* состоитъ въ разложеніи уравненія на нѣсколько другихъ, коихъ степени, пороизъ взявъ, ниже степени даннаго уравненія.

Такъ, напримѣръ, уравненіе четвертой степени

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

разлагается на два слѣдующія второй степени

$$x^2 - y'x + 1 = 0 \text{ и } x^2 - y''x + 1 = 0,$$

гдѣ y' и y'' изображаютъ корни уравненія

$$y^2 + y - 1 = 0.$$

Приведенный примѣръ относится къ уравненіямъ, называемымъ подъ названіемъ *возвратныхъ* [Смол. **RÉCÉPROQUES (EQUATIONS)**], которыя всегда могутъ быть понижены. Равнымъ образомъ пониженіе возможно въ уравненіяхъ и имѣющихъ равныя корни. Смол. **ÉGALES (RACINES)**. И вообще, когда между корнями предложеннаго уравненія существуютъ какія либо извѣстныя отношенія, то степень его можетъ быть понижена. Такъ напримѣръ, двучленное уравненіе $x^p - 1 = 0$, гдѣ p изображаетъ простое число, можетъ быть разложено на нѣсколько другихъ нисшей степени, потому что всѣ мнимыя корни этого уравненія могутъ быть выражены посредствомъ одного изъ нихъ; дѣйствительно, если изображать чрезъ ρ который нибудь изъ сихъ корней, то остальные $p - 2$ будутъ: $\rho^2, \rho^3, \rho^4, \dots, \rho^{p-1}$. Смол. **BINOMES (EQUATIONS)**.

ABAISSEMENT DE L'HORIZON VISIBLE. **ПОНИЖЕНИЕ ВИДИМАГО ГОРИЗОНТА.**

ABAISSEMENT DE NIVEAU. **ПОНИЖЕНИЕ УРОВНЯ.**

ABAISSEUR UNE ÉQUATION. (Алг.) **ПОНИЗИТЬ СТЕПЕНЬ УРАВНЕНІЯ,** или просто *понизить уравненіе.* Смол. выше.

ABAISSEUR UN CHIFFRE. (Ариф.) **СНЕСТИ, СПУСТИТЬ ЦИФРУ** (при дѣленіи). *Abaisser une tranche.* Снести, спустить грань (при извлеченіи корней).

ABAISSEUR UNE PERPENDICULAIRE. (Геом.) **ОПУСТИТЬ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЪ.** *Abaisser*

une perpendiculaire sur une droite, или *mener une perpendiculaire à une droite;* опустить перпендикуляръ къ прямой, или провести перпендикуляръ къ прямой; то есть, провести такую линію, которая, встрѣтивъ данную прямую, составляла бы съ нею два прямые угла. *Un point donné abaisser une perpendiculaire à un plan;* изъ данной точки опустить перпендикуляръ на плоскость.

ABAQUE или **ABACUS.** **АБАКА.** Гладкая доска, на которой древніе чертили Геометрическія фигуры и производили вычисленія. При употребленіи, ее покрывали весьма мелкимъ пескомъ или пылью. — **СЧЕТЫ** такого рода, какіе употребляются въ Россіи и въ нѣкоторыхъ странахъ Азіи. Ходилъ обыкновенно на счѣтахъ производить только два первыя дѣйствія, *сложеніе* и *вычитаніе*, но легко удостовѣриться, что всякія выкладки, зависящія отъ другихъ арифметическихъ дѣйствій, равно возможны. Въ началѣ 1829 года, Генералъ-Маіоръ *Свободскій* показывалъ

валъ въ С. Петербургъ опыты необыкновенной скорости вычисления на счетахъ, и, при пособіи правилъ придуманныхъ имъ на сей конецъ, онъ рѣшалъ съ большою ловкостью самыя сложныя арифметическія задачи, требующія не только умноженій, дѣленій и возвышеній въ степени, но также извлеченія корней квадратныхъ и кубическихъ. Ясно, что все искусство счисления на счетахъ, состоящее въ принаровленіи къ нимъ известныхъ правилъ Арифметики. Читателей, желающихъ имѣть полное понятіе о способѣ Г. Свободскаго, мы отсылаемъ къ слѣдующимъ сочиненіямъ: *Арифметика на счетахъ*, соч. Петра Тихомирова, С. П. В. 1830 года. Das Russische Rechenbrett, соч. М. Ишмъ, Leipzig 1831. — *Абаки де Pythagore, Abaque Pythagorique, Пифагорова таблица умноженія*. Смочри P Y T H A G O R E (TABLE DE).

ABÉLIENNES (TRANSCENDANTES или FONCTIONS). (Анал.) АБЕЛЕВЫ ФУНКЦИИ.

Въ самомъ обширномъ смыслѣ, интегралы какихъ имъ есть алгебраическихъ функций. Преимущественно же даюшъ названіе абелевыхъ функций интегралы вида $\int \frac{Pdx}{Q\sqrt{R}}$, гдѣ P, Q, R изображаютъ цѣлыя алгебраическія функции переменной x , предполагаемъ, что степень функции R выше 4 ой.

Слѣдующія названы именемъ замечнаго Норвежскаго математика *Абеля* потому, что онъ предложилъ основную теорему весьма примѣтельную, относящуюся къ суммѣ приведенныхъ выше интеграловъ. *Лежандръ*, который называетъ Абелевы функции *ультра эллиптическими* (fonctions ultra elliptiques), раздѣляетъ ихъ на классы, по степени функции R , и каждый классъ, подобно эллиптическимъ функциямъ, подраздѣляетъ на три рода. См. ÉLLIPTIQUES (FONCTIONS).

Когда R 2-ой степени, то интегралъ $\int \frac{Pdx}{Q\sqrt{R}}$ называется логарифмическою и круговою функцией; когда степень функции R равна 3 или 4, то получаются эллиптическія функции трехъ родовъ. Далее начинаются, собственно говоря, *Абелевы функции*. если R 5 ой или 6 ой степени, то $\int \frac{Pdx}{Q\sqrt{R}}$ будетъ абелева функция 1-го класса; если R 7-ой или 8-ой степени, то итѣтъ абелеву функцию 2-го класса, и такъ далѣе. Исследования, отно-

сящія къ теоріи сего рода функций, помѣщены во второмъ прибавленіи къ: *Théorie des fonctions elliptiques*, соч. Лежандра; а также въ известномъ журналѣ: *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, изд. М. Э. Crelle.

ABERRATION. (Астр.) АБЕРРАЦІЯ, ОТСТУПЛЕНІЕ СВѢТА.

Видимое движеніе свѣтила, происходящее отъ соединенія движеній свѣта и земли около солнца. Перемѣна въ положеніи неподвижныхъ звѣздъ, происходящая отъ сихъ движеній, по причинѣ своей малости, не замѣчена древними; и въ новѣйшія времена это явленіе не было предсказуемо теоріею, хотя оно есть необходимое слѣдствіе двухъ известныхъ причинъ. Мы одолжены снмъ важнымъ открытіемъ знаменитому Англіискому Астроному *Брадлею*, который былъ приведенъ къ нему случайно въ 1727 году, посредствомъ многихъ, весьма точныхъ и большихъ инструментами сдѣланныхъ наблюденій, предпринятыхъ имъ съ цѣлію опредѣлить годовой параллаксъ звѣздъ. Теорія абераціи объясняется легко слѣдующимъ образомъ: Положимъ, что изъ звѣзды A (черт. 1 листъ I) исходитъ лучъ свѣта, пробѣгающій въ известное время, разстояніе AB , отдѣляющее ее отъ земли B . Если имѣть лучъ встрѣпить въ центрѣ верхняго отверстія трубы m , то предполагая трубу неподвизною, онъ будетъ когнитивенъ внутреннему ея поверхности, или опра- зился отъ нея, и слѣдовательно, не достигнетъ глаза c наблюдателя. Но если труба будетъ двигаться параллельно самой себѣ изъ c въ B , и перейдетъ это пространство въ то же самое время, въ какое лучъ переходить путь mB , то очевидно, частица свѣта будетъ свободно двигаться по оси трубы; она будетъ находиться въ O , когда труба приметъ положеніе $m'O'$; въ O' , при положеніи $m''O''$, и наконецъ достигнетъ глаза наблюдателя въ пунктѣ B , когда труба придетъ въ положеніе $m'''B$. И такъ, свѣтъ хотя и движется по направленію AB , но не выходитъ изъ оси трубы, почему наблюдатель и будетъ опосредствомъ изображенія предмета по направленію BD , а не BA . Слѣдовательно онъ увидитъ звѣзду въ D , а не въ A . Разность между истиннымъ и видимымъ мѣстомъ звѣзды, то есть уголъ ABD , называется *угломъ абераціи* (angle d'aberration).

Изобразить уголъ ABD , то есть уголъ абераціи чрезъ α , и чрезъ β уголъ mcB , получимъ изъ треугольника Bmc

$$\sin \alpha = \frac{cB}{mB} \cdot \sin \beta.$$

Но, при построении чертежа, мы предполагали, что земля переходитъ разстояніе cB въ то самое время, въ которое свѣтъ пробѣгаетъ путь mB ; следовательно отношеніе $\frac{cB}{mB}$ можетъ быть замѣнено отношеніемъ скорости земли къ скорости свѣта, и какъ сія послѣдняя въ 10188 разъ болѣе первой, то получимъ для синуса угла абераціи слѣдующее выраженіе:

$$\sin \alpha = \frac{1}{10188} \cdot \sin \beta.$$

Наименьшая величина абераціи очевидно соотвѣствуетъ предположенію $\beta = 0$; тогда и $\alpha = 0$; наибольшая же имѣетъ мѣсто при $\beta = 90^\circ$; тогда получимъ:

$$\sin \alpha = \frac{1}{10188} = \sin (20'', 253').$$

Этотъ выводъ согласуется съ показаніями наблюденій; действительно, Астрономы, занимавшиеся опредѣленіемъ наибольшей абераціи, наши результаты весьма близкіе между собою. *Брадлей* нашелъ $20'', 0$; *Даламберъ* $20'', 253$; *Бессель* $20'', 68$; *Струве* $20'', 35$; *Линденау* $20'', 61$; *Бели* (Baily) $20'', 36$; *Ричардсонъ* $20'', 45$.

ABERRATION DES PLANÈTES. АБЕРРАЦИЯ ПЛАНЕТЪ.

Аберація перемѣняетъ также и мѣсто планетъ, какъ это доказываютъ наблюденія. Хотя она въ такомъ случаѣ есть слѣдствие трехъ движеній, но вычисленіе ея простѣе абераціи неподвижныхъ звѣздъ.

Пусть P (черт. 2, листъ I) планета, движущаяся со скоростью Pp во время T , и PD скорость свѣта въ то самое время. Лучъ свѣта, идѣя двѣ скорости Pp и PD , придетъ къ землѣ по діагонали PB . (Смол. PARALLÉLOGRAMME DES VITESSES.) Если землю примемъ неподвижною, то наблюдатель, находящійся въ B , увидитъ планету въ P въ то мгновеніе, когда она придетъ въ p . Положимъ теперь, что земля въ то же время T перешла отъ M къ B , со скоростью MB , и встрѣтилась съ лучемъ свѣта въ B ; скорость PB луча, совокупясь со скоростью земли $BM = BC$, произведетъ сложное ощущеніе въ глазъ по діагонали Bp' параллелограмма $p'PBC$, построеннаго на скоростяхъ PB и BC . И такъ наблюдатель

увидитъ планету въ p' , когда она действительно будетъ находиться въ p , и следовательно обманется на уголъ pBp' , равный суммѣ движеній планеты и земли. Еслибы планета двигалась въ одну сторону съ землею, то уголъ абераціи равнялся бы разности движеній планеты и земли. Вообще, этотъ уголъ равенъ относительному движенію планеты.

Пусть m геоцентрическое движеніе планеты въ одну секунду времени, o разстояніе планеты отъ земли, выраженное въ частяхъ большой полуоси земной орбиты; v время употребляемое свѣтомъ для прохожденія сей полуоси; uv будетъ время, которое свѣтъ употребилъ для прохожденія отъ планеты къ землѣ, и следовательно mvu движеніе геоцентрическое планеты во время uv . И такъ

Абerr. планеты $= mvu = mp (493'')$, ибо по наблюденіямъ найдено, что v , во времени, равно $8', 13'', 2$, и следовательно въ частяхъ радиуса $v = 493''$.

Если m будетъ означать движеніе планеты въ долготѣ, широтѣ, прямомъ восхожденіи или склоненіи, то послѣдняя формула дастъ аберацію долготы, широты, прямого восхожденія или склоненія. Аберація планетъ въ широтѣ почти нечувствительна, потому что онѣ мало удаляются отъ плоскости эклиптики. Самая большая аберація широты, которую имѣетъ Меркурій, почти равна $4', 3$.

Суточное вращеніе земли около оси также имѣетъ вліяніе на видимое мѣсто звѣздъ, которое поему называется *суточною абераціею* (aberration diurne). Пусть T звездное время; a , δ прямое восхожденіе и склоненіе звѣзды; α широта мѣста; то суточная аберація

прям. восх. $= 0'', 31 \cos.(T-a) \cos. \alpha \sec. \delta$
 склонен. $= - 0'', 31 \sin.(T-a) \sin. \delta \cos. \alpha$
 И такъ Maximum суточной абераціи равенъ почти $0'', 31$.

ABERRATION. (Опт.) АБЕРРАЦИЯ РАЗСѢЯНІЕ ЛУЧЕЙ.

Когда лучи свѣта проходятъ сквозь стѣкла зрительной трубы, то они не соединяются въ строгомъ смыслѣ въ фокусъ, но разсѣваются на маломъ пространствѣ, и тѣмъ самымъ производятъ не совершенное изображеніе предмета. Въ этойъ и состоитъ *аберація*, которая происходитъ отъ двухъ причинъ:

1°. Отъ того, что не существуетъ никакой кривой поверхности, для которой всѣ лучи, исходя изъ одной точки, собирались бы опять въ одну точку. Въ особенности же сферическій видъ, употребляемый для стеколъ, ни въ какомъ случаѣ не можеть произвести такого совокупленія однородныхъ лучей. Во всѣхъ стеклахъ и зеркалахъ замѣчаемъ это несовершенство, которое называется *сферическою аберраціею* или *аберраціею сферичности* или *шарообразности* (*aberration de sphéricité*).

2°. Вторая причина состоитъ въ томъ, что одна и та же вещь, когда свѣтъ ея сложный, производитъ нѣсколько изображеній различныхъ цвѣтовъ и величинъ, расположенныхъ одна за другою. Эта послѣдняя причина неясности изображеній несравненно значительнѣе первой; но она живетъ мѣсто только при употребленіи стеколъ, и не существуетъ для металлическихъ зеркалъ. Ее называютъ *аберраціею преломляемости* или *хроматическимъ разслаиваніемъ лучей* (*aberration de réfrangibilité*).

ABONDANT (NOMBRE). (Теор. Чис.) **ОБНЛЬНОЕ ЧИСЛО.** Такъ называется число, коего дѣлители, взятые вѣдѣсть, даютъ сумму, превышающую это самое число. Единица включается въ число дѣлителей. Напримѣръ: 56 есть *число обильное*, ибо сумма его дѣлителей 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 составляетъ 55 > 56. Замѣтимъ, что всѣ обильныя числа *нѣтъя*.

Недостаточнымъ (*nombre déficient*) называется такое *число*, котораго дѣлители взятые вѣдѣсть, даютъ сумму меньшую самаго числа, напримѣръ 10; и дѣйствительно, дѣлители 10 суть: 1, 2 и 5, а сумма ихъ 8 < 10.

Совершеннымъ числомъ (*nombre parfait*) называютъ такое, котораго дѣлители, взятые вѣдѣсть, равны самому числу. Напримѣръ 6, коего дѣлители 1, 2 и 3 составляютъ сумму 6; равнымъ образомъ число 28 есть совершенное, ибо дѣлители его 1, 2, 4, 7, 14, взятые вѣдѣсть, составляютъ 28. Вообще, если возьмемъ *n* такъ, чтобы разность $2^m - 1$ была *простымъ числомъ* (*nombre premier*), то $N = 2^{m-1} (2^m - 1)$ будетъ совершенное число. Принимая послѣдовательно $m = 2, 3, 5, 7, 13$. . . получимъ совершенныя числа $N = 6, 28, 496, 8128, 33550336$. . . Замѣнимъ, что совершенное число всегда оканчивается цифрою 6 или 8.

ABORNEMENT. (Земл.) **РАЗВЕРСТАНІЕ, МЕЖЕВАНІЕ, РАЗГРАНИЧИВАНІЕ.**

ABORNER. (Земл.) **РАЗВЕРСТАТЬ, МЕЖЕВАТЬ, РАЗМЕЖЕВАТЬ, РАЗГРАНИЧИТЬ.** Спавить межи. *Aborner un champ, размежевать поле.*

ABOUTIR. (Геом.) **ПРИМЫКАТЬ. — СОЕДИНЯТЬСЯ.** *Une droite qui aboutit au centre du cercle; прямая, примыкающая къ центру круга. Tous les rayons vecteurs de l'ellipse aboutissent à ses deux foyers; всѣ радіусы векторы эллипса соединяются въ его фокусахъ.*

ABRÉGER. (Алг.) **СОКРАТИТЬ, УПРОСТИТЬ.** *Abréger un calcul, сократить вычисленіе, выкладку. En posant pour abréger; полагая для краткости, для простоты.*

ABRÉVIATION. (Алг.) **СОКРАЩЕНІЕ, УПРОЩЕНІЕ.** Приведеніе алгебраическаго выраженія или формулы къ простѣйшему виду. Такъ напримѣръ выраженіе

$$x^4 - (a + b + c + d) x^3 + (ab + ac + ad + bc + bd + cd) x^2 - (abc + abd + bcd) x + abcd,$$

приводится къ слѣдующему:

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s,$$

когда примемъ, для краткости,

$$-(a + b + c + d) = p, \quad ab + ac + ad + bc + bd + cd = q, \\ abc + abd + bcd = r, \quad abcd = s.$$

ABSCISSE. (Геом.) **АБСЦИССА, ОТСЪЧЕННАЯ.**

Одна изъ трехъ координатъ, опредѣляющихъ положеніе точки въ пространствѣ. Положимъ, напримѣръ, что плоская кривая *AMB* (черт. 3 л. 1) оплесена къ двумъ осямъ *OX* и *OY*. Если, изъ какой нѣ есн точки *M* кривой, проведемъ линію *MP*, параллельную оси *OY*, то очевидно, положеніе точки *M* опредѣлится длинами *OP* и *PM*. Первая изъ нихъ, начинающаяся отъ общаго пересѣченія осей, и оканчивающаяся въ *P*, именуется *абсциссою* точки *M*, а линія *PM*, ея *ординатою*. Абсцисса и ордината, разсмаприваемыя въ совокупности, принимаютъ названіе *координатъ* точки *M*. См. COORDONNEES. Точка *O*, въ которой пересѣкаются координатныя оси *OX* и *OY*, именуется *началомъ координатъ*. — Прежде, это наименованіе принималось въ смыслъ болѣе широкъ: подъ абсциссою разумѣли какую нѣ есн часть оси или діаметра кривой линіи, заключающуюся между ея вершиною и основаніемъ ординаты.

ABSENT. (Исч. Втр.) **ОТСУТСТВУЮЩИЙ.** Чтобы объяснить смысл задачи об *отсутствующих*, приведем здесь слова *Дидерота* из Методической Энциклопедии: „Когда Николай Бернулли, племянник знаменитых Якова и Ивана Бернулли, „готовился защищать в 1703 году в Базель „Диссертацию на степень Доктора Прав, то, „изъя споль же обширные сведения в Матема- „тике как и в Правоведении, онъ рѣшился „выбрать такую тему, которая относилась бы „къ обимъ наукамъ. Предметомъ его диссер- „тація было: *De usu artis conjectandi in Jure*, то „есть, *Употребление исчисления вѣроятностей въ „Правовѣдѣнѣ*. Въ третьей главѣ этого сочи- „ненія, Николай Бернулли занимается опредѣле- „ніемъ того времени, по истеченіи котораго мо- „жно допустить, что *человѣкъ, находящійся въ „отсутствіи, умеръ*. По его мнѣнію, отсут- „ствующаго должно полагать умершимъ тогда „послѣ, когда вѣроятность, что онъ умеръ, „двое болѣе той вѣроятности, что онъ живъ.“

Далѣе Дидеротъ приводитъ примѣръ, осно- ванный на этомъ правилѣ: онъ полагаетъ, что человекъ 20-ти лѣтъ вышелъ изъ своего отече- ства. Изъ таблицъ смертности, составленныхъ Членомъ Парижской Академіи Наукъ *Депарсѣ* (*Deparcieu*), явствуетъ, что изъ числа 814 че- ловѣкъ 20-ти лѣтъ, только 271 достигаютъ 72 лѣтняго возраста; но такъ какъ 271 равно по- числу одной трети 814-ти, то ясно, что въ ис- численіи 52 лѣтъ, умерло двѣ трети всего числа 814. Следовательно, по истеченіи 52 лѣтъ послѣ отъ- ѣзда человека 20-ти лѣтъ, вѣроятность что онъ умеръ, вдвое болѣе той, что онъ еще живъ, и по теоріи Николая Бернулли, должно тогда, по за- конамъ, считать такого человека умершимъ.

ABSIDES. Смол. **APSIDES.**

ABSOLU (NOMBRE). устар. сл. (Алг.) **ПОСЛѢД- НИИ, ИЗВѢСТНЫЙ ЧЛЕНЪ** въ алгебраическомъ уравненіи, расположенномъ по нисходящимъ сте- пенямъ неизвѣстной величины. Таковы, напри- мѣръ, коэффициенты — 5 и 7 въ уравненіяхъ $x^2 - 2x^2 + 5x - 5 = 0$, $x^2 - 5x = 7$.

Смол. **HOMOGENE DE COMPARAISON.**

ABSOLU въ другомъ значеніи, Смол. **ABSTRAIT.**

ABSTRAIT (NOMBRE). (Арж.) **ОТВЛЕЧЕННОЕ ЧИСЛО.** Числомъ отвлеченнымъ именуется со- вокупность единицъ въ томъ случаѣ, когда ихъ

родъ не принимается въ соображеніе, какъ на- примѣръ, когда говоримъ: *два, дважды, три, три- жды*, и проч. Опиошеніе двухъ величинъ одно- го рода есть также число *отвлеченное*. Имено- ваннымъ же числомъ (*nombre concept*) называется собраніе единицъ известнаго рода, наприимѣръ: *два человека, три фунта*, и проч. — *Mathéma- tiques abstraites* или *Mathématiques pures*; *чистая, отвлеченная Математика*. Смол. **MATHÉMA- TIQUES.**

ABSURDE (REDUCTION A L'). (Мат.) **ПРИВЕ- ДЕНІЕ КЪ ПРОТИВОРѢЧІЮ, ДОВОДЪ КЪ НЕЛЪПОСТИ.** Въ доказательствахъ чрезъ *приве- деніе къ противорѣчію*, выводятся справедлив- ность предложенія (положительнаго или отрица- тельнаго) основываясь на томъ утѣжденіи, что еслибы предложеніе не было допущено, то изъ этого самаго произойшло бы какое нибудь явное противорѣчіе или невозможность.

Приведемъ здѣсь, изъ Геометріи древнихъ, при- мѣръ *довода къ нелѣпости*. Положимъ, пребудемъ доказатъ, что площадь круга равняется пря- моугольнику, составленному изъ полуокружно- сти и радіуса. Показавъ предварительно, что въ кругъ можно вписать, а также и описать около него такіе два многоугольника, что разность между каждымъ изъ нихъ и площадью круга мо- жетъ быть уменьшена по произволѣнію, мы раз- суждаемъ слѣдующимъ образомъ:

Если кругъ не равенъ упомянутому пря- моугольнику, то онъ будетъ или болѣе или менѣе. Если онъ менѣе, то изобразимъ избытокъ пря- моугольника количествомъ ϵ , по произволѣнію малымъ. Опишемъ около круга многоугольникъ, разнствующій отъ круга, количествомъ, мень- шимъ нежели ϵ . Площадь этого многоуголь- ника будетъ равняться прямоугольнику, по- строенному на его полу-периметрѣ и на радіу- сѣ круга. Но периметръ многоугольника болѣе окружности круга; следовательно площадь мно- гоугольника будетъ болѣе площади прямоуголь- ника, составленнаго изъ полуокружности и радіу- са; по предположенію же кругъ будетъ количес- твомъ ϵ менѣе сего послѣдняго прямоугольника, а площадь описаннаго многоугольника разнствуетъ отъ круга менѣе чѣмъ на количество ϵ . Слѣ- довательно сія послѣдняя менѣе площади пря- моугольника, построеннаго на полуокружности

и радиусъ; откуда надлежало бы заключить, что полуокружность болѣе полупериметра описаннаго многоугольника. Но это слѣдствіе очевидно есть невящее, и такъ, *площади круга не можетъ быть болѣе площади прямоугольника, составленнаго изъ полуокружности и радиуса.*

Принимая въ соображеніе вписанный многоугольникъ, докажемъ подобнымъ образомъ, что *площади круга не можетъ быть болѣе площади описаннаго прямоугольника.* Слѣдовательно, кругъ будетъ равенъ прямоугольнику, построенному на полуокружности и радиусѣ.

Вотъ, въ сущности, въ чемъ состоятъ доказательства посредствомъ *приведенія къ противорѣчію*, бывшій въ большомъ употребленіи у древнихъ Геометровъ. И нынѣ этотъ способъ употребляется не только въ Геометрію, но и въ Анализъ, преимущественно же въ Теорію Чиселъ.

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ABSURDES.

(Мож. Меч.) **НЕВОЗМОЖНЫЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ.** Такъ называе *Эйлеръ* дифференціальныя уравненія, заключающія въ себѣ болѣе двухъ переменныхъ, и не удовлетворяющія нѣкоторымъ извѣстнымъ условіямъ. Напримѣръ

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

будетъ, по *Эйлеру*, *невозможнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ*, если не выполнено условіе

$$P \left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \right) + Q \left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} \right) + R \left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} \right) = 0,$$

безъ котораго выраженіе $Pdx + Qdy + Rdz$ не можешь обратиться въ полный дифференціалъ, на какую бы функцію переменныхъ x, y, z оно не было помножено.

Эйлеръ полагалъ, что подобныя уравненія не допускаютъ никакихъ интеграловъ. *Монжъ*, въ Запискахъ Парижской Академіи Наукъ, за 1784 годъ, показалъ, что интегралъ уравненія такого рода, выражается не *однимъ уравненіемъ*, а *нѣсколькими другъ*. Впослѣдствіи, многіе *Математики* занимались сими предметомъ, и усовершенствовали теорію *Монжа* —

Такъ же назывались дифференціальныя уравненія, заключающія въ себѣ болѣе двухъ переменныхъ, и въ которыхъ дифференціалы возвышены въ степени, или перемножены между собою. Напримѣръ:

$$dz^2 = dx^2 + dx dy + dy^2.$$

ABSURDE (Анг.) **МНИМЫЙ.** *Racines absurdes* *мнимые корни.* Въ этомъ значеніи слово *absurde* почти вышло изъ употребленія, и замѣняется наименованіемъ *IMAGINAIRE* (Смол.).

ACCÉLÉRATION. (Мех.) **УСКОРЕНІЕ.** Приращеніе скорости движущагося тѣла отъ дѣйствія какой нибудь силы. Это слово противопоставляется *замедленію* или *укопнѣнію* (*retardation*), которыми означаютъ происшедшее уменьшеніе въ скорости движущагося тѣла.

ACCÉLÉRATRICE (FORCE). (Мех.) **УСКОРИТЕЛЬНАЯ, УСКОРЯЮЩАЯ СИЛА.** Въ букввальномъ смыслѣ, подъ *этимъ* наименованіемъ слѣдовало бы разумѣть силу, отъ дѣйствія которой увеличивается скорость движущагося тѣла; но *ускорительную силу* принимаютъ въ значеніи болѣе обширномъ: такъ называютъ всякую силу, дѣйствующую на тѣло, раздѣленную на массу сего тѣла. Очень можешь случиться, что отъ дѣйствія ускорительной силы, скорости тѣла вѣсто того чтобы увеличиваться, будутъ, напротивъ того, уменьшаться. Правда, въ семъ послѣднемъ случаѣ, называютъ иногда такую силу *укопнительною* (*force retardatrice*); но сочинители объясняютъ этотъ терминъ только въ самомъ началѣ Динамики, когда разсматриваютъ силы вообще; въ приложеніяхъ же сей науки къ рѣшенію различныхъ задачъ, они употребляютъ наименованіе *ускорительной силы*, не принимая въ соображеніе того обстоятельства, ускорять ли она или замедляетъ движеніе.

Ускорительная сила измѣряется дѣйствіемъ, производимымъ движущею силою на тѣло; она независима отъ количества инерціи сего послѣдлага; Смол. **INERTIE.** Аггегрическое выраженіе ускорительной силы есть *удвоенное пространство переходимаго тѣла, раздѣленное на квадратъ времени.* Само собой разумѣется, что говоримъ только о *нѣмъ* пространствѣ, которое будетъ перейдено отъ дѣйствія движущей силы, а независимое отъ нея, не принимается въ расчетъ. Это предполагаютъ, что движущая сила постоянная; если же она будетъ переменная, то надобно принимать время безконечно малымъ, дабы нѣмъ

мѣжаши всякое ощущительное измѣненіе въ величинѣ силъ. Впрочемъ, мы сознаемся, что сказанное нами объ ускорительной силѣ не довольно ясно; но понятіе о ней такъ тѣсно связано съ понятіями объ инерціи или массѣ, и о силахъ движущихъ, что, для полнаго уразумѣнія сихъ предметовъ, необходимо разсматривать ихъ въ совокупности, что старались сдѣлать по возможности удовлетворительнѣйшимъ образомъ въ слѣдующемъ: **FORCE** (Смол.).

ACCELERÉ. (Мех.) **УСКОРЕННЫЙ.** *Mouvement accéléré, ускоренное движеніе.* Такое движеніе тѣла, въ копоромъ скорости, отъ дѣйствія силъ, непрестанно увеличивается. Сему роду движенія противуполагается *замедленное или ускоренное движеніе (mouvement retardé).* Смол. **MOUVEMENT, FORCE.**

Mouvement uniformément accéléré. *Равнообразно, единообразно ускоренное движеніе.* Когда приращенія скорости въ равныя времена равны, то тѣло движется *равнообразно ускореннымъ движеніемъ*, какъ напримѣръ падающія тѣла въ безвоздушномъ пространствѣ. Смол. **CHUTE DES GRAVES.**

ACCENT. **ЗНАКЪ, ЧЕРТА, УДАРЕНІЕ.** Черты употребляютъ весьма часто въ буквенныхъ вычисленіяхъ или по недостатку буквъ, или для обозначенія величинъ, имѣющихъ между собою какую либо аналогію. Они, находясь чаще надъ буквою, хотя иногда и спускаются внизъ. Вошь-какъ произносятся обозначенныя ими буквы:

x' (x prime) x со знакомъ, съ чертой
 x'' (x seconde) x съ двумя знаками, съ двумя чертами
 x''' (x tierce) x съ тремя знаками
 x^{iv} (x quarte) x съ четырьмя знаками
и проч.

Когда желаютъ обозначить x съ неопредѣленнымъ числомъ знаковъ, напримѣръ съ n знаками, то, для избежанія ободности при означеніи степеней заключаютъ n въ скобки, и пишутъ $x^{(n)}$.

ACCENTUER. **ОВОЗНАЧАТЬ, ОЗНАЧАТЬ ЧЕРТАМИ, ОТМѢЧАТЬ ЗНАКАМИ.**

ACCÈS DE FACILE RÉFLEXION ET DE FACILE TRANSMISSION. (Опти.) **ПРИСТУПЫ НАИБОЛЬШАГО ОТРАЖЕНІЯ И ПРОХОЖДЕНІЯ СВѢТА.** Смол. **ANNEAUX COLORES.**

ACCESSIBLE (HAUTEUR). (Практич. Геом.) **ПРИСТУПНАЯ ВЫСОТА,** то есть такой предметъ, къ которому, при измѣреніи его, подойти можно. **ACCESSOIRES (QUANTITÉS).** (Анал.) **ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЯ, ВВОДНЫЯ КОЛИЧЕСТВА.** Смол. **AUXILIAIRE.**

ACCIDENTEL (POINT). (Персп.) **СЛУЧАЙНАЯ ТОЧКА.** Точка на картинной плоскости, въ которой пересѣкаются перспективныя сколькихъ угодно прямыхъ линій, параллельныхъ между собою. Чтобы получить эту точку, ставятъ нѣсколько опыта глаза провести линію, параллельную даннымъ прямымъ; точка встрѣчи съ картинною плоскостью будетъ искома.

ACCOLADES. **ЛОМАННЫЯ СКОБКИ.** Скобки вида $\{ \}$, часто употребляемыя въ формулахъ нѣсколько сложныхъ. Смол. **PARENTHESES.**

ACCORDER (S'). (Алг.) **СОГЛАСОВАТЬСЯ, ЕДИНСТВОВАТЬ.** *Ces deux équations s'accordent entr'elles; siu два уравненія согласуются, единствуютъ между собою,* то есть, доставляютъ один и тѣ же значенія для неизвѣстной.

ACCOURCI. (Геом.) **СЖАТЫЙ.** *Cycloïde accourcie или raccourcie; сжатая циклоида,* то есть такая, у которой осевое мѣсто окружности круга производящаго.

ACCROISSEMENT. (Анал.) **ПРИРАЩЕНІЕ. — ВОЗРАСТАНІЕ.** Такъ называется увеличеніе или уменьшеніе переменнаго количества, происшедшее или отъ непосредственнаго измѣненія этой самой переменной, или отъ измѣненій другихъ величинъ, отъ которыхъ она зависитъ. Напримѣръ, имѣя уравненіе $y = f(x)$, и полагая, что для значенія $x + h$, y измѣняется въ $y + k$, оба величинъ h и k будутъ означать приращенія: первая, переменнаго x , а вторая, переменнаго y . Смол. **TAYLOR (THÉORÈME DE).**

Конечное приращеніе (accroissement fini) часто обозначается буквою Δ , поставленною передъ переменною величиною или функциею; напримѣръ, если имѣемъ $y = f(x)$, то получимъ:

$$\Delta y = f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Смол. **DIFFÉRENCES FINIES.**

Безконечно малое приращеніе (accroissement infiniment petit) означаютъ буквою d , и въ такомъ случаѣ оно называется *дифференціаломъ*. Смол. **DIFFÉRENTIELLE, INFINIMENT PETIT.**

АСХРОМАТИЧЕ или **INCOLORE**. (Опш.) **АХРОМАТИЧЕСКИЙ, БЕЗЦВѢТНЫЙ**. Отъ греческ. *χρῶμα, цвѣтъ*, и *α*, отрицательная частица (*безъ*). *Lentille achromatique, ахроматическая труба*. Такъ называлъ Ланльдъ трубу, въ которой изображенія представляются безъ радужныхъ цвѣтовъ, или, иначе, трубу уничтожающую абберацию преломляемости. Ахроматическое предметное стекло, въ такихъ трубахъ, составлено изъ двухъ родовъ стеколъ: изъ *к라운ъ-гласса* (*crown-glass*) и *флинтъ-гласса* (*flint-glass*).

Нѣкоторые починаютъ извѣстнаго Англичскаго Оптика *Доллонда* изобрѣтателемъ ахроматическихъ стеколъ; но, по справедливости, честь сего изобрѣтенія принадлежитъ знаменитому *Эйлеру*, который первый замѣтилъ, въ устройствѣ нашего глаза превосходный ахроматическій приборъ, и предвидѣлъ, что подражалъ въ этомъ отношеніи природа, можно произвѣсти искусственное ахроматическое зрѣло.

Прежде, предметныя ахроматическія стекла составлялись изъ двухъ двояко-выпуклыхъ стеколъ (*lentille*) крουνъ-гласса, отдѣленныхъ двояковыпуклымъ изъ флинтъ-гласса. Нынѣ дѣлаютъ ихъ обыкновенно изъ двухъ стеколъ: изъ двояковыпуклаго крουνъ-гласса, соединеннаго съ менискомъ изъ флинтъ-гласса.

ACHROMATISME, АХРОМАТИЗМЪ, БЕЗЦВѢТНОСТЬ. Свойство такихъ предметныхъ стеколъ, который уничтожаютъ абберацию преломляемости. Смолн: выше.

ACOUSTIQUE. (Физ.) **АКУСТИКА** (отъ греч. *ακουή, слышаніе*). Наука, занимающаяся законами распространенія звука и отношеніями, существующими между различными звуками. Звѣло, коего частицы приведены въ сотрясеніе, сообщаютъ это движеніе окружающему воздуху чрезъ посредство котораго сіи сотрясенія до барабанистой перепонки нашего уха, и производятъ въ немъ впечатлѣніе, называемое нами *звукомъ*. Чтобы звукъ былъ слышимъ, онъ долженъ происходить отъ довольно быстрыхъ сотрясеній; предѣлы скорости ихъ извѣстны по опытамъ. Тѣ же сотрясенія, коихъ скорости выходятъ изъ этихъ предѣловъ, не производятъ чувствительнаго впечатлѣнія.

Если частица зрѣла приведена въ сотрясеніе какою либо причиною, то эти первоначальныя

колебанія распространяются на большія разстоянія съ различными скоростями для различныхъ зрѣлъ, и чѣмъ болѣе будетъ скорость распространенія, тѣмъ лучший проводникъ звука будетъ зрѣло. Вообще говоря, твердые зрѣла лучшіе проводники звука, нежели жидкія и воздухообразныя.

Когда звуки слѣдуютъ одинъ за другимъ безъ всякаго порядка и постепенности, то происходитъ просто *шумъ*: но если, при равномерныхъ промежуткахъ между звуками, отношенія ихъ одинъ къ другимъ будутъ подчинены извѣстнымъ правильнымъ законамъ, то произойдетъ *мелодія* или *музыкальный звукъ*.

Акустика, въ отношеніи однихъ только музыкальных звуковъ, была предметомъ соображеній въ самой глубокой древности. *Пифагоръ* занимался ею, и открылъ отношенія между длинами сотрясающихся струнъ и издаваемыми ими звуками. Но какъ отрасль Физико-Математическихъ наукъ, Акустика является только въ концѣ XVII вѣка. Изъ числа Математиковъ, обогатившихъ ее своими умозрительными трудами, мы упомянемъ о *Нютонѣ, Лавранжѣ, Эйлерѣ, Пуассонѣ* и *Лапласѣ*. Опытною частию этой науки, занимался съ особенными успѣхами *Хладни* (*Chladni*) издавшій *Акустику, В. Бергъ, Саваръ, Каньаръ Лютуръ* и нѣкоторые другіе. Смолн. **CORDES VIBRANTES, MONOCORDE.**

ACQUERIR. (Mex.) ПРИОБРѢТАТЬ, ПОЛУЧАТЬ.

Vitesse qu'un corps acquiert en tombant d'une certaine hauteur; скорость, приобретаемая зрѣломъ, падающимъ съ нѣкоторой высоты.

ACQUISE (VITESSE). ПРИОБРѢТЕННАЯ СКОРОСТЬ. Смолн. **VITESSE.**

ACRE. (Мѣтр.) АКРЪ. Поземельная мѣра, еще нынѣ употребляемая въ различныхъ государствахъ. *Англійскій акръ*, напримѣръ, заключаетъ въ себѣ 0,3703 десятины, или 0,4047 гектара.

ACTION. (Mex.) ДѢЙСТВІЕ. Такъ называлось въ Механикѣ усиліе, изъваемое силою на зрѣло, или просто на матеріальную точку. *Action d'une force; дѣйствіе силы.* Смолн. **FORCE.**

ACTION ÉGALE A LA RÉACTION. ДѢЙСТВІЕ РАВНО ПРОТИВОДѢЙСТВІЮ. Когда два или нѣсколько зрѣлъ находятся въ такомъ положеніи, что, въ слѣдствіе ихъ непроницаемости, они дѣйствуютъ одно на другое, то взаимныя ихъ дѣй-

силы будутъ равны и направлены въ противоположныя стороны. Для ясности, положимъ что два шѣла m и m' дѣйствуютъ одно на другое; если p будетъ изображать дѣйствіе шѣла m на m' , по извѣстному направленію, то та же самая сила p изобразитъ дѣйствіе шѣла m' на m , но только она будетъ направлена въ прямопротивную сторону. Говоря что дѣйствіе равно противоположно, мы не разумѣемъ чтобы движеніе двухъ шѣлъ, подверженныхъ взаимному дѣйствію, было одинаково; судя по одному движенію шѣла, можно, напротивъ того, заключить что дѣйствіе не равно противоположно; но равенство возстановится, когда приедемъ въ соображеніе массы шѣла. Чѣмъ болѣе будетъ масса шѣла, тѣмъ меньшее измѣненіе произойдетъ въ его движеніи. Мы говоримъ теперь только о шѣлахъ, дѣйствующихъ одинъ на другія, послѣ прикосновенія; но потѣ же самый законъ допускается при взаимномъ дѣйствіи двухъ шѣлъ, находящихся въ нѣкоторомъ другъ отъ друга разстояніи. Такъ какъ, по нашему разумію, шѣла, находящіеся одинъ отъ другихъ на разстояніяхъ, не могутъ дѣйствовать другъ на друга, то надобно искать причины такого взаимодѣйствія въ нѣкоторомъ рѣдчайшемъ веществѣ, наполняющемъ пространство; это вещество, подверженное непосредственному дѣйствію обоихъ шѣлъ, служило имъ, такъ сказано, проводникомъ для взаимнаго ихъ дѣйствія.

Здѣсь не мѣсто распространяться о причинахъ притяженія и другихъ силъ, обнаруживающихъ свое дѣйствіе на нѣкоторыхъ разстояніяхъ. Для подробностей о семъ предметѣ отсылаемъ читателя къ статьѣ: **ATTRACTION**. Скажемъ только, что *последователи закона притяженія* (*Attractionnaires*), то есть тѣ, которые утверждаютъ, что вещество одарено способностію притягивать на разстояніяхъ, допускаютъ также равенство дѣйствія и противоположнѣйшаго. И такъ, земля притягиваетъ луны съ такою же напряженностію, какъ и сама притягивается ею.

Равенство дѣйствія и противоположнѣйшаго составляетъ послѣдній изъ трехъ законовъ движенія, приводимыхъ Ньютономъ въ началѣ безмертнаго своего творенія: *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. Этотъ законъ не доказывался, и не можетъ быть доказанъ *a-priori*; ибо, устраняя показанія опыта, мы ничего не имѣемъ такого,

откуда могли бы заключить, что два шѣла не могутъ производить различныя одно на другое дѣйствія. И такъ, надобно принять этотъ великій законъ природы за фактъ, выведенный изъ наблюденій, и предположить его общимъ, основнымъ на одномъ наведеніи.

ACTION (PRINCIPE DE LA MOINDRE). НАЧАЛО НАИМЕНЬШАГО ДѢЙСТВІЯ.

Такъ называется, весьма несвойственно, теорема, относящаяся къ элементарнымъ живымъ силамъ. Элементарною живою силою, въ определенное мгновеніе, называется живая сила системы для того ~~или~~ *начало наименьшаго дѣйствія*, помноженная на элементъ времени, и *начало наименьшаго дѣйствія* состоитъ въ томъ, что *сумма элементарныхъ живыхъ силъ, взятая отъ одного определеннаго мгновенія до другаго, будетъ наименьшая*. Дабы выразить аналитически это начало, изобразимъ чрезъ m , m' , m'' ,.... массы шѣлъ составляющихъ какую угодно систему; чрезъ v , v' , v'' ,.... скоростей сихъ массъ въ концѣ времени t ; и наконецъ чрезъ ds , ds' , ds'' ,.... элементныя кривыя, переиженныхъ силами шѣлами въ продолженіи того же времени t . Въ слѣдствіе *начала наименьшаго дѣйствія*, *интегралъ*

$$f(m ds + m' ds' + m'' ds'' + \dots),$$

изображающій сумму элементарныхъ живыхъ силъ (ибо $ds = v dt$, $ds' = v' dt$, $ds'' = v'' dt$,....), *взятый отъ одного положенія системы до другаго, будетъ наименьшій*.

Эта теорема тогда только имѣетъ мѣсто, когда сумма *всѣхъ возможныхъ моментовъ* (*moments virtuels*) будетъ полнымъ дифференціаломъ.

ACTION (QUANTITÉ D'). КОЛИЧЕСТВО ДѢЙСТВІЯ.

Такъ называлъ Мопертиусъ *начало наименьшаго дѣйствія*. См. выше.

ACTION CAPILLAIRE. ВОЛОСНЫЯ ДѢЙСТВІЯ.

См. CAPILLAIRE (ACTION), MOLECULE.

ACTION. АКЦІЯ, УЧАСТОКЪ.

Сумма взносов въ кассу какого либо Спирховаго или Коммерческаго Общества. — *Свидѣтельство или облигація*, выдаваемая Директорами подобныхъ Обществъ тѣмъ лицамъ, которые внесли въ ея кассу извѣстную сумму.

ACTIONNAIRE. АКЦИОНЕРЪ, УЧАСТНИКЪ.

Тотъ, кто имѣетъ одну или нѣсколько акцій.

АКТИВНІСТЬ (SPHÈRE D'). (Мех.) **СФЕРА ДѢЯТЕЛЬНОСТИ.** Взаимное дѣйствіе частицъ шара оказывающагося нечувствительными, когда разстоянія ихъ дѣлаются ошущительными; но, на разстояніяхъ весьма малыхъ, дѣйствіе одной частицы на другую, можетъ быть весьма значительнымъ. Каждая частица дѣйствуетъ во всѣ стороны; и если вообразимъ вокругъ нея шаръ, описанный радіусомъ, равнымъ разстоянію, на которомъ дѣйствіе частицы дѣлается нечувствительнымъ, то этотъ шаръ принимаетъ названіе *сферы дѣятельности* той самой частицы. Частица находится *въ сферѣ дѣятельности* другой, когда взаимное ихъ разстояніе менѣе радіуса упомянутого шара, если это разстояніе болѣе радіуса, то говоримъ, что частица *вне сферы дѣятельности*. Смол. MOLECULE.

АКТИВНІСТЬ (MOMENT D'). (Мех.) **МОМЕНТОМЪ ДѢЯТЕЛЬНОСТИ** силы, приложенной къ движущейся точкѣ, называется произведеніе этой силы на вращеніе кривой линіи описываемой точкою, и на косинусъ угла, составляемаго направлениемъ силы и элементомъ дуги. И такъ, изобразивъ чрезъ R движущую силу, чрезъ s дугу описываемую точкою, чрезъ ω уголъ, заключающийся между направлениемъ силы R и касательной къ кривой, *моментъ дѣятельности силы R* выразится чрезъ $R \cos. \omega. ds$. Если силу R разложимъ на три составляющія X , Y и Z , параллельныя прямоугольнымъ осямъ, и сверхъ того, изобразимъ чрезъ x , y , z , координаты движущейся точки, то получимъ

$$R \cos. \omega. ds = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Моментъ дѣятельности системы силъ есть сумма моментовъ дѣятельности каждой силы. Следовательно, моменты дѣятельности, очень часто, не иное что, какъ частный случай *возможнаго момента (moment virtuel)*. Смол. MOMENT, FORCE VIVE.

ACUTANGLE (TRIANGLE) или **TRIANGLE OXIGONE.** (Геом.) **ОСТРОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИКЪ.** Треугольникъ, у котораго всѣ углы острые.

ACUTANGULAIRE. (Геом.) **ОСТРОУГОЛЬНЫЙ.** *Seç'on acutangulaire d'un cône.* *Остроугольное сечение конуса*

ADDITION. (Ариф. и Алг.) **СЛОЖЕНІЕ.** Арифметическое или алгебраическое дѣйствіе, посредствомъ котораго опредѣляется величина, равная несколькимъ другимъ, взятымъ вѣснѣ. Числа, данныя для сложенія, называются *слагаемыми*, а окончательное число, или результатъ сложенія, *суммою*.

Арифметическое сложеніе можно раздѣлять на два рода: на *простое (simple)* и *сложное (composé)*. Сложеніе называется *простымъ*, когда всѣ слагаемыя будутъ цѣлыя числа; *сложнымъ*, когда всѣ слагаемыя, или нѣкоторые изъ нихъ, заключаютъ въ себѣ дробныя части.

Алгебраическое сложеніе производится написавъ слагаемыя количества къ ряду, сохраняя передъ каждымъ членомъ собственный его знакъ. Если же слагаемыя заключаютъ въ себѣ подобные члены, то пишемъ ихъ одни подъ другими для того, чтобы легче было усмотрѣть сокращенія. Напримеръ, положимъ что даны для сложенія три величины:

$$\begin{aligned} 5a^7 - 2b^6 + 4a^6b^2 \\ - 20a^6b + 8a^5b^2 - 16a^4b^3 \\ 16a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5. \end{aligned}$$

Мы ихъ напишемъ въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \text{Слагаемыя} \quad & \begin{cases} 5a^7 - 2a^6b + 4a^6b^2 \\ - 20a^6b + 8a^5b^2 - 16a^4b^3 \\ + 16a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5. \end{cases} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Сумма: } 5a^7 - 22a^6b + 12a^6b^2 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5.$$

И такъ, вмѣсто десяти членовъ, по сокращенію, получаемъ только пять. Смол. REDUCTION, COEFFICIENT.

ADDITIF, ADDITIVE; ADDITIONNEL. (Ариф.). **ПРИДАТОЧНОЕ, ПРИБАВЛЯЕМОЕ.** *Quantité additive, придаточное количество.* — *Jour additif или intercalaire; дополнительный, вставочный день;* день, прибавляемый къ високосному году.

ADDITIONNER. (Ариф. и Алг.) **СЛОЖАТЬ;** найти сумму.

ADHÉRENCE и ADHÉSION. (Физ.) Смол. COHÉSION.

ADHÉRENT (POINT CONJUGUÉ). (Геом.) **ПРИКОСНОВЕННО - СОПРЯЖЕННАЯ ТОЧКА.** Смол. CONJUGUÉE (OVALE).

ADJACENT или **CONTIGU.** (Геом.) **СМЕЖНЫЙ.**

— *Прилежащий. Angles adjacents, смежные углы.* то есть, такие, которые имеют общую сторону. — Обыкновенно под сими наименованіемъ разукуютъ углы, составленные прямою линією съ другою, продолженною съ одной стороны точки вострѣи. Въ такомъ случаѣ, сумма двухъ смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ. — Въ многоугольникахъ *прилежащими сторонами* (*côtés adjacents*) называются стороны одного и того же угла многоугольника. — *Angles adjacents; прилежащие углы.* Такъ называются углы находящіеся на одной сторонѣ треугольника; таковы напримѣръ, *A* и *B*, относительно стороны *AB* въ треугольникѣ *ABC*.

ADJOINTE (FORME). (Теор. Чис.) **ПРИДАТОЧНЫЙ ВИДЪ.**

Когда имѣемъ видъ $f = ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'$, и положимъ $b^2 - a'a'' = A$, $b'^2 - aa'' = A'$, $b''^2 - aa' = A''$, $ab - b'b'' = B$, $a'b' - b'b'' = B'$, $a'b'' - bb' = B''$, то видъ $F = Ay^2 + A'y'^2 + A''y''^2 + 2Byy'' + 2B'yy' + 2B''yy'$ Гауссъ называетъ *придаточнымъ видомъ* въ отношеніи къ f . Что касается до изслѣдованія подобныхъ видовъ, то мы описываемъ читателю въ вышеупомянутой книгѣ Гаусса: *Recherches Arithmétiques*.

ADRESSE DES JOUEURS. (Ист. Вѣр.) **ИСКУССТВО ИГРОКОВЪ. — ЛОВКОСТЬ.**

Играка равно его вѣроятности выиграть партію независимы отъ болѣе или менѣе счастливаго расположенія игры. Чтобы опредѣлить искусство игрока, надобно слѣдить его въ продолженіи значительнаго числа парцій, играемыхъ имъ. Оно будетъ выражаться числомъ выигранныхъ имъ парцій, раздѣленнымъ на совокупности всѣхъ сыгранныхъ. Изъ этого усматриваемъ, что величина сія, для одного и того же игрока, не всегда будетъ одинакова, ибо, она зависитъ отъ искусства его противника; въ одномъ случаѣ она будетъ болѣе, въ другомъ менѣе, смотря по силѣ играющихъ съ нимъ. *Deux joueurs dont les adresses sont égales; два игрока равнаго искусства, два равноискусные игрока.*

AÉRAULIQUE. АЭРАВЛИКА. То же въ отношеніи Аэростатики и Аэродинамики, что *Гидравлика* въ отношеніи Гидростатики и Гидродина-

мики. И такъ, *Аэравлика* есть прикладная часть *Аэрометрии*. Смол. *AÉROMÉTRIE*.

AÉRIENNE (PERSPECTIVE). ВОЗДУШНАЯ ПЕРСПЕКТИВА. Смол. *PERSPECTIVE*.

AÉRIFORME (FLUIDE). (Физ.) **ВОЗДУХО-ОБРАЗНАЯ ЖИДКОСТЬ.** Жидкости составленная изъ часпицъ, коихъ оппиделивающая сила превосходить притягательную, и копорыя, въ слѣдствіе сего, спреияются къ взаимному удаленію. Смол. *CORPS*. Такого рода жидкости одарены совершенною упруосію, происходящею безъ сомнѣнія отъ оппиделивающего дѣйствія ихъ часпицъ.

Упругая жидкость, заключенная со всѣхъ сторонъ, и поддержанная вѣншему давленію, сжимается болѣе и болѣе по мѣрѣ увеличенія этой силы, при чемъ уменьшеніе объема жидкости бываетъ всегда въ прямоиъ содержаніи прашерптываемаго ею давленія. Упругія жидкости, при своемъ разширеніи отъ теплоты, разнѣмъ образомъ подчинены весьма правильнымъ законамъ. Опыты *Ге-Люссака* и *Дальтона*, а позже *Дюлона* (*Dulong*) и *Петти* показали, что объемъ газа увеличивается на 0,00375 часть свою для каждаго градуса *Цельсія* (споградуснаго) термометра. И такъ, если изобразить чрезъ v_0 объемъ газа при 0° , а чрезъ v объемъ, соотвѣтствующій ϑ° , то найдемъ $v = v_0(1 + 0,00375 \vartheta)$, предполагая однакоже, что вѣншее давленіе не измѣняется. Но если бы давленіе перемѣнилось, то нашли бы другое выраженіе для v ; означивъ чрезъ p_0 давленіе при 0° , соотвѣтствующее объему v_0 , и чрезъ p давленіе при температурѣ ϑ° , объемъ v опредѣлится формулою $v = \frac{p_0}{p} v_0(1 + 0,00375 \vartheta)$.

Полезно также имѣть отношеніе, существующее между плотностію упругой жидкости, прашерптываемымъ имъ давленіемъ и температурою. Чтобы получить такую зависимость, пусть будетъ v_0 и ρ плотность жидкости, соотвѣтствующія температурѣ 0° и ϑ° ; изобразивъ по прежнему чрезъ v_0 , p_0 и v объемы и давленія, относящіеся къ 0 и ϑ градусамъ, получимъ, $\rho_0 v_0 = \rho v$, и, подставляя вмѣсто p приведенное выше значеніе $\frac{p_0}{p} v_0(1 + 0,00375 \vartheta)$, найдемъ $p = \frac{p_0}{\rho_0} \rho(1 + 0,00375 \vartheta)$. Если изобразить чрезъ k по-

сплошное оплоснение $\frac{P_0}{\rho_0}$, то последнее равенство приметъ видъ

$$p = k, (1 + 0,00375 \theta);$$

это уравненіе заключаетъ въ себѣ законъ зависимости, связующій между собою плотность жидкости ρ , упругость ея p и температуру θ . Формула сія необходима для опредѣленія условий равновѣсія или движенія упругихъ жидкостей.

Замѣтимъ впрочемъ, что справедливости сихъ торжъ подтверждена опытами только между предѣлами — 36° и $+360^\circ$ столбодушеннаго термометра. Въ сихъ предѣлахъ, правильность приведеннаго закона подвержена сомнѣнію.

АЭРОДИНАМИКЕ. АЭРОДИНАМИКА. Часть

Гидродинамики, излагающая законы движенія воздухообразныхъ жидкостей. Нынѣ, Аэродинамику не отдѣляютъ отъ Гидродинамики. Смол. HYDRODYNAMIQUE.

АЭРОМЕТРИЕ или АИРОМЕТРИЕ. АЭРОМЕТРИЯ, ВОЗДУХОЗНАНИЕ. Наука, занимающая

себя свойствами воздуха, опосредствено законовъ его движенія, упругости и проч. Аэрометрия входитъ очевидно въ область Гидродинамики. Смол. HYDRODYNAMIQUE.

АЭРОНАУТИКЕ или АЭРОСТАТИОН. АЭРОНАВТИКА, ВОЗДУХОПЛАВАНІЕ. Искусство

подниматься и плавать въ воздухѣ посредствомъ аэростата или воздушнаго шара. Смол. ниже.

АЭРОСТАТ, BALLON или MONGOLFIER. АЭРОСТАТЪ, ВОЗДУШНЫЙ ШАРЪ, МОНГОЛЬФИЕРЪ. Аэростатомъ называется машина,

посредствомъ которой можно подняться на воздухъ и плавать въ немъ. Изобрѣтеніе аэростатовъ принадлежитъ Лосифу Монгольфьеру, который произвелъ первый опытъ воздухоплаванія 1782 года, въ Анжювѣ. Однакоже Англичане оспариваютъ у Французовъ честь сего открытія, утверждая, что Докторъ Блэкъ (Black), еще въ 1767-мъ и 1768-мъ годахъ на чинавшихъ имъ публичныхъ лекціяхъ, объяснилъ возможность такого прибора, который, будучи легче атмосфернаго воздуха, долженъ плавать въ немъ; онъ даже объявлялъ, что въ непродолжительномъ времени приспущимъ къ употребленію придуманной имъ машины: но многотысячныя завѣщія Доктора не позволили ему довершить сіи опыты. Мы

должны также упомянуть и о изобретеніи *Кавалло* (Cavallo), который, въ началѣ 1782 года, прежде Монгольфьера, производилъ опыты по предмету воздухоплаванія; но они не имѣли желаннаго успѣха.

Правила науки о воздухоплаваніи основаны на законахъ тяжести и упругости воздухообразныхъ жидкостей, слѣдовательно, должно опираться почти всю теоретическую часть этого искусства въ Гидростатику.

АЭРОСТАТИКЕ. АЭРОСТАТИКА. Часть Гидростатики, предлагающая законы равновѣсія воздухообразныхъ жидкостей. Смол. HYDROSTATIQUE.

АГ.

АГГЕСТЕ (Алт.) СОВОЖОЖДАЕМЫЙ, ПОМНОЖЕННЫЙ; напримѣръ, въ выраженіи $7x^2$, x^2 сопровождается множителемъ 7. *Quantité affectée du signe + ou —; количество сопровождаемое знакомъ + или —.*

АГГЕСТЕЕ (EQUATION). (Алт.) Устар. выраж. **МНОГОЧЛЕННОЕ УРАВНЕНІЕ.** Алгебраическое уравненіе съ одною неизвѣстною, заключающее въ себѣ болѣе двухъ членовъ; напримѣръ: $x^4 - a^2 + 2x - 3 = 0$.

АГГЕСТІОН. Устар. сл. ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ.

Какое нибудь свойство кривой линіи. *Cette courbe a une telle afféction, cette courbe appartient à telle propriété, та кривая имѣетъ такую-то принадлежность, такое-то свойство.* Преимущественно употребляется въ этомъ смыслѣ слово *propriété* (свойство).

АГГЕСТИВЪ, то же что POSITIF. (Алт.) ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ. *Quantité affirmative или quantité positive, положительное количество.* Смол. POSITIF.

АГ.

AGE DE LA LUNE. (Аспр.) СТАРОСТЬ ЛУНЫ.

Число дней прошедшихъ отъ новолунія. Старость луны, для даннаго дня, опредѣляется посредствомъ знаковъ того года, къ которому предположенный день принадлежитъ. Смол. ЕРАСТЕ.

AGENT. (Мех.) ДѢЯТЕЛЬ, ДѢЙСТВОВАТЕЛЬ.

Сила производящая или спремощающая произвешіи движеніе.

АГЕОМЕТРИЕ или АГЕОМЕТРИСІЕ. АГЕОМЕТРИЯ. Не по правиламъ Геометріи. — Незнаніе Геометріи.

AGIR. (Мех.) **ДѢЙСТВОВАТЬ.** Производить какое нибудь дѣйствіе. Когда говоримъ въ Механикѣ, что сила *дѣйствуетъ* на тѣло, то разумѣемъ, что она приводитъ, или стремится привести тѣло въ движеніе. Смол. ACTION.

AGRAIRE (MESURE). (Мѣтр.) **ПОЗЕМЕЛЬНАЯ МѢРА.** Мѣра поверхности земли, напримеръ: десятина, французскій ар, арпан, акръ и проч.

AGRÉGAT COMBINATOIRE. (Анал.) **СОВОКУПИТЕЛЬНЫЙ АГРЕГАТЪ.** Смол. COMBINATOIRE (ANALYSE).

AI, AJ.

AIGU. (Геом.) **ОСТРЫЙ.** *Angle aigu, острый уголъ.* Смол. ANGLE.

AIGUILLE. **СТРѢЛКА, УКАЗАТЕЛЬ, СТИЛЬ, ТѢНИКЪ, ИГЛА.** *Aiguille d'un cadran; тѣникъ, указатель въ солнечныхъ часахъ. Aiguille aimantée, магнитная стрѣлка.*

AILE. **КРЫЛО.** (Мех) *Ailes d'un moulin. Крыла мельницы.*

AILERON или **AUBE;** то же что *Aile.*

AIMANT. (Физ.) **МАГНИТЪ.** См. MAGNÉTISME.

AIMANTE. (Физ.) **НАМАГНИЧЕННЫЙ; МАГНИТНЫЙ.**

AIR. (Физ.) **ВОЗДУХЪ.** Земная атмосфера; Смол. ATMOSPHERE.

AIRE. (Геом.) **ПЛОЩАДЬ.** Пространство, ограниченное со всѣхъ сторонъ или прямыми линіями, или кривыми, или еще, и лѣнями и другими. *L'aire du cercle, de la parabole, площадь круга, параболы.*

Surface (поверхность) употребляется также въ Геометріи въ значеніи слова *aire*; но преимущественно разумѣютъ подъ *surface* просто видъ поверхности, усматривая всякое понятіе о ея пределахъ.

Плоская криволинейная площадь определяется слѣдующимъ образомъ: если изобразить чрезъ x и y прямоугольныя координаты кривой линіи, ограничивающей искомую площадь, то сія послѣдняя выразится интеграломъ $\int y dx$, взятымъ между надлежащими предѣлами относительно абсциссы x .

Напримеръ, еслибы желали найти площадь *параболическихъ* кривыхъ, определяемыхъ уравненіемъ $y^{m+n} = p^m x^n$, то нашли бы

$$\int y dx = \int p^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}} dx = \frac{p^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}+1}}{\frac{n}{m+n}+1} + C \\ = \frac{m+n}{m+2n} py + C.$$

Принимая начало площади при вершинѣ параболы, будемъ $C = 0$; слѣдовательно

$$\int y dx = \frac{m+n}{m+2n} py.$$

Для *Аполлоніевой* параболы, определяемой уравненіемъ $y^2 = px$, имѣемъ $m = 2$, $n = 1$, почему площадь ея равна $\frac{2}{3}py$.

Что касается до *площади кривой поверхности*, то она определяется двойнымъ интеграломъ

$$\iint dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}, \text{ гдѣ } x, y, z, \text{ изображають}$$

прямолинейныя координаты поверхности, а $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$ частныя производныя перехъной зависимости z , относительно x и y . См. QUADRATURE.

AIRES (PRINCIPE DE LA CONSERVATION DES). (Мех.) **НАЧАЛО СОХРАНЕНІЯ ПЛОЩАДЕЙ.** Смол. DYNAMIQUE.

AIRES (LOI DES). (Мех.) **ЗАКОНЪ ПЛОЩАДЕЙ.** Смол. KEPLER (LOIS DE).

AIROMÉTRIE. **АЭРОМЕТРІЯ.** См. AÉROMÉTRIE.

AISSIEU. (Мех.) **ОСЬ.** — **ВЕРЕТЕНО.** Это слово рѣдко употребляется. Смол. AXE.

AJOUTTER. (Арв.) **ПРИДАТЬ, ПРИЛОЖИТЬ, ПРИБАВИТЬ.**

AJUTAGE или **AJUTOIR.** (Гидрод.) **НАСАДКА, ВОРОНКА.** Такъ называется мешалоческая трубка, имѣющая обыкновенно видъ цилиндра, или усѣченнаго конуса. Дабы вода могла истекать, или бить вверхъ при устройствѣ водомотовъ, насадка привинчивается къ водопроводной трубѣ. Количество воды, доставляемое насадкою, почти пропорціонально произведенію площади ея сѣченія на квадратный корень изъ высоты уровня воды въ водохранилищѣ надъ сею самою насадкою. Смол. CONTRACTION DE LA VEINE FLUIDE.

ALBERT (PRINCE DE D'). (Мок.) **Д'АЛАМ-БЕРТОВО НАЧАЛО.** Смоч. DYNAMIQUE.

ALGÈBRE; ALGÈBRE. не упот. Смоч. ALGÈBRE.

ALGÈBRE. АЛГЕБРА. Алгебру обыкновенно определяют наукою о величинах вообще; но это определение принадлежит всему числовому Аналізу, между тѣмъ какъ Алгебра есть только отрасль сего послѣдняго; и такъ надлежитъ къ этому определению прибавить, въ чемъ состоитъ отличительное различіе между Алгеброю и прочими частями Анализа. Математическій Анализъ можно раздѣлить на три части: 1) *Алгебра*, включающая въ себя *Арифметику*. 2) *Теорія Чиселъ* и 3) *Интегральное исчисленіе или Трансцендентный Анализъ*. Алгебра и Интегральное исчисленіе объясняютъ сущность различныхъ дѣйствій, производимыхъ надъ числами; Теорія Чиселъ или трансцендентная Арифметика занимается свойствомъ чиселъ. Впрочемъ, мы не выдаемъ сіе различіе за безусловное, ибо, Теорія Чиселъ и прочія отрасли Анализа занимающіяся одніи одніи другими, почему весьма трудно, а можетъ быть и невозможно, опредѣлить съ точностію то, что принадлежитъ собственно къ Теоріи Чиселъ, и что входитъ въ область другихъ частей Анализа.

Всѣ дѣйствія надъ числами могутъ быть приведены къ шести слѣдующимъ: *сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, извлеченіе корней и рѣшеніе составныхъ уравненій*. Смоч. ARITH-MÉTIQUE. Производя сіи дѣйствія надъ числами, получаемъ другія числа, которые называются *функциями* первыхъ. Случается, что сказанныя дѣйствія должны быть повторены неограниченное число разъ; тогда, происходящее отъ сего число или функція именуется *трансцендентною*, и ученіе о ея свойствахъ принадлежитъ интегральному анализу. Но если число дѣйствій, которыми слѣдуетъ подвергнуть число, будетъ ограниченное, какъ бы оно впрочемъ велико не было, то функція называется *алгебраическою*, и изслѣдованіе ея свойствъ относится къ Алгебрѣ. И такъ, можно опредѣлить Алгебру, наукою о величинахъ вообще, когда подвергаютъ ихъ дѣйствіямъ алгебраическимъ. Замѣнимъ, что это опредѣленіе не заключаетъ въ себя ничего крутого; ибо, употребляя въ немъ реченіе *дѣйствія алгебраическія*, мы имѣемъ только въ виду сокра-

щеніе рѣчи, а выше объяснили, что подъ сими наименованіемъ разумѣемъ ограниченное число дѣйствій, составленныхъ изъ сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, извлеченія корней и рѣшенія уравненій.

Основныя начала Алгебры почерпнуты изъ Математики; алгебристы, для избѣжанія всякой невразумительности, болѣею частію не озабочиваются изслѣдованіемъ снособа, которыми приобращаются понятія о числахъ. Нѣтъ сомнѣнія, что эти понятія существуютъ, и что они основаны на дѣйствительности; первое дѣло алгебриста усвоить ихъ и выразить въ надлежащемъ видѣ. Первоначальныя дѣйствія надъ числами рождаются изъ понятій нашихъ о величинахъ, и съ сими понятіями сопряжено свойство величинъ, по которому онѣ могутъ соединяться и разлагаться. Отсюда происходятъ непосредственно сложеніе и вычитаніе; что касается до умноженія и дѣленія, то они выводятся изъ послѣднихъ двухъ, послѣ чего, самыми естественнымъ образомъ, получающіеся окончательныя два дѣйствія: извлеченіе корней и рѣшеніе численныхъ уравненій.

Положимъ, что какое либо дѣйствіе, производимое надъ двумя величинами a и b , доставляетъ притѣмъ величину c ; можно предложить себѣ вопросъ (что дѣйствительно и выяснитъ), посредствомъ какого дѣйствія, полагая b и c известными, опредѣляется a ? Или, по известнымъ a и c , какъ найти b ? И такъ, изъ допущеннаго дѣйствія, происходятъ другія.

Когда дѣйствія приводились къ неравнѣмъ членамъ, то происходящія отъ сего функція называются *раціональными*. Алгебра занимается ими прежде другихъ, по причинѣ ихъ простоты. Простейшія же изъ нихъ суть тѣ, въ которыя не входитъ дѣленіе; ихъ называютъ *функциями цѣлыми*. Но если надобно извлекать корни или рѣшать уравненія, то получаемая функція именуется *ирраціональною*. Чѣмъ всего, величина такой функція, по даннымъ значеніямъ переменныхъ, не можетъ быть выведена иначе, какъ по приближенію; мы говоримъ *гдѣ всего* для того только, чтобы распространить послѣднее опредѣленіе на случай функцій раціональныхъ, но предсказывающихся въ ирраціональномъ видѣ. Что касается до функцій чисто ирраціональныхъ, то ихъ точныя величины ни въ какомъ случаѣ по-

лучены были не могутъ; но есть положительныя правды, посредствомъ которыхъ приближались къ нимъ до какой угодно степени. Смѣт. статьи FONCTION, APPROCHÉE (VALEUR). Кроме сихъ величинъ, о которыхъ мы не имѣемъ совершенно-полнаго понятія, вводимъ еще въ Алгебру количества, вовсе не существующія, и которыя по этому именуются *минимыми*. Впрочемъ, всѣ минимы количества, разсматриваемыя Алгеброю, приводятся къ одному такому свойству, что квадратъ его равенъ — 1. И такъ, мы имѣемъ о квадратѣ весьма ясное понятіе, между тѣмъ какъ самое количество вовсе не существуетъ. Замѣтимъ, что алгебристы заслуживающаго нареканіе за введенный ими знакъ $\sqrt{-1}$, которыми они изображаютъ минимое количество. Этотъ знакъ привнесъ существовавшее-возможному дѣйствию, а въ настоящемъ случаѣ, нѣтъ возможности произвести обозначаемое имъ извлеченіе. Мы думаемъ, что гораздо бы лучше было замѣнить знакъ $\sqrt{-1}$, какою либо буквою, напримѣръ, буквою *i*, разумѣя подъ нею несуществующее количество, коего квадратъ равенъ отрицательной единицѣ. Въ разсужденіи пользы и употребленія минимыхъ выраженій, мы отсылаемъ къ примѣчанію объ Алгебрѣ. Смѣт. также въ эпюхъ Лексиконъ статью IMAGINAIRE.

Мнѣніемъ было бы входить въ большія подробности относительно сущности Алгебры; теперь предпримемъ кратчайшимъ образомъ историческій очеркъ успѣховъ этой науки.

Слово *Алгебра*, производящее нѣкоторые отъ собственнаго имени *Геберъ*, знаменитаго Арабскаго философа, будто бы изобрѣтшаго сію науку. Есть еще другія этимологіи; но всѣ онѣ болѣе или менѣе неправдоподобны. Этимологія, приводимая Италіанцемъ *Лукою де Бурго*, который одинъ изъ первыхъ записался Алгеброю въ Италіи, заслуживаетъ, по мнѣнію *Монтюкка*, наиболѣе довѣрія. Италіанскій писатель производить названіе этой науки отъ арабскаго: *algebra o' al-tisabala*; подъ соединеніемъ сихъ двухъ словъ, Аравіянѣ именно разумѣли то, что впоследствии на Востокъ названо *Алгеброю*. Лука де Бурго переводитъ эти два слова: *restauratio et opus ibi*, то есть: *возстановленіе и противуположеніе*. Последнее слово выражаетъ довольно удачно одно изъ главныхъ дѣйствій Алгебры, и-

менно, составленіе *уравненій*, которыхъ дѣйствительно получаемъ какъ бы чрезъ *противуположеніе* для *сравненія* величинъ. Что касается до слова *возстановленіе*, то трудно объяснить, какое оно имѣетъ отношеніе къ Алгебрѣ; въ сѣдѣ гадки остаются неудовлетворительными. По этой самой причинѣ нѣкоторые Италіанцы называли Алгебру *Алмукабала*; извѣстный *Кардани*, въ нѣкоторыхъ своихъ сочиненіяхъ, употребилъ это самое названіе. Какъ бы то ни было, но теперь наименованіе: *Алгебра* принято всѣми Математиками.

Нѣкоторые приписываютъ изобрѣтеніе Алгебры Аравіянцамъ; но болѣею частію думаютъ, что ея открытіе принадлежитъ Грекамъ, ибо Греческій философъ *Диофантъ* первый писалъ объ этой наукѣ; см. INDÉTERMINÉE (ANALYSE). Онъ написалъ объ ней 15 книгъ, изъ числа которыхъ осталось только 8. *Жиландеръ* первый издалъ ихъ въ 1575 году. Въ послѣдствіи, онѣ были исправлены и дополнены комментаріями члена Французской Академіи *Башети-де-Мезириаконъ*, а позже, извѣстнымъ *Ферматомъ*.

Леонардъ Бонаци, изъ Пизы, возвращаясь изъ путешествія по Греціи и Азіи, написалъ, около 1150 года, первый трактатъ объ Алгебрѣ на Западѣ. Сочиненіе о той же наукѣ *Луки де Бурго*, о которомъ упоминаемо выше, было издано въ Венеціи въ 1494 году. Вотъ собственно тѣ, которыми одолжена Европа введеніемъ Алгебры. И послѣ нихъ, до времени *Віета*, Италія была такъ сказать, рассадникомъ знаменитыхъ Алгебристовъ. *Сципионъ Феррари*, по свидѣтельству *Кардана*, открылъ первый рѣшеніе частнаго случая уравненій 5-й степени. *Тарталеа* или *Тарталья*, съ своей стороны, нашелъ полное рѣшеніе ихъ; Смѣт. CARDAN. *Кардани*, *Рафаэль Бомбелли* [Смѣт. BIQUADRATIQUE (ÉQUATION)] способствовали распространенію сего открытія. *Лудовикъ Феррари* изобрѣлъ способъ для рѣшенія уравненій 4-й степени. Конечно, въ настоящемъ состояніи Алгебры, всѣ эти открытія должны казаться весьма маловажными; но если примемъ въ соображеніе ограниченность средствъ только-что рождающейся науки, то не можемъ отрицать въ гевіи Италіанскихъ Алгебристахъ

Во второй половине XVI века, знаменитый *Viete*, которому по справедливости гордились Франция, усовершенствовал знаменитое открытие, и сделал в этой науке важные открытия. Он первый ввел буквы для изображения величин известных, показал составление коэффициентов в алгебраических уравнениях, различия преобразований сих уравнений относительно их корней, и предложил новый остроумный способ для решения уравнений 3-й и 4-й степени. Он же придумал способ для решения, по приближению, численных уравнений какой ни есть степени. Способ сей имеет большое сходство с тем, который употребляется при извлечении корней из многочленных чисел.

После Виета, Алгебра получила значительный приращение от трудов *Guppioma (Harriot)*, *Уэстредда (Oughtred)*, *Валлиса (Wallis)* и некоторых других.

Декарт, положивший основание Аналитической Геометрии, также извещает своими исследованиями в чистой Алгебре. И ныне еще, во всех курсах, находим открытое им *правило знаков*. СМОН. DÉCARTE'S (RÈGLE DES SIGNES DE).

Нютон обогатил также Алгебру многими открытиями, большою частью помеченными в его *Arithmetica Universalis*. *Разложение exponents дуги* *последовательных* для приближения к корням алгебраических уравнений и *Аналитический параллелограмм* суть самые примечательныя. СМОН. BINOME DE NEWTON, APPROCHÉE (VALEUR), PARALLELOGRAMME ANALYTIQUE.

После Ньютона занимались с большим или меньшим успехом алгебраические теории *Алберт Жирардс*, *Гуддс (Hudde)* из Амстердама, *Де Гуа*, *De Gua*, *Ролл* [СМОН. CASCADES (METHODE DES)], *Фонтен* и некоторые другие.

Эйлер извещил вид всех математических наук. До сего великого Геометра, Алгебра была сборником способов численных и аналитических. Он углубился в свойства функций алгебраических, употребляя один анализ, и дал Алгебре и вообще всему математическому анализу широкую вид, в котором они теперь представляются. Конечно, анализ обогатился после Эй-

лера многими открытиями: но сие отразилось столько обязана его трудами, что некоторые математик присвоили ей название *Эйлерова анализа*. Эйлер положил основание настоящей теории уравнений; он доказал весьма важное предложение, состоящее в том, что всякое уравнение может разложиться на вещественные множители 1-й и 2-й степени. СМОН. FASTEUR. Одним словом, он указал математикам путь к дальнейшему распространению всех теорий алгебраических. Сам знаменитый Лагранж сознался, что он только усовершенствовал теорию Эйлера. Но прежде, нежели будем говорить о трудах Лагранжа, мы должны сказать, что современники Эйлера, *Даниил Бернулли*, *Ж'Аламберт* и *Клеро* оказали также более или менее важные услуги алгебраическому анализу. Первый из них предложил способ для разыскания по приближению корней уравнений [СМОН. APPROCHÉE (VALEUR)]; второй, своими исследованиями о рядах и о свойствах минимых чисел, а третий, способами исключений неизвестных между несколькими уравнениями. Мы не перейдем молчанием трудов *Безу*, *Уиргауза*, *Варинга* и *Вандермонда*, которые занимались общими решениями уравнений какой ни есть степени; они предлагали на сей конец разные остроумные приемы, которые могут быть полезны в других случаях, но не достигают предполагаемой цели; их попытки привели только к новым способам решения уравнений 3-й и 4-й степени. Впрочем надобно исключить Вандермонда, который решил уравнение $x^{11} - 1 = 0$, или, происходящее от него уравнение 5-й степени:

$$x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 5x + 1 = 0.$$

Лагранж написал подробное сочинение о решении численных уравнений: *Traité de la résolution des équations numériques*. Он предлагает в нем, для решения сей задачи, способ странный и не подлежащий никакому исключению; он основан на составлении уравнения в квадратах разностей корней и на свойствах непрерывных дробей; но этот способ, по причине чрезвычайной сложности численных выкладок, употребляемых им, когда степень рассужаемого уравнения несколько возвышена, почти не может быть употребляем. СМОН. CARRÉS (EQUA-

TION AUX — DES DIFFÉRENCES). Лагранж также усовершенствовал теорию алгебраических иррациональных выражений; исследования его о функциях степенных и подобообразных (fonctions semblables) могут служить на ряду с превосходнейшими алгебраическими умозрениями.

Фурье, умерший в 1830 году, занимался с полным успехом решением численных уравнений; труды его по сему предмету собраны и в сочинении под заглавием *Analyse des équations déterminées*. Алгебра обязана сему знаменитому математическому способу легким и удобоприменимым ко всякому численному уравнению. Наконец, Г-н Штурм *) предложил превосходную теорему для определения числа вещественных корней и определения их в каком нибудь алгебраическом уравнении; в теоретическом отношении эта теорема в полной мере удовлетворительна, и, руководствуясь ею, мы всегда можем путем дознания найти и в каком нибудь случае, надобно отдать преимущество способу Фурье; потому способ этот и сопряжен с неудобностию последовательных подстановлений (tatonnements), но, не смотря на то, вообще скорее ведет к решению задачи. Смол. STURM (THEOREME DE).

Упомянем наконец о примечательном труде знаменитого Норвежского математика Абеля, умершего в 1829 году. Мы говорим об неоспоримом доказательстве того предложения, что алгебраические уравнения, выше 4-й степени, не могут быть решены посредством коренных знаков, или, иначе, что общее решение уравнений степени, превышающих четвертую, не может быть приведено к извлечению корней. Это доказательство было напечатано на Немецком языке в *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, изд. М. В. Стелле, и важность его неоспорима, когда применяешь в соображение то обстоятельство, что многие первостепенные математики думали прежде, что решение уравнений

всех степеней возможно посредством радикалов.

Мы говорили в этой статье много о тех открытиях новейших математиков, о которых не будем иметь случая упомянуть в другом месте; читатели найдут в некоторых изданиях о трудах Гаусса и Адела в статье: BINOMES (ÉQUATIONS).

Окончим эту статью некоторыми показателями о знаменитостях, бывших в употреблении у прежних алгебристов.

Диофант, первый писавший об Алгебре, употреблял следующие знаки: неизвестную малую величину он означал чрез *αι*; ее квадрат, изъятый им *δύναμις*, чрез *δ'*; кубъ (*κῦβος*), чрез *κ'*; четвертую степень или биквадратъ (*διὰ quadratum*), чрез *δδ'*; пятую степень, чрез *δδκ* и проч. Определенные числа изображал Диофант знаками *ιθ*, от слова *μονάς*, единица. Что касается до знаков сложения и вычитания, то, для обозначения второго действия, он употреблял знак *ϑ*, то есть, опрокинутую испорченную букву *ψ*, от *λείψις*, недостаток. Для сложения не было особенного знака, и его означал простым соединением согласных чисел.

Древнейшие из Германских алгебристов были Христофор Рудольфс и Михаил Штифель; первый из них напечатал в 1522 году на Немецком языке Алгебру под заглавием: *Die Cosse*; второй издал в 1553 эту самую Алгебру со многими улучшениями и прибавлениями; он также известен собственным сочинением *Arithmetica integra*. Рудольфс и Штифель ввели употребляемые до ныне знаки $+$ и $-$. В Италіи же, по знаменитости Луки Пачиоло, употребляли вместо $+$, букву *p.* (*plus*), а вместо $-$, букву *m.* (*meno*); те же Германские алгебристы ввели коренной знак $\sqrt{\quad}$; равенство они изображали точкою; впоследствии Декарт употребил знак ∞ , а Английский математик Рекорд в 1557 году ввел ныне всех принятый знак $=$. И такъ, уравнение $80 = 6 + 3x$ изображалось:

по Рудольфу и Штифелю $80 . 6 + 3x$,
по Декарту $80 \infty 6 + 3x$.

В Голландии и Нидерландах также занимался Алгеброю многие математики. Один из лучших был Стевин, коего Алгебра была в

*) Императорская Академія Наукъ, в публичное заседание 8-го Декабря 1834 года, присудила сочиненію Г-на Штурма, под заглавіемъ: *Memoire sur la resolution des équations numériques*, большую золотую медаль в 8000 франковъ. Въ этомъ же году, сочинитель доказывалъ теорему, о которой мы упоминаемъ.

первый раз напечатана въ концѣ XVI-го вѣка. Знакоположеніе, введенное имъ и принятное тогда его соотечественниками, состояло въ слѣдующемъ: неизвѣстную величину онъ изображалъ знакомъ \odot : квадраты этой неизвѣстной, знакомъ \otimes ; кубъ \ominus , и такъ далѣе.

Изъ лучшихъ сочиненій по части Алгебры, мы укажемъ преимущественно на слѣдующія:

Arithmetica universalis, 1707 года, соч. Ньютона.

Алгебра Леонарда Эйлера, изданная на Нѣмецкомъ языкѣ, переведенная на Французскій, Русскій и другіе языки. На Франц. языкѣ Алгебра Эйлера издана съ прибавленіями Лагранжа.

Resolution des équations numériques, par Lagrange. 1-ое изд. 1798, 2-ое, послѣднее, 1808 и 3-е 1826 г.

Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique, 1-ère Partie. Analyse Algébrique; par A. L. Cauchy 1821.

Analyse des équations déterminées, 1831; par Fourier.

Ohm, Dr. Martin; Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik. Berlin 1828 — 1833.

Семь нотовъ; въ первыхъ двухъ *Арифметика и алгебраическій анализъ*.

Ide, Dr. J. J. A. *Anfangsgründe der Mathematik*. Berlin 1803. Два тома; первый заключающій въ себя *Алгебру*.

Grünert. *Jahrbuch der allgemeinen Arithmetik*, 1832.

Egen. *Allgemeine Arithmetik und Algebra*.

Drobisch. *Grundzüge der Lehre von den höhern numerischen Gleichungen*.

На Русскомъ языкѣ: *Алгебра Осиповскаго* и нѣкоторые переводные курсы, какъ то: *Лакруа*, *Лефевра де Фурси*, *Бурдона* и проч.

ALGÈBRE NUMÉRIQUE или **VULGAIRE**. Численная алгебра, въ которой извѣстныя количества изображаются числами, а неизвѣстныя, буквами.

ALGÈBRE LITTÉRALE или **SPECIÈLE**. Буквенная алгебра, въ которой извѣстныя и неизвѣстныя величины изображаются буквами.

Такое раздѣленіе Алгебры вышло нынѣ изъ употребленія.

ALGÈBRE ALGÈBRE, къ Алгебра относящійся. *Analyse algébrique*, *алгебраическій анализъ*, то же что Алгебра.

COURBES ALGÈBRIQUES. Алгебраическія кривыя, то есть, кривыя, которыя опредѣляются алгебраическими уравненіями, напримѣръ: *коническія сеченія*, *циклоида*, *конхоида* и проч. Смол. **COURBE**.

SOMME ALGÈBRE. Алгебраическая сумма, Агрегатъ.

Алгебраическою суммою или *агрегатомъ* количества называется совокупность всѣхъ сихъ количествъ, связанныхъ съ отношеніемъ передъ ними знаками. Такъ напримѣръ: алгебраическая сумма количествъ:

$$+6, +2a, -5a, +8a^2, -5a^2, +a^3, \text{будетъ:} \\ 6 - 3a + 3a^2 + a^3.$$

ALGÈBRISTE. АЛГЕБРИСТЪ. Человекъ свѣдущій въ Алгебру.

ALGORISME. АЛГОРИЗМЪ. Практическое употребленіе различныхъ частей Алгебры.

ALGORITHME или **NOTATION**. АЛГОРИЗМЪ, **ЗНАКОПОЛОЖЕНІЕ**, **ОБОЗНАЧЕНІЕ**. Совокупность знаковъ, употребляемыхъ въ какомъ либо исчисленіи. *Algorithme des fonctions dérivées*, *знакоположеніе производимыхъ функций*. *Algorithme du calcul intégral*, *знакоположеніе интегрального исчисленія*. Удобное, удачное, сложное, неудачное *знакоположеніе*. — Нѣкоторые авторы, преимущественно Испанскіе, употребляли слово *алгоритмъ* для означенія практической части Алгебры. — Подъ сими самыми наименованіемъ разумѣли также искусство производимыхъ выкладки посредствомъ первыхъ четырехъ арифметическихъ дѣйствій, то есть: сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія.

ALGORITHME. АЛГОРИЗМЪ. Такъ называется Г-нъ Вронскій, одну изъ отраслей чистой математики, именно ту, которая занимается числами. Мы описываемъ читателей къ сочиненію Г-на Вронскаго: *Philosophie de la Technie*.

ALICHONS. (Mex.) Смол. **ALUCHONS**.

ALIDADE или **ALNIDADE**. (Практ. Геом.) **АЛИДАДА**. Такъ называется неметрическая линейка (обыкновенно желтая), обращающаяся около оси какого либо угломернаго инструмента; на концѣхъ ея привѣшены дюплетры, сквозь которые смотрятъ на предметы. Концы алидады также снабжены во многихъ инструментахъ *верньерами*, а въ иныхъ, только указателями, которые показываютъ число градусовъ измѣряемаго угла. Алидада очень похожа на *Ахтиметръ* (черт. 5, т. 1); только она не имѣетъ квадратишковъ *a* и *b*, принадлежащихъ къ ахтиметру. — Алидада употребляется также и безъ угломернаго инструмента,

когда производится съёмка посредством менсуре; Смощ. PLANCHETTE.

ALIGNEMENT. (Практ. Геом.) **РАЗВЕХОВАНИЕ;** проведение прямой линии на земле посредством вышек, которыми сшивались въ некоторомъ одну ось другой разстояніи шпакъ, чтобы онъ покрывал друг друга.

ALIQUEANTE (PARTIE). (Ариф.) **НЕДѢЛИТЕЛЬ, НЕДѢЛЯЩЕЕ ЧИСЛО.** Напримеръ: 6 есть недѣлятель числа 14, ибо, по раздѣленіи 14 на 6, имѣемъ въ остаткѣ 2.

ALIQUEOTE (PARTIE). (Ариф.) **ДѢЛИТЕЛЬ, ДѢЛЯЩЕЕ ЧИСЛО,** то есть такое, которое дѣлитъ на-цѣло данное число. Такъ напримеръ, 5 есть дѣлятель 15, ибо, раздѣливъ 15 на 5, получаемъ въ частномъ цѣлое число 3.

ALIQUEOTE COMMUNE. Овній дѣлитель. См. DIVISEUR COMMUN.

ALIQUEOTES RATIONELLES. Пропорціональные дѣлители, которые пропорціональны соотвѣстственнымъ своимъ числамъ. И шпакъ, 4 и 6 будутъ пропорціональными дѣлителями чиселъ 16 и 24, ибо имѣемъ пропорцію: $4:16 = 6:24$.

ALLONGEMENT. (Мех.) **УДЛИННЕНИЕ.** Allongement insensible, нечувствительное, весьма малое удлиннение. Allongements possibles, возможные удлиннения.

ALLONGER (S'). **УДЛИННИТЬСЯ.** Cette corde est susceptible de s'allonger; эта веревка способна, можетъ удлинниться.

ALLIAGE (RÈGLE D'). (Алг.) **ПРАВИЛО СМѢШЕНИЯ.** Такъ называется правило, посредствомъ котораго рѣшаются слѣдующія двѣ общія задачи:

I. По даннымъ цѣнамъ и количествамъ составныхъ веществъ, опредѣлить цѣну единичнаго количества смеси.

II. По даннымъ цѣнѣ и количеству смеси, а также и цѣнѣ составныхъ веществъ, найти количество каждаго изъ нихъ.

Задача, принадлежащая первому случаю, рѣшается посредствомъ прямого правила смѣшенія (règle d'alliage directe); рѣшеніе второго случая относится къ обратному правилу смѣшенія (règle d'alliage inverse).

I-й случай. Пусть будутъ a, a', a'', \dots количества какихъ либо веществъ, а p, p', p'', \dots

цѣны единичныхъ количествъ шпакъ же веществъ. Спрашивается цѣна единичнаго количества смеси?

Очевидно, что сумма произведеній $ap + a'p' + a''p'' + \dots$ изобразитъ цѣну всей смеси; чтобы получить цѣну x единичнаго количества, надобно предыдущую сумму раздѣлить на полное количество смеси, то есть на $a + a' + a'' + \dots$. И шпакъ

$$x = \frac{ap + a'p' + a''p'' + \dots}{a + a' + a'' + \dots}$$

Примѣръ. Смѣшиваютъ три сорта чаю, именно: 10 фунтовъ 15-ти рублеваго, 14 фунтовъ 12-ти рублеваго и 2 фунта 10-ти рублеваго. Спрашивается, сколько будетъ стоить фунтъ смеси?

Здѣсь $a = 10, a' = 14, a'' = 2; p = 15, p' = 12, p'' = 10$. Следовательно

$$x = \frac{10 \cdot 15 + 14 \cdot 12 + 2 \cdot 10}{10 + 14 + 2} = 15 \text{ рублемъ.}$$

II-ой случай. Пусть будетъ m извѣстная цѣна единичнаго количества смеси, A ея количество, p, p', p'', \dots извѣстныя цѣны составныхъ веществъ. Спрашивается количество каждаго вещества, предполагая извѣстнымъ число сихъ послѣднихъ.

Изобразивъ чрезъ x, y, z, \dots количества составныхъ веществъ, получимъ, какъ и выше, уравненіе

$$m = \frac{px + py + pz + \dots}{A}$$

откуда

$$px + py + pz + \dots = mA;$$

сверхъ того, по условію задачи, имѣемъ:

$$x + y + z + \dots = A.$$

И шпакъ получаемъ два уравненія для опредѣленія неизвѣстныхъ x, y, z, \dots . Если ихъ будетъ болѣе двухъ, то задача останется неопредѣленною. Смощ. INDETERMINE. Въ случаѣ двухъ смѣшиваемыхъ веществъ, предыдущія уравненія приводятся къ слѣдующимъ:

$$px + py = mA, \quad x + y = A,$$

изъ которыхъ выводимъ:

$$x = \frac{(m-p')A}{p-p'}, \quad y = \frac{(p-m)A}{p-p'}.$$

Примѣръ. Желаютъ составить 28 фунтовъ смеси изъ двухъ сортовъ чаю, одного по 16 рублей за фунтъ, а другого по 9 рублей, шпакъ, чтобы фунтъ смеси обходился по 15 рублей. Спрашивается, сколько надобно взять фунтовъ чаю 1-го сорта, и сколько 2-го?

Изобразимъ чрезъ x число x уншова 1-го сорта чашо, чрезъ y , 2-го сорта; такъ какъ $m = 15$, $A = 28$, $p = 16$, $p' = 9$, то получимъ:

$$x = \frac{(15-9)28}{16-9} = 24 \text{ унш. } y = \frac{(16-15)28}{16-9} = 4 \text{ унш.}$$

Хотя обыкновенно *правило смѣшенія* включается въ Арифметику, но намъ кажется, что лучше отнести его къ Алгебрѣ, гдѣ болѣе, что часто встрѣчаются задачи неопредѣленныя, какъ мы это замѣтили выше. Описываетъ чаша-мѣра къ сша-мѣрамъ: CARRÉS (METHODE DES MOINDRES), MOYENNE, и GRAVITÉ (CENTRE DE). Сличалъ между собою изложенные въ нихъ способы, онъ усмотрѣлъ большое сходство съ ирскими правилами смѣшенія.

ALMAGESTE. АЛМАГЕСТЪ. Знаменитое сочиненіе объ Астрономіи *Птолемея*, философа Александрийской школы. Въ Латинскомъ переводѣ, оно извѣстно подъ заглавіемъ: *Almagesti seu magnae compositionis opus*. Твореніе это раздѣлено на 13 книгъ, заключающихъ въ себя всѣ нруды, наблюденія и теоріи предшествовавшихъ Птолемею астрономовъ, а также и его собственные изслѣдованія. Алмагестъ есть древнѣйшее изъ всѣхъ извѣстныхъ намъ сочиненій объ Астрономіи; оно было написано Птолемеємъ около 140 года по Р. X.

ALMANACH. АЛМАНАХЪ; по жс, типю *Calendary*, развѣ только съ нѣмъ различіемъ, что въ Алманахѣ, сверхъ астрономическихъ показаній, помещались обыкновенно разныя предсказанія о погодѣ, нк на чемъ не основанныя. См. CALENDARIFR.

ALONGÉ или RALONGÉ. ПРОДОЛГОВАТЫЙ. Вообще въ Геометріи разужаютъ подъ снмъ названіемъ такіа фигуры или тѣла, коихъ пропнженія въ длину превосходятъ остальные пропнженія. Въ этомъ смыслѣ говорятъ: *продолговатый шестигуольникъ, осьмигуольникъ, эллипсъ, сфероидъ* и проч. *Продолговатую цилиндру* (*cylindre ralongé*) называютъ шакал, коей основаніе болѣе окружности круга проваждающаго.

ALPHABET. АЛФАВИТЪ. Такъ какъ Греческіа буквы весьма часто употребляются въ Анализѣ, то мы приведемъ здѣсь весь алфавитъ, съ названіемъ буквъ на Французскомъ и Русскомъ языкахъ:

<i>Aa</i> , Alpha, Альфа.	<i>Nz</i> , Nu, Нью.
<i>Bβ</i> , Bêta, Бета.	<i>Ξξ</i> , Xi, Кси.
<i>Γγ</i> , Gamma, Гамма.	<i>Οο</i> , Omicron, Омикронъ.
<i>Δδ</i> , Delta, Дельта.	<i>Ππ</i> , Pi, Пи.
<i>Εε</i> , Epsilon, Эпсилонъ.	<i>Ρρ</i> , Rho, Ро.
<i>Ζζ</i> , Zêta, Зета.	<i>Σσς</i> , Sigma, Сигма.
<i>Ηη</i> , Êta, Эта.	<i>Ττ</i> , Tau, Тау.
<i>Θθ</i> , Thêta, Тета.	<i>Υυ</i> , Upsilon, Ипсилонъ.
<i>Ιι</i> , Iota, Иота.	<i>Φφ</i> , Phi, Фи.
<i>Κκ</i> , Kappa, Каппа.	<i>Χχ</i> , Chi, Хи.
<i>Λλ</i> , Lambda, Ламбда.	<i>Ψψ</i> , Psi, Пси.
<i>Μμ</i> , Mu, Мю.	<i>Ωω</i> , Omêga, Омега.

ALPHONSINES (TABLES). АЛЪФОНСОВЫ ТАБЛИЦЫ. Такъ называются астрономическіа таблицы, составленныя по повелѣнію *Алифронса X*, Короля Кастильскаго, прозваннаго *Мудрымъ*. Таблицы снй, надъ составленіемъ которыхъ трудился многіа астрономы, были окончены въ 1252 году. Въ первый разъ онѣ были напечатаны въ Венеціи, 1485 года.

ALTERNANDO. (Арно.) ПЕРЕСТАНОВКА среднихъ членовъ въ Геометрической пропорціи. См. ALTERNE (PROPORTION).

ALTERNATIF (MOUVEMENT). (Мех.) ПОПЕРЕМЪННОЕ ДВИЖЕНІЕ. См. ELÉMENTAIRES (MACHINES).

ALTERNATIVEMENT. ПОПЕРЕМЪННО. *Les termes de cette serie sont alternativement positifs et négatifs. члны этого ряда попеременно положительныа и отрицательныа.*

ALTERNATION или PERMUTATION. ПЕРЕСТАНОВЛЕНІЕ, ПЕРЕМЪЩЕНІЕ, ПЕРЕЛОЖЕНІЕ. Различныя перемѣны, происходящія отъ послѣдовательнаго перестановленія буквъ. Напримеръ, три буквы *a, b, c* допускаютъ 6 различныхъ перестановленій, именно: *abc, acb, bac, bca, cab, cba*. Вообще, если имѣемъ *m* буквъ, то число переложеній выразишся произведеіемъ *1.2.3...m*. И такъ, четыре вещи перестанавливаются 24 образами; пять вещей 120-ю; шесть 720-ю и такъ далѣе. — *Попеременность*.

ALTERNATION, CHANGEMENT или употребительнѣе VARIATION DE SIGNÉ. (Алт.) ПЕРЕМЪНА ЗНАКОВЪ. Отъ $+$ къ $-$, и отъ $-$ къ $+$. Напримеръ, въ уравненіи $x^3 - 2x^4 - x^3 + x^2 - 7x + 1 = 0$ имѣемъ *четыре перемены знаковъ*, именно: отъ $+$ x^3 къ $- 2x^4$, отъ $- x^3$ къ $+$ x^2 , отъ

$+x^2$ къ $-7x$, и онъ $-7x$ къ $+1$. Когда два члена имеютъ одинакие знаки, то такой порядокъ называютъ *повтореніемъ* или *последовательностію знаковъ* (*permanence de signe*). И такъ, въ предыдущемъ уравненіи члены $-2x^4$ и $-x^5$ составляютъ одно повторение знаковъ. Смол. DECARTE (RÈGLE DES SIGNES DE).

ALTERNE (PROPORTION). (Арх.) Пропорція, происходящая отъ перестановленія среднихъ членовъ. Когда въ геометрической пропорціи $a:b::c:d$ переставимъ средніе члены, то получаемъ другую $a:c::b:d$, которая, въ отношеніи къ первой, называется *пропорціею съ переставленными средними членами*. Такую перестановку называютъ иногда *Alternando*. Смол. PROPORTION.

ALTERNÉE (FONCTION). (Англ.) **ЗНАКОПЕРЕМѢННОЮ ФУНКЦІЕЮ** нѣсколькихъ количествъ называется такое выраженіе, которое, при перемѣнѣ одного изъ сихъ самыхъ количествъ на другое, перемѣняется только знакомъ, но не измѣняется въ своей величинѣ. Для примѣра знакопеременныхъ функций съ двумя количествами можно привести слѣдующія выраженія:

$$y - z, (y^3 - x^3), (z + y - 1), \log \left(\frac{z}{y} \right);$$

произведеніе $(y - z)(z - y)(z - y)$ есть знакопеременная функция съ тремя количествами; вообще $(y - x)(z - y)(z - y)(z - y)(z - y)(z - y) \dots$ будетъ такого же рода функция съ переменными x, y, z, y, \dots

Когда скоро извѣстна одна знакопеременная функция, то очень легко вывести и общій видъ этого рода выраженій. Дѣйствительно, такъ какъ $y - z$ принадлежитъ къ числу знакопеременныхъ функций, то, изобразивъ чрезъ $q(x, y)$ ихъ общій видъ, легко усмотрѣть, что отношеніе $\frac{q(x, y)}{y - x}$ должно быть симметрическою функциею измѣняемыхъ x и y . Слѣдовательно выраженіе

$$q(x, y) = (y - x)f(x, y),$$

гдѣ $f(x, y)$ означаетъ произвольную симметрическую функцию, есть общій видъ знакопеременныхъ функций съ двумя величинами. Замѣнивъ, что вѣторую часть предыдущаго уравненія можно замѣнить разностію $F(x, y) - F(y, x)$, разумѣя уже подъ F совершенно произвольную функцию.

Точно такимъ образомъ докажемъ, что знакопеременная функция съ тремя измѣняемыми выраженіемъ обобщитъ видомъ

$$q(x, y, z) = (y - x)(z - y)(z - y)f(x, y, z),$$

гдѣ $f(x, y, z)$, какъ и выше, изображаетъ симметрическую функцию переменныхъ x, y, z .

Разсматриваніе знакопеременныхъ функций бываетъ иногда полезно: въ Алгебрѣ, напримѣръ, уравненія первой степени со многими неизвѣстными рѣшаются весьма просто при пособіи этого рода выраженій.

ALTERNES (ANGLES). (Геом.) **ПРОТИВУПОЛОЖНЫЕ, ПЕРЕКРЕСТНЫЕ УГЛЫ.** Когда

два параллельныя линіи ED, GF (черп. 4, листъ 1) пересѣчены прямою HI , то сія послѣдняя составляетъ съ линіями ED, GF углы *внутренніе и оппозитные*. Углы ELM и FML , также DIJ и GML , по причинѣ взаимнаго ихъ положенія оппозительно сѣкущей и параллельныхъ линій, называются *внутренними противоположными* (*angles internes*), а углы ILD и GMI , также ILF и FMI — *внѣшними противоположными* (*alternes externes*).

ALTIMÈTRE. (Практич. Геом.) **АЛТИМЕТРЪ, ВЫСОТОМѢРЪ.** Инструментъ, служащій для измѣренія высотъ. Онъ состоитъ изъ мѣдной линейки AB (черп. 5, листъ 1) съ двумя вертикальными AF, BG , изъ которыхъ послѣдняя свободно двигается по линіи AB , оставаясь къ ней перпендикулярною. Вся при линейкѣ раздѣлена на равныя части, изображающія, напримѣръ, сажени съ подраздѣленіями. Пазы въ вертикальных линейкахъ служатъ для того, чтобы можно было поднимать и опускать по произволению два мѣднѣе квадратики a и b , съ круглыми отверстіями, сквозь которыя смотрятъ на измѣряемый предметъ.

Дабы объяснить употребленіе этого инструмента, положимъ, что на измѣряемому разстоянію IK (черп. 6, листъ 1) ищется высота KI . Для сего придвигаемъ линейку BC *Алтиметра* до дѣленія на AB , соотвѣтствующаго измѣренному разстоянію IK . Потомъ, установивъ инструментъ въ горизонтальномъ положеніи, и обративъ BC къ предмету KI , двигаемъ квадратики a и b до ихъ поръ, пока увидимъ сквозь ихъ отверстія вершину L . Очевидно, что разность дѣленій, указываемыхъ центрами обоихъ квадра-

пунктов, что есть *bc*. изобразить высоту точки *L* над точкою *c* или *a*. Придавъ къ этой высоте вертикальное разстояние казравника *a* отъ земли, получимъ исконую высоту *KL*.

ALTIMETRE, АЛТИМЕТРЪ, ВЫСОТОМЕРЪ.

Часть практической Геометріи, занимающаяся измѣреніемъ присущихъ и неприсущихъ высотъ. На сей конецъ употребляютъ разные способы, болѣе или менѣе точные, именнѣ: измѣряюща высоты посредствомъ колебъ и посредствомъ *Алтиметра* (См. предыдущую статью). Точнѣйшіе способы состоятъ въ тригонометрическихъ дѣйствіяхъ при пособіи углоизмѣрныхъ и другихъ инструментовъ и въ барометрическихъ измѣреніяхъ. См. *BAROMETRIQUE (FORMULE)*.

ALTITUDE (Геом.) **АЛТИТУДА, ВЫСОТА НАДЪ УРОВНЕМЪ МОРЯ.** *Altitude d'un point; высота точки надъ поверхностію моря.*

ALUSCHONS или **ALICHONS**. (Мех.) **ЗУБЬЯ, ПАЛЬЦЫ.** Въ большихъ колесахъ, на которыхъ являются зубья ощидько, сія послѣдніе называются *пальцами*. Въ зубчатыхъ колесахъ малаго размѣра, въ которыхъ всѣ части сложены, они называются *зубьями*. См. *DENT*.

AM

AMBE, AMBA. См. *LOTERIE*.

AMBIANT. ОКРУЖАЮЩІЙ. *Fluide, air ambiant; окружающая жидкость, окружающій воздухъ.*

AMBIGÈNE. (Геом.) **ПЕРЕСѢЧНАЯ ГИПЕРВОЛА.** Особеннаго рода кривая линія шпешей спелени. Чертежъ 7 (Листъ 1), на которомъ сія кривая изображена, показываетъ, что она имѣетъ двѣ асимптоты: одну *внѣшнюю AG*, а другую *внутреннюю AF*, которую пересѣкаетъ въ точкѣ *C*.

AMBIGU, ОБОЮДНЫЙ. *Signe ambigu, обоюдный знакъ;* то есть, изъ знаковъ $+$ и $-$ помя или другой, когда еще не определено который изъ нихъ истинно. — Иногда же подъ *signe ambigu* разумѣютъ то же что подъ *double sign, двойной знакъ*, то есть знакъ \pm .

AMBIGUE (FORME). (Теор. Чис.) **ОБОЮДНЫЙ ВЪДЪ.** Такъ называеъ *Гауссъ* въ книгѣ: *Disquisitiones arithmeticae*, видъ второй степени: $ax^2 + bxy + cy^2$, когда въ этой формулѣ $2b$ будетъ дѣлаться

на-цѣло на *a*. Здѣсь всѣ три величины *a*, *b*, и *c* предполагаются цѣлыми. См. *FORME, DÉTERMINANT*.

AMBIGUITÉ (Триг.) **ОБОЮДНОСТЬ, СОМНИТЕЛЬНОСТЬ, НЕОПРЕДѢЛЕННОСТЬ.** Когда, напримеръ, въ плоскомъ треугольникѣ даны двѣ стороны и прилежащій одной сторонѣ уголъ, то встрѣчается въ этомъ случаѣ *обоюдность* или *неопредѣленность*; дѣйствительно, если данныя стороны будутъ *AB* и *BC*, а извѣстный уголъ *BAC* (черт. 8, листъ 1), то описать изъ точки *B* радиусомъ *BC* дугу *CD'*, получимъ два треугольника *ABC* и *ABC'*, которые оба удовлетворяютъ условіямъ задачи. Слѣдовательно, она остается неопредѣленною, пока не будетъ извѣстно, долженъ ли уголъ *C* быть острый или тупой. Этотъ случай извѣстенъ въ Тригонометріи подъ наименованіемъ *обоюдности или сомнительности*.

AMBYGONE (TRIANGLE), или TRIANGLE OBTUSANGLE (Геом.) **ТУПОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИКЪ.** Треугольникъ имѣющій одинъ уголъ тупой.

AMENER (Ист. Вѣр.) **ВЫКИНУТЬ, ВЫДЕРЖИВАТЬ, ВЫНУТЬ.** *Amener le nombre 7 avec deux dés; выкинуть число 7 двумя косточками. Amener des bules blanches; вынуть, выдерживать белые шары.* — Иногда *amener* значить привести. *Amener un instrument à la position horizontale; привести инструментъ въ горизонтальное положеніе.*

AMTABLES (NOMBRES). (Теор. Чис.) **ДРУЖНЫЕ ЧИСЛА.** Такъ называются два числа, имѣющія по свойству, что сумма всѣхъ дѣлителей одного изъ нихъ, равна другому, и на оборотъ. Таковы числа 284 и 220. Сумма дѣлителей пераго изъ нихъ: $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$, а сумма дѣлителей втораго: $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$. Числа 17296, 18416 также *дружныя*, равно какъ и 9563584, 9457056. Описаніе же разысканія дружныхъ чиселъ, требующаго довольно подробнаго изложенія, мы отсылаемъ читателя къ сочиненію *Лександра: Théorie des nombres, troisième édition, T. II, emp. 148.*

AMORTISSEMENT. ПОГАШЕНІЕ ДОГОВЪ, АМОРТИЗАЦІЯ. Финансовыя дѣйствія, употребляемыя для уничтоженія или уменьшенія Государственнаго долга. На сей конецъ, назначается ежегодно, независимо отъ прочихъ Госу-

дарственных расходов, особенная сумма, для уплаты, какъ процентовъ должнаго капитала, такъ и изъ которой части самаго капитала. — Основанія финансовыхъ оборотовъ, относящихся къ погашенію долговъ, были столь разнообразны, въ различныхъ Государствахъ и въ разные времена, что подробное описаніе этой отрасли финансовъ могло бы составить особый трактатъ. Скажемъ только, что аналитическое рѣшеніе вопросовъ, которые могутъ встрѣтиться по этому предмету, можетъ быть всегда отнесено къ задачамъ о сложныхъ процентахъ и срочныхъ уплатахъ, почему и описываемъ чинателей къ снпашамъ: INTERÊT, ANNUITÉS.

AMPLITUDE. (Геом.) **АМПЛИТУДА**; хорда параллельной дуги.

AMPLITUDE. (Эл. функ.) **АМПЛИТУДА**; **ИНПЛОТА**, **ОБЪЯТНОСТЬ** **ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ.** Такъ называется уголъ φ , изображающій верхній предѣлъ эллиптическихъ интеграловъ всѣхъ трехъ видовъ:

$$\int_0^{\varphi} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}, \quad \int_0^{\varphi} dx \sqrt{1-k^2 \sin^2 x},$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{dx}{(1-a^2 \sin^2 x) \sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}.$$

Co-AMPLITUDE. Ко-амплитуда, со-широта, со-объятность. Такъ называется φ' относительно интеграла $\int_0^{\varphi} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}$; или φ относительно интеграла $\int_0^{\varphi'} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}$, когда \sin два интеграла удовлетворяють уравненію

$$\int_0^{\varphi} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} + \int_0^{\varphi'} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}.$$

Математики часто употребляютъ слѣдующія законоположенія: изобразивъ чрезъ φ эллиптическую функцию

$$\int_0^{\varphi} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}, \text{ пишутъ:}$$

$\varphi = \text{am. } u$, $\sin \varphi = \text{Sin. am. } u$, $\varphi' = \text{com. } u$, $\sin \varphi' = \text{Sin. com. } u$ и проч. Смол. ELLIPTIQUES (FONCTIONS).

AMPLITUDE. (Мех.) **ДАЛЬНОСТЬ ПОЛѢТА**, то есть горизонтальное разстояніе, перейденное бро-

шеннымъ тѣломъ. — *Amplitude d'une oscillation, широта, величина размаха* (маятника); то есть, удвоенный уголъ отклоенія маятника отъ вертикальной линіи. Самый же уголъ отклоенія, называемся *уклономъ* (*écart*). Смол. PENDUL.

AMPLITUDE. (Астр.) **АМПЛИТУДА**, **АМПЛИТУДЪ**, **ОБЪЯТНОСТЬ.** Дуга горизонта, заключающаяся между точкою, въ которой светило восходитъ или заходитъ и истинною точкою востока или запада. Амплитуда называется *восточною* (*ortive*), когда считаемся отъ точки востока для восходящей звѣзды; она называется *западною* (*occise*) когда считаемся отъ точки запада для звѣзды заходящей.

Амплитуда, какъ восточная такъ и западная, для свѣтила, находящагося между экваторомъ и сѣвернымъ полюсомъ, будетъ всегда *сѣверная*, а для тѣхъ, кои находятся между экваторомъ и южнымъ полюсомъ, она будетъ всегда *южная*. Такимъ образомъ амплитуда солнца сѣмъ сѣверная отъ равноденствія весняго до осеняго, а южная послѣ сего послѣдняго до перваго.

Такъ какъ разсирпзывается горизонтъ истинный и видный, то и амплитуда свѣтила будетъ *истинная* и *видимая*. Рефракція и возмущеніе глаза надъ поверхностію моря суть главнѣйшія причины, по которымъ видный горизонтъ отдѣляется отъ истиннаго.

Мореплаватели обыкновенно употребляютъ амплитуду солнца для опредѣленія склоненія магнитной стрѣлки или измѣненія компаса (*variation du compas*). Для этого, посредствомъ компаса, наблюдающъ онъ амплитуду южнаго края солнца въ то мгновеніе, когда онъ восходитъ или заходитъ. Помощъ вычисляющъ, по известнымъ формуламъ, видимую амплитуду сего края; разность между вычисленною и наблюдаемою амплитудою дастъ склоненіе магнитной стрѣлки или компаса.

АН.

ANACAMPTIQUE. **АНАКАМПТИКА.** Пржевое названіе *Катоптрики*. Смол. CATOPTRIQUE.

ANACLASTIQUE. **АНАКЛАСТИКА.** Такъ называли прежде эту часть Оптики, которая нынѣ извѣстна подъ наименованіемъ *Диоптрики*. Смол. DIOPTRIQUE.

ANAGRAMME. АНАГРАММА. Така перестановка букв какого либо слова, которая производила другое слово, имеющее определенное значение. Магистръ изъ слова *кипа* составляет анаграмму *лика* и *пика*; изъ *Римъ* — *миръ*; изъ *Москва* — *смоква* и проч.

АНАЛЕНТИМЕ. (Астр.) **АНАЛЕНТИМА** (отъ *αλάντις*, высота), есть проекція ортогонаическаго сферы, на плоскости меридиана, при чемъ глаза, предположенный въ безконечномъ разстоянии, находясь на горизонтѣ въ точкѣ востока или запада. Сія проекція, въ которой экваторъ и горизонтъ представляются прямыми линиями, даетъ, посредствомъ простаго черченія, высоту солнца въ данный часъ, и на оборотъ — для данной высоты солнца, часъ дня. Она также служитъ къ определению времени восхода и захода солнца, когда даны широта мѣста и день года. — Астрономическій и гномоническій инструментъ, описанный *Птолемеи*.

АНАЛОГИЕ. СХОДСТВО, ПОДОБЕ, АНАЛОГИЯ, ПОДОВОБОБРАЗИЕ. Смол. INDUCTION. *Conclure par analogie; conclure par сходство, по аналогии.* — **ПРОПОРЦИЯ.**

ANALOGIES DE NEPER. (Сфер. Триг.) **НЕПЕРОВЫ АНАЛОГИИ.** Такъ называются четыре пропорціи, найденныя Неперомъ, и служащія для упрощенія многихъ случаевъ, представляющихся при рѣшеніи сферическихъ треугольниковъ. Неперъ предложилъ эти формулы безъ доказательства; *Валлис* первый доказалъ ихъ. Если изобразимъ чрезъ *a, b, c* бока, а чрезъ *A, B, C* противоположащія имъ углы сферическаго треугольника, то *Неперовы аналогии* будутъ:

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2}(a+b) : \cos \frac{1}{2}(a-b) :: \cot \frac{1}{2}C : \tan \frac{1}{2}(A+B) \\ \sin \frac{1}{2}(a+b) : \sin \frac{1}{2}(a-b) :: \cos \frac{1}{2}C : \tan \frac{1}{2}(A-B) \\ \cos \frac{1}{2}(A+B) : \cos \frac{1}{2}(A-B) :: \tan \frac{1}{2}c : \tan \frac{1}{2}(a+b) \\ \sin \frac{1}{2}(A+B) : \sin \frac{1}{2}(A-B) :: \tan \frac{1}{2}c : \tan \frac{1}{2}(a-b). \end{aligned}$$

ANALOGIES DIFFÉRENTIELLES. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫ АНАЛОГИИ. Памѣня безконечно малю углы и стороны въ сферическомъ треугольнике, получимъ некоторыя отношенія между ихъ дифференциалами; сіи-то отношенія именуются *дифференциальными аналогіями*, и употребляютъ въ Астрономіи. — Извѣстно изъ Сферическаго Тригонометріи, что изобразить чрезъ *a, b, c, A,*

B, C бока и углы сферическаго треугольника, имѣемъ слѣдующія три формулы:

$$(1) \begin{cases} \cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C \\ \cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B \\ \cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \end{cases}$$

Дифференцируя ихъ въ предположеніи *a* и *b* постоянныхъ, получимъ:

$$\sin a \cdot \sin b \cdot \sin C \cdot dC = \sin c \cdot dc.$$

$$\sin a \cdot \sin c \cdot \sin B \cdot dB = (\sin a \cdot \cos c \cdot \cos B - \cos a \cdot \sin c) dc$$

$\sin b \cdot \sin c \cdot \sin A \cdot dA = (\sin b \cdot \cos c \cdot \cos A - \cos b \cdot \sin c) dc;$ совокупляя эти уравненія съ уравненіями (1) получимъ *дифференциальныя аналогии* между *dC, dB, dA* и *dc*. Такъ же легко будешь рѣшить задачу и въ томъ случаѣ, когда предположимъ, что всѣ шесть количествъ *a, b, c, A, B, C* принимаются за переменныя.

ANALOGIE DES DIFFÉRENCES AVEC LES PUISSANCES. (Анал.) **АНАЛОГИЯ, СХОДСТВО МЕЖДУ РАЗНОСТЯМИ И СТЕПЕНЯМИ.**

Лейбницъ первый замѣтилъ сходство между дифференциалами произведенія нѣсколькихъ множителей и степенными выраженіями, также, между интегралами и отрицательными степенями. *Лагранжъ*, въ напечатанномъ имъ Разсужденіи въ 1772 году, придалъ большую всеобщность выводамъ *Лейбница*, распространилъ ихъ на *конечныя разности*, и вывелъ, по наведенію, нѣсколько весьма примѣчательныхъ формулъ, которыя вскорѣ послѣ того были доказаны *Лапласомъ* въ седьмомъ томѣ *Œuvres étrangers*. Формулы, выражающія подобныя сходства, безъ сомнѣнія весьма полезны въ Анализѣ, ибо онѣ служатъ, во многихъ случаяхъ, и къ облегченію памяти, и къ упрощенію выкладокъ. Приведемъ здѣсь нѣсколько такихъ формулъ.

Пусть будетъ *z* функція переменныхъ *x, y, z, ...* Чтобы получить дифференціалъ *n*-го порядка этой функціи, употреблемъ слѣдующую *аналогическую* формулу:

$$d^n z = (d_x + d_y + d_z + \dots)^n z,$$

въ которой, по возведеніи въ степень *n*, и по умноженіи всѣхъ членовъ на *z*, выраженія $d^n_x z, d^{n-1}_x d_y z$ и проч. будутъ изображать не степени и не произведенія, а дифференциалы различныхъ порядковъ; и такъ $d^n_x z$ означаетъ дифференціалъ *n*-го порядка функціи *z* относительно

переменной x ; $d_x^{n-1} d_y s$, дифференциал n -го порядка функции s , взятый $(n-1)$ раз относительно переменной x и один раз относительно y , и такъ далее. Следовательно, въ случаѣ трехъ переменныхъ x, y, z , и n разнаго двукъ, получимъ посредствомъ приведенной формулы:

$$d^2 s = d_x^2 s + d_y^2 s + d_z^2 s + 2 d_x d_y s + 2 d_x d_z s + 2 d_y d_z s.$$

Вотъ еще примѣръ:

$$\Delta u = (e^{\frac{d}{dx} h} - 1) u \quad \text{и} \quad \Delta^n u = (e^{\frac{d}{dx} h} - 1)^n u,$$

гдѣ u есть функция переменной x , а e основание Неперовой системы логарифмовъ. Смол. LOGARITHME. Эти формулы, по разложеніи вторыхъ членовъ въ рядъ, доставляютъ величины для разностей Δu и $\Delta^n u$. Показатели надъ характеристическою d будутъ, очевидно, изображать порядки дифференціаловъ.

Для интегрированія въ разностяхъ есть подобная формула, именно:

$$\Delta^n u = (e^{\frac{d}{dx} h} - 1)^{-n} p,$$

которая имѣетъ тѣсно съ пѣтѣмъ условіемъ, чтобы, по разложеніи второй ея части, всѣ записанныя характеристическія d^{-p} кратнымъ интегрированіемъ \int^p , откуда

$$\frac{d^{-p} u}{dx^{-p}} = \int^p u dx^p.$$

Для болѣе подробностей по сему предмету, отсылаемъ читателей къ прѣдѣльному тому книги: *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, соч. S. F. Lacroix, втор. изд. 1819.

ANALOGIQUE. АНАЛОГИЧЕСКІЙ, СХОДСТВЕННЫЙ, ПОДОВОБОБРАЗНЫЙ. *Formule analogique, analogическая формула.* Смол. выше.

ANALYSE. АНАЛИЗЪ. Внимательное разсмотрѣніе предметовъ съ цѣлю открыть ихъ свойства. Въ такомъ обширномъ значеніи, Анализъ обнимаетъ все науки. Въ болѣе ограниченномъ смыслѣ, подъ симъ наименованіемъ разумѣютъ способъ, который можетъ быть предложенъ въ такомъ видѣ: предполагая найденнымъ то, что еще неизвѣстно; изъ допущенной гипотезы выводить различныя слѣдствія, и останавливаясь на тѣхъ изъ нихъ, которые, по сущности предмета наизъ даны; дабы удовлетворить этимъ слѣдствіямъ, должны быть выполнены тѣковыя условія; условія сіи служатъ помощью къ опредѣленію гипотезы, предположенной сначала изъ

вѣстности, по которой, на самомъ дѣлѣ, была наизъ неизвѣстна, ибо ее именно мы имѣли въ виду найти. Сказанное легко объяснимъ примѣромъ. Положимъ, что желаемъ рѣшить вопросъ, обращается ли земля около неподвижной оси, внутри ея находящейся? Принимая землю за эллипсоидъ вращенія, коего плоскость въ 5 разъ болѣе плоскости воды, допустимъ сперва, что она не имѣетъ вращательнаго движенія. Помогъ опредѣлить, посредствомъ вычисленія, измѣненіе отъ полюса до экватора длины секунднаго маятника. Слѣдствія длины съ пѣтѣмъ, который получаемъ помощію наблюденій, усматриваемъ, что первая изъ нихъ не уменьшается съ широтами въ такой быстрой прогрессіи какъ вторая, откуда заключаемъ, что земля дѣйствительно имѣетъ вращательное движеніе. И въ самомъ дѣлѣ извѣстно, что посредствомъ наблюденій надъ длинами маятника, можно даже опредѣлить величину центробѣжной силы, раздѣющейся отъ сего движенія.

Способъ *аналитическій* противоположенъ способу *синтетическому* (Смол. SYNTHÈSE), въ которомъ не дѣлаютъ никакого предположенія, и не принимаютъ неизвѣстныхъ величинъ за извѣстныя.

Все сказанное нами объ Анализѣ, относится къ способу открытія истины, общезвѣстному и употребляемому всѣмъ Учеными. Теперь займемся въ частности *Математическимъ анализомъ*. Новѣйшіе Геометры, въ изложеніи своихъ теорій, избрали нуть аналитическій, и придерживаются этого способа такъ постоянно, что *Математическій Анализъ*, обнявъ почти все ученія математическія, сдѣлался, такъ сказать, синонимомъ *математическихъ наукъ*. Однакоже не должно смѣшивать эти два наименованія: ибо, въ составъ *наукъ математическихъ* или *Математики*, входятъ все истинныя, доставляемыя ей какъ способомъ аналитическимъ, такъ и синтетическимъ, между тѣмъ какъ Анализъ заключаетъ въ себя только перваго рода истинны; по истинѣ сихъ послѣднихъ, какъ мы замѣтили выше, многимъ превышаетъ число истинны, доказываемыхъ путемъ Синтеза.

Математическій Анализъ отличается отъ всехъ наукъ предметомъ своихъ изысканій, своею независимостію, точностію и ясностію. Предметъ Анализа — ученіе о величинахъ всѣхъ возможныхъ родовъ. — Сперва онъ изучаетъ вели-

чины вообще, то есть, не определяя их сущности. Вотъ предметъ Чистаго Анализа (*Analyse pure*); который заключаетъ въ себя *Алгебру, Теорію чиселъ и Трансцендентный Анализъ*. Смол. ALGÈBRE, NOMBRES (THÉORIE DES), TRANSCENDANTE (ANALYSE). — Далѣе, Анализъ переходитъ къ обзорнѣю различныхъ родовъ величинъ, какъ осязаемыхъ, такъ и тѣхъ, которыя мы только воображаемъ, и называется тогда *Прикладнымъ* (*Analyse appliquée*). Во первыхъ, онъ разсматриваетъ протяженіе, и въ этомъ случаѣ принимаетъ названіе *Анализа Геометрическаго* или *Аналитической Геометріи*; Смол. GEOMETRIE. Потомъ, занимаемся разсматриваніемъ протяженія, времени и вещества, принимая въ соображеніе только непроницаемость сего послѣдняго. Вотъ предметъ *Аналитической Механики*, или просто *Механики*. Смол. MECANIQUE. За симиъ, Анализъ переходитъ къ разсматриванію различныхъ веществъ, дѣйствительно существующихъ въ природѣ, и замѣстуетъ *онъ наблюденіе и Физикѣ* только нѣ показанія, которыя необходимы для опредѣленія тѣхъ, подлежащихъ его изслѣдованіямъ. Подобныя приложенія Анализа составляютъ: *Небесная Механика, теорія тепла, теорія свѣта, звука, волнъ, электричества, магнетизма, воздушныхъ вѣлей и проч.* См. MECANIQUE CELESTE, CHALEUR, LUMIÈRE, SON, ONDES, ELECTRICITÉ, MAGNÉTISME, CAPILLAIRE (ACTION) и проч.

Но всѣ поименованныя теоріи основаны, или на законахъ выведенныхъ изъ опытовъ, или, за недостаткомъ таковыхъ, просто, на гипотезахъ, болѣе или менѣе правдоподобныхъ. Математическій Анализъ не ограничиваясь разсматриваніемъ явленій, коихъ причины дѣйствительно извѣстны, или предполагаются извѣстными: онъ подвергаетъ своимъ изслѣдованіямъ такія явленія, коихъ причины вовсе неизвѣстны, и описательно которыхъ невозможно даже предположить никакой гипотезы. Это приложеніе, вѣнецъ умственныхъ созданій нашихъ временъ, есть *Анализъ* или *Исчисленіе Вѣроятностей*; Смол. PROBABILITÉS (CALCUL DES).

Мы сказали, что Математическій Анализъ отличается отъ всѣхъ наукъ своею независимостію, то есть тѣмъ, что онъ не заимствуетъ никакихъ истинъ изъ другихъ отраслей человѣче-

скихъ познаній. И въ самомъ дѣлѣ, всѣ науки занимаются, или физическими тѣлами органическими и неорганическими, или человѣкомъ, или его дѣйствіями *). Но для *чистаго и геометрическаго Анализа* нѣтъ никакой необходимости въ томъ, чтобы тѣла дѣйствительно существовали, и къ тому жъ, легко понять, что наука, имѣющая предметомъ только познаніе о величинѣ, нисколько не зависить отъ природы человѣка и его дѣйствій. Чѣмъ касается до *даннѣхъ*, которыми Анализъ замѣстуетъ отъ Физики, то и это единственно для того, чтобы узнать требованія сей науки, и въ такомъ случаѣ, онъ служитъ ей опорой при изслѣдованіяхъ, превосходящихъ силы наблюдательныхъ наукъ.

Анализъ есть наука самая ясная, потому что она самая строгая; ибо, нѣсколько то ясно, что со строгостію опредѣлено. Дѣйствительно, если какой либо предметъ не строгъ, то есть, не вполне опредѣленъ, то этотъ предметъ не можетъ быть для насъ яснымъ, и понятіе о немъ соединено съ какою-то неопредѣленностію, которую иначе нельзя устранить, какъ пополняя то, чего недоставало въ прежнемъ опредѣленіи. Къ сожалѣнію, всѣ наши знанія, болѣе или менѣе, заслуживаютъ нареканіе за недостатокъ въ той ясности, полнотѣ, положительности, если сказать такъ выразиться, которыя отличаютъ въ высшей степени математическій Анализъ.

Анализъ, приложенный къ Геометріи, былъ извѣстенъ древнимъ геометрамъ; Платону, жившему за 400 лѣтъ до Р. Х., приписываютъ введеніе аналитическаго способа въ доказательствѣ и спроверженіи геометрическихъ. По сущности своей, Анализъ Древнихъ и есть Анализъ одно и то же: только, въ наши времена, орудія этого способа получали значительныя усовершенствованія, и многія приложенія, неизвѣстныя древнимъ, разширили предѣлы нашихъ знаній въ области Физическихъ Наукъ.

Приведемъ примѣръ древняго Анализа, а потомъ покажемъ свѣтлѣешее рѣшеніе той же задачи для сравненія обоихъ способовъ.

*) Само собой понимается, что мы неслучайно изъ этого главы науки *Восстосскія*.

ЗАДАЧА.

Данъ кругъ $DEFG$ (черт. 9, листъ 1) и прямая AB (предполагая, что она не пересѣкаетъ круга); найти на окружности этого круга такую точку E , что если проведемъ прямыя EA и EB , и соединимъ потомъ точки I и H пересѣченія ихъ съ окружностью, то прямая HI была бы параллельна данной прямой AB .

АНАЛИЗЪ.

Положимъ, что задача рѣшена, то есть, что искома точка действительно въ E , а HI параллельна линіи BA . Пусть будетъ IG касательная къ кругу въ точкѣ I , и G точка пересѣченія этой касательной съ прямою AB .

Очевидно, что уголъ HIG равный углу IGB , по причинѣ параллельности прямыхъ BA и HI , будетъ также равенъ углу HEI или AEB , ибо какъ первый, такъ и второй измѣряются половиною дуги IKH . Съ другой стороны, уголъ EBA принадлежитъ обоимъ треугольникамъ AEB и IGB ; следовательно, эти два треугольника подобны между собою. И такъ имѣемъ пропорцію: $AB : BE :: BI : BG$, изъ которой выводимъ, что прямоугольникъ $BI \times BE$ равенъ прямоугольнику $AB \times BG$; но прямоугольникъ $BI \times BE$ равенъ квадрату касательной BF , которая извѣстна, ибо точка B дана по условію задачи. Слѣдовательно получимъ пропорцію: $AB : BF :: BF : BG$, изъ которой усматриваемъ, что для опредѣленія неизвѣстной линіи BG , спомогъ только найти третью пропорціональную къ линіямъ AB и BF .

И такъ, для рѣшенія задачи, слѣдуетъ: 1°. На данной линіи BA , отъ точки B , отложить линію BG , опредѣляемую изъ пропорціи $AB : BF :: BF : BG$. 2°. Черезъ точку G провести касательную къ данному кругу, чрезъ что опредѣлился точка I на его окружности. 3°. Соединивъ точку B съ I и продолживъ линію BI до ея встрѣчи съ окружностью. Опредѣленная такимъ образомъ точка E будетъ искома.

СИНТЕЗЪ.

Строеніе. На данной прямой BA , отъ точки B , откладываемъ линію BG , равную четвертому члену пропорціи $AB : BF :: BF : BG$, откуда заключаемъ, что прямоугольникъ $AB \times BG$ равенъ ква-

драту BF^2 ; потомъ, проводимъ чрезъ точку G касательную GI къ данному кругу. Точку B соединимъ съ I , и продолживъ линію BI до ея встрѣчи съ окружностью въ E , соединимъ опять E съ A . Этимъ прямая EA пересѣчетъ окружность въ некоторой точкѣ H , соединивъ сію последнюю съ I , получимъ прямую HI , параллельную линіи AB , что и надлежало опредѣлить.

Доказательство. Такъ какъ по условію $AB : BF :: BF : BG$, то прямоугольникъ $AB \times BG$ равенъ квадрату BF^2 ; но BF^2 , по свойству сѣкущей, равенъся прямоугольнику $BI \times BE$; слѣдовательно $AB : BE :: BI : BG$; отсюда заключаемъ, что треугольники AEB и IGB подобны между собою, а уголъ IGB равенъ углу BEA . Но уголъ BEA , или, что все равно, уголъ IEH равенъ углу HIG , ибо тотъ и другой измѣряются половиною дуги IKH , слѣдовательно уголъ HIG равенъ углу IGB , почему линіи HI будутъ параллельны прямой AB , что и надлежало доказать.

Чтобы еще болѣе ознакомить нашихъ читателей съ способомъ аналітическимъ, мы предлагаемъ, для сравненія, доказательство геометрической теоремы посредствомъ Анализа, Синтеза и приведенія къ противорѣчію [Смол. ABSURDE (REDUCTION A L.)].

Предполагая нѣру угловъ при центрѣ извѣстною, и зная какъ свойства угловъ, такъ и свойства параллельныхъ линій, имѣемъ въ виду доказать слѣдующую теорему:

Уголъ при окружности ABD (черт. 10, листъ 1), кою одна сторона BD проходитъ чрезъ центръ C , измѣряется половиною дуги AD , заключенной между его сторонами AB и DB .

АНАЛИЗЪ.

Положимъ теорему справедливою, и пусть $AE = ED = \frac{1}{2} AD$; m будетъ измѣряться дугою AE или ED . Слѣдовательно, если чрезъ C проведемъ діаметръ ECF , то уголъ n , ищущій нѣрою такъ же дугу ED , будетъ равенъся углу m , и по этой причинѣ діаметръ ECF будетъ параллеленъ хордѣ AB . Изъ самого дѣла, такъ какъ $AE = ED$, и какъ сверхъ того $ED = BF$, то $AE = BF$, откуда заключаемъ, что AB и ECF параллельны между собою. Слѣдовательно, и прочъ.

СИ ИТЕЗЪ.

Проводимъ диаметръ ECF параллельно AB ; следовательно уголъ $m = n$; но n и външняя жироу $ED = BF$, а BF , по свойству параллельныхъ хордъ, равняется AE ; следовательно $AE = ED = \frac{1}{2} AD$. И такъ $m = \frac{1}{2} AD$, что и надлежало доказать.

ПРИВЕДЕНИЕ КЪ ПРОТИВОРѢЧЮ.

Положимъ, что уголъ m и външняя жироу дугу большую или меньшую $\frac{1}{2} AD$, напримеръ $E'D$. Проводя диаметръ $E'CF'$, будетъ $n' = m$, ибо оба угла сии измѣряются одною и тою же дугою $E'D$; и такъ, диаметръ $E'CF'$ параллеленъ хордѣ AB . Но такъ какъ $E'D >$ или $< AE'$, то будетъ также $BF' >$ или $< AE'$, а это показываесть, что диаметръ $E'CF'$ не параллеленъ линіи AB . Следовательно, и проч.

Многие математикѣи опредѣляютъ Анализъ способомъ рѣшати математическія задачи, приводя ихъ къ уравненіямъ; но это опредѣленіе, какъ легко заключить изъ сказаннаго нами объ Анализѣ, не всегда справедливо. И дѣйствительно, очень можно случиться, что доказывая какую либо истину или рѣшая задачу, мы употребляемъ уравненія, а придерживаемся способа синтетическаго, или, наоборотъ, не вводя уравненій, руководимуся способомъ аналитическимъ.

Здѣсь также мѣсто объяснить различіе между тремя наименованіями *Анализа*, *Анализа* и *Аналитика*, употребляемыми на Русскомъ языкѣ: между *Анализомъ* и *Анализомъ* не полагается другаго различія, какъ развѣ только то, что второе слово употреблялось у насъ преимущественно въ Геометріи, а первое, въ лѣтъ математическихъ теоріяхъ, въ которыя входили алгебраическія знаменованія и способы. Подъ *Аналитикою* нѣкоторые разумѣютъ *Приложеніе Алгебры къ Геометріи*, или, правильнѣе, *Аналитическую Геометрію* (Смол. GEOMETRIE ANALYTIQUE), а другіе, *Дифференціальное и Интегральное Исчисленіе*. Также, называющіе часто *Неопредѣленную Аналитикою* ту часть Теоріи Чиселъ, которая занимается разысканіемъ рациональныхъ рѣшеній неопредѣленныхъ уравненій. Смол. INDETERMINEE (ANALYSE). Намъ кажется, что такъ какъ *Анализъ* принимается просто въ смыслѣ способа уствнованія, то естественнѣе всего удержатъ только одно наименованіе *Анализа*.

вѣннѣе всего удержатъ только одно наименованіе *Анализа*.

ANALYSE PURE или GÉNÉRALE. Чистый, общій Анализъ. Смол. выше. Чистый Анализъ раздѣляютъ нѣкоторые слѣдующимъ образомъ:

1° *Analyse des quantités finies* или *Analyse algébrique*. Анализъ конечныхъ величинъ или Алгебраическій Анализъ. Смол. ALGÈBRE.

2° *Analyse des quantités infiniment petites* или *Analyse infinitésimale*. Анализъ безконечно малыхъ величинъ, или, просто *Анализъ безконечныхъ*. Смол. INFINITÉSIMALE (ANALYSE), DIFFÉRENTIEL, INTÉGRAL.

3° *Analyse indéterminée*. Неопредѣленный Анализъ. Смол. INDETERMINEE (ANALYSE).

Къ этимъ прѣмъ отдѣламъ можно прибавить еще *Анализъ цѣлыхъ чиселъ* (*Analyse des entiers*) и *Анализъ рациональныхъ количествъ* (*Analyse des quantités rationnelles*), собственно входящіе въ составъ *Теоріи Чиселъ*. Смол. NOMBRES (THÉORIE DES).

ANALYSE APPLIQUÉE. Прикладной Анализъ. Смол. спашью ANALYSE. — Многа подъ *прикладнымъ анализомъ* разумѣютъ способъ приводить задачу къ уравненію.

ANALYSE D'UNE COURBE. (Геом.) РАЗБОРЪ, ИЗСЛѢДОВАНИЕ КРИВОЙ ЛИНІИ. Разысканіе ея вида и различныхъ свойствъ. См. COURBE.

ANALYSER UNE COURBE или FAIRE L'ANALYSE D'UNE COURBE. ДѢЛАТЬ РАЗБОРЪ КРИВОЙ ЛИНІИ, ИЗСЛѢДОВАТЬ КРИВУЮ. Найти видъ кривой и различныя ея свойства.

ANALYSTE. АНАЛИЗТЪ; человекъ свѣдущій въ Анализѣ.

ANALYTIQUE. АНАЛИТИЧЕСКІЙ; свойственный или принадлежащій Анализу. *Méthode analytique*; *аналитическій*, *раздробительный способъ*. Смол. ANALYSE.

MÉCANIQUE ANALYTIQUE. Аналитическая Механика. Вообще, изложеніе правилъ Механики, руководившійся однимъ Анализомъ, и безъ помощи геометрическихъ соображеній. — Заглавіе безсмертнаго труда *Лагранжа*; въ этомъ извѣстіи, великій Геометръ привелъ всю Механику къ одной формулѣ, выражающей начало, найденное *Иваномъ Бернулли*, и извѣстное подъ наимено-

ваіемъ *Нагала възможныхъ скоростей*; Смол. **VIRTUELLES (PRINCIPE DES VITESSES).**

ANALYTIQUE (PARALLÉLOGRAMME). Аналитическій параллелограммъ. См. **PARALLÉLOGRAMME.**

ANAMORPHIQUE (MACHINE). АНАМОРФИЧЕСКАЯ МАШИНА. Машина для составленія *анаморфозъ*; Смол. ниже. Читатели найдутъ описаніе двухъ такихъ машинъ, изображенныхъ *Яковомъ Леопольдомъ*, въ книгѣ: *Dictionnaire universel de Mathématique et de Physique*, соч. *Saverien*.

ANAMORPHOSE или DÉFORMATION. (Персп.) **АНАМОРФОЗА, АНАМОРФОЗЪ, ВИДОПЗВРАЩЕНІЕ,** *искаженное, сбитое, превращенное изображение.* Такъ называется изображеніе, вообще искаженное, но копирное, при малѣйшемъ положеніи глаза, представляющъ совершенное сходство съ какимъ либо предметомъ, въ естественномъ его видѣ. Анаморфозы могутъ быть начерчены или на плоскости, или на кривой поверхности. Онѣ раздѣляются на два рода: на анаморфозы *прямыя (directes)* и *отраженныя (réfléchies)*. На первыхъ смотрятъ простымъ глазомъ; вторыя должны быть усматриваемы чрезъ отраженіе, для чего употребляютъ обыкновенно зеркала цилиндрическія, коническія или пирамидальныя.

Въ сочиненіи механика *Якова Леопольда: Anatomorphosis mechanica nova*, напечатанномъ въ 1714 году, описаны изобрѣшенныя имъ двѣ *анаморфическія* машины, посредствомъ которыхъ составляются механически анаморфозы чрезъ отраженіе. Первая изъ нихъ служитъ для зеркалъ цилиндрическихъ, а вторая для коническихъ. Что касается до *теоретическаго* способа составленія искаженныхъ изображеній, то употребляютъ на сей конецъ *способъ квадратовъ*, который весьма удобенъ при построеніи прямыхъ анаморфозъ на плоскости. Вотъ въ чемъ состоитъ этотъ способъ.

Положимъ, что дано изображеніе въ естественномъ его видѣ; строимъ около него квадратъ *ABCD* (черт. 11, листъ 1), который, въ свою очередь, разбиваемъ на нѣкоторое число малыхъ квадратиковъ (на чертѣ на 25). Положимъ, взявъ сторону *AB* квадрата, переносимъ ее въ *ab* (чертѣ 12, листъ 1), такъ что *ab* \equiv *AB*; сторону *ab* раздѣляемъ на столько же частей, сколько ихъ находится въ *AB* (на чертѣ на 5 частей).

Изъ середины *E* прямой *ab* возставляемъ перпендикуляръ *EI*, а изъ точки *I*, перпендикуляръ *IK*. Длинны этихъ двухъ перпендикуляровъ совершенно произвольны; но должно замѣтить, что изображеніе будетъ тѣмъ болѣе искажено, чѣмъ длиннѣе будетъ линія *EI*, а короче линія *IK*. Каждую точку дѣленія прямой *ab* соединяемъ съ точкою *I*, а потомъ точку *K* съ точкою *a*. Чрезъ каждую изъ точекъ *d, e, f, g, h*, пересѣченія прямой *Ka* съ линіями *di, li, 2I, 3I, 4I* проводимъ линіи, параллельныя прямой *ab*. Такимъ образомъ получаемъ трепещію *abcd*, состоящую изъ отодвинутыхъ малыхъ трапецій, сколько въ квадратѣ *ABCD* заключенъ квадратиковъ. Тогда, въ каждой изъ малыхъ трапецій чертежа 12, изображаемъ глазомерно то, что находимъ въ соотвѣстственныхъ квадратикахъ чертежа 11, и получаемъ совершенно искаженное изображеніе. Но если въ точкѣ *I*, перпендикулярно къ плоскости трепещіи *abcd*, поставимъ пластику *LM* (черт. 13) такой длины, что высота оптической *M* надъ точкою *I* равняется разстоянію *IK*, и потомъ будемъ смотрѣть на чертежъ сквозь сіе оптическое, то увидимъ изображеніе въ естественномъ его видѣ, именно въ томъ, въ какомъ оно представлено въ квадратѣ *ABCD*.

Для большихъ подробностей о построеніи анаморфозъ, мы отсылаемъ читателей къ *Курсамъ Начертательной Геометріи, и въ частности, къ Трактатамъ о Перспективѣ.* Смол. также статью *Anamorphose* въ *Encyclopédie méthodique*, отдѣленіе *Mathématiques*.

ANCIENNE GÉOMÉTRIE или GÉOMÉTRIE DES ANCIENS. ДРЕВНЯЯ ГЕОМЕТРИЯ, ГЕОМЕТРИЯ ДРЕВНИХЪ, то есть, Геометрія въ томъ видѣ, въ какомъ она была до *Декарта*, когда еще не прикладывали къ ней аналитическихъ вычисленій — Многа же подъ *Геометрію Древнихъ* разуютъ состояніе этой науки отъ временъ *Декарта* до изобрѣтенія *Дифференціального* и *Интегрального* исчисленій. Смол. **GÉOMÉTRIE.**

ANDROIDE. (Мех.) **АНДРОИДЪ, АВТОМАТЪ, САМОДВИГЪ.** Смол. **AUTOMATE.**

ANÉANTIR. (Анг.) **УНИЧТОЖИТЬ.** Смол. **ANNULER.**

S'ANÉANTIR. УНИЧТОЖАТЬСЯ. *Cette quantité s'anéantit, s'annule, s'évanouit d'elle même; это количество само собою уничтожается, обращается въ нуль.*

ANÉMOMÈTRE. (Мех.) **АНЕМОМЕТРЪ, ВѢТРОМѢРЪ.** Снарядъ, посредствомъ котораго измѣряется сила вѣтра.

ANÉMOSCOPE. (Мех.) **АНЕМОСКОПЪ, ВѢТРОУКАЗАТЕЛЬ.** Машина, указывающая перемѣны вѣтра.

ANGLE. (Геом. Мех. Физ. Астр.) **УГОЛЬ.** Подъ этимъ наименованіемъ разумѣется большію или меньшую осповѣтъ взаимнаго наклоненія двухъ встрѣчающихся прямыхъ линій. Прямая линія въ такомъ случаѣ называется *сторонами угла* (*côtés, jambes de l'angle*), а точка встрѣчи, *вершиною угла* (*sommet, pointe de l'angle*). Это взаимное наклоненіе измѣряется длиною дуги, описанной изъ вершины угла радиусомъ равнымъ единицѣ, и ограниченной двумя встрѣчающимися прямыми; очевидно, что въ такомъ случаѣ, уголь будетъ изображенъ известною дужиою, или отечеченнымъ числомъ. — *Уголомъ* называютъ также неограниченное пространство, заключающееся между двумя пересѣкающимися прямыми линіями.

ANGLE RECTILIGNE. Прямолінійный уголь, по снѣ прямой; коего обѣ стороны прямыхъ линій.

ANGLE CURVILIGNE. Криволинійный уголь, составленный двумя кривыми линіями.

ANGLE MIXTILIGNE. Разнолинійный уголь, у котораго одна сторона прямая, а другая, кривая линія.

ANGLE DROIT. Прямой уголь. Уголь, составленный двумя прямыми, взаимно перпендикулярными. Смол. PERPENDICULAIRE.

ANGLE AIGU. Острый уголь. Уголь меньшій прямого.

ANGLE OBTUS. Тупой уголь. Уголь большій прямого.

ANGLE DE SUITE. Смежные углы. Смол. AD. JACENTS (ANGLES) во второмъ значеніи.

ANGLES OPPOSÉS AU SOMMET, PAR LE SOMMET или **ANGLES VERTICAUX.** Углы противуположныхъ вершинами, вершинные углы, вертикальные углы; углы составленные двумя пересѣкающимися прямыми. На черт. 11, (листъ 1) углы AOB и COD , также AOC и BOD *противуположны вершинами*.

ANGLES CORRESPONDANTS. Соответственные углы. Такъ называются углы находящіеся по

одну сторону прямой, пересѣкающей двѣ параллельныя линіи, и обращенные своими отвѣрстіями въ одну и ту же сторону. Таковы углы $BO'C'$ и AOC' (черт. 13, листъ 1); углы $BO'C$ и AOC ; также $CO'B'$ и $CO'A'$, и еще $BO'C$ и $A'O'C$.

ANGLES AU CENTRE. Углы при центрѣ. Углы составленные радиусами, проведенными изъ центра многоугольника къ каждому изъ его угловъ. Сумма угловъ при центрѣ очевидно равна четырѣмъ прямымъ. — Уголь, составленный двумя радиусами, проведенными въ кругъ.

ANGLE A LA CIRCONFÉRENCE или **ANGLE INSCRIT.** Уголь при окружности или вписанный уголь, по снѣ такой, коего вершина находится при окружности круга. Таковъ уголь BAC (черт. 16, листъ 1). Уголь при окружности измѣряется половиною дуги, заключающейся между его сторонами; и такъ, уголь BAC имѣетъ мѣрою половиною дуги BFC . Уголь BOC , коего вершина находится внутри круга, измѣряется половиною дуги BFC , заключающейся между его сторонами, сложенною съ половиною дуги AGE , отсѣченной ихъ продолженіями OA и OE . Уголь BDC , коего вершина D находится внѣ круга, имѣетъ мѣрою половиною дуги BFC , безъ половины дуги AGE , заключающихся между его сторонами DB и DC .

ANGLE DE CONTINGENCE. Уголь смежности. Уголь касанія. Смол. CONTINGENCE.

ANGLE PLANO-LINÉAIRE. Плосколинійный уголь. Уголь, составленный прямою линією съ плоскостію.

ANGLE PLAN. Плоскій уголь. Уголь, составленный двумя встрѣчающимися прямыми. — *Плоскостной уголь*, образуемый двумя пересѣкающимися плоскостями.

ANGLE SOLIDE или **ANGLE POLYÈDRE.** Многогранный уголь. Угловое пространство, образуемое несколькими плоскостями, пересѣкающимися по двѣ, и имѣющими общую точку, которая называется *вершиною многограннаго угла* (*sommet de l'angle solide*). Плоскости въ такомъ случаѣ именуются *гранями* (*faces*), а ихъ пересѣченія, *ребрами* (*arêtes*). Смол. COIN.

ANGLE SOLIDE DROIT. Прямой трехгранный уголь. Угловое пространство, заключающееся между тремя пересѣкающимися и взаимно перпендикулярными плоскостями.

ANGLES SOLIDES SYMÉTRIQUES. Симметрические многогранные углы. Два многогранные угла называются *симметрическими между собою*, когда, по приведении их въ надлежащее положение, ребра одного изъ нихъ будутъ совпасть съ параллельными ребрамъ другого, но направлены въ противоположныя стороны. Очевидно въпрочемъ, что число реберъ въ обоихъ углахъ будетъ одно и то же.

ANGLE DIÈDRE. Двугранный уголъ. Пространство, заключающееся между двумя пересѣкающимися плоскостями. Мѣрою двуграннаго угла служитъ плоскій уголъ, получаемый чрезъ разсѣченіе плоскостей гравей, плоскостію изъ перпендикулярною.

ANGLE TRIÈDRE. Трехгранный уголъ. Когда три плоскости, встрѣчаясь въ одной точкѣ, пересѣкаются взаимно, то образуютъ уголъ, именуемый *трехграннымъ*.

ANGLE TÉTRAÈDRE. Четырехгранный уголъ.

ANGLE PENTAÈDRE. Пятигранный уголъ, и такъ далѣе, по числу пересѣкающихся плоскостей.

ANGLE SPHÉRIQUE. Сферическій уголъ. Уголъ, составленный взаимными наклоненіями двухъ плоскостей, пересѣкающихся шаръ въ его центръ.

ANGLE DE DIRECTION. Уголъ направленія. Смол. **DIRECTION.**

ANGLE D'ÉLEVATION. Уголъ возвышенія. Уголъ, составленный какою либо линіею (напримѣръ, осью орудія) съ горизонтальною плоскостію.

ANGLE D'INCLINAISON. Уголъ наклоненія.

ANGLE VISUEL или OPTIQUE. Зрительный, оптический уголъ. Уголъ, составленный двумя лучами зрѣнія, проведенными отъ глаза наблюдателя къ двумъ предметамъ.

ANGLE D'INCIDENCE и ANGLE DE RÉFLEXION. Смол. **INCIDENCE.**

ANGLE HOURAIRE. Часовой уголъ. Уголъ при полюсѣ экватора, заключающійся между меридіаномъ и кругомъ склоненія, который проходить чрезъ свѣтило. Часовой уголъ измѣряется дугою экватора, заключающеюся между точками, въ которыхъ меридіанъ и кругъ склоненія пересѣкаются съ экваторомъ, и потому сей послѣдній называется также *часовымъ кругомъ* (*cercle horaire*). Часовые углы считаются всегда отъ меридіана, или къ Западу, или къ Востоку до 180°

или до 12 час.; или отъ меридіана къ Западу до 360° или до 24 час. Въ Астрономіи часовые углы сѣтили нѣкоторъ весьма большое употребленіе; они служатъ къ опредѣленію времени, высоты свѣтила, азимута, широты мѣста и проч. Въ гражданскомъ быту, часовые углы солнца употребляются для опредѣленія часовъ дня. Когда солнце удалено отъ меридіана на 16°, 30°.... 180°, тогда считаются *одинъ, два.... двенадцать часовъ*.

ANGLE PARALLACTIQUE. Параллактический уголъ. Уголъ при свѣтилѣ, заключающійся между кругами склоненія и вертикальнымъ, проходящимъ чрезъ свѣтило.

ANGLE DE POSITION. Уголъ положенія. Уголъ при свѣтилѣ, составленный кругами склоненія и широты, проходящими чрезъ свѣтило.

ANGLE D'ELONGATION. Уголъ удаленія, то есть, уголъ при центръ земли, между радіусомъ векторомъ солнца и украшеннымъ разсѣдѣніемъ планеты отъ земли.

ANGLE DE COMMUTATION. Уголъ измѣненія. Уголъ при центръ солнца, между радіусомъ векторомъ земли и украшеннымъ радіусомъ векторомъ планеты.

ANGUINÉE. (Геом.) **ЗМЕИВІДНАЯ, ИЗВИВНАЯ ИПЕРБОЛА.** Ипсозъ, въ разборѣ кривыхъ линій третьяго порядка, называтъ *змейвидными иперболоми* нѣкоторыя кривыя, относящіяся къ сему порядку. Чертежъ 17 (листъ 1) представляетъ такую кривую. Она пересѣкаетъ свою асимптоту въ точкѣ *B*, и имѣетъ въ *D* и *E* точки изгиба. Уравненіе этой кривой слѣдующее:

$$12y + aby - a^2x = 0.$$

ANGULAIRE. (Геом.) **УГЛОВОЙ.** Относящійся къ угламъ. *Espace angulaire; угловое пространство.* — *Круговой, дуговой.*

ANGULAIRES (SECTIONS) или SECTIONS CIRCULAIRES. (Геом.) **КРУГОВЫЯ, ДУГОВЫЯ СЪЧЕНІЯ.** То есть, дѣленіе окружности круга, или какой либо круговой дуги на нѣсколько равныхъ частей. Также, разысканіе закона, по которому возрастающіе и уменьшающіеся синусы или хорды *кратныхъ* (*arcs multiples*) и *дольныхъ дугъ* (*arcs sous-multiples*).

Теорія круговыхъ сѣченій есть одно изъ примѣчательнѣйшихъ открытій *Віета*. Онъ напе-

чашалъ его въ 1579 году въ своемъ *Canon Mathematicus*, заключающемъ въ себя таблицы синусовъ, построенныя на основаніи выведенныхъ имъ формулъ для круговыхъ сѣченій.

Возьмемъ полукругъ *AMFDB* (черт. 18 листа 1), раздѣленный на какое угодно число равныхъ частей (на чертѣхъ, на *восемь*). Пустьъ будетъ радиусъ $OA = 1$, а хорда $BI = r$; Виѣтъ нашелъ слѣдующія формулы:

$$\begin{aligned} AB &= 2 \\ AC &= r \\ AD &= r^2 - 2 \\ AE &= r^3 - 3r \\ AF &= r^4 - 4r^2 + 2 \\ AG &= r^5 - 5r^3 + 5r \\ AH &= r^6 - 6r^4 + 9r^2 - 2 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

и вообще, изобразивъ чрезъ ω дугу *CB*, дополнительная хорда кратной дуги $m\omega$ опредѣлится рядомъ

$$x^m - \frac{m}{1} x^{m-2} + \frac{m(m-2)}{1 \cdot 2} x^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-6} + \frac{m(m-6)(m-8)(m-10)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{m-8} - \dots$$

Полагая же хорду $BC = y$, получимъ:

$$\begin{aligned} BC &= y \\ BD &= y \sqrt{4 - y^2} \\ BE &= 5y - y^3 \\ BF &= (2y - y^3) \sqrt{4 - y^2} \\ BG &= 5y - 5y^3 + y^5 \\ BH &= (3y - 4y^3 + y^5) \sqrt{4 - y^2} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

и вообще, для хорды чѣтно-кратной дуги $2m\omega$, полагая хорду дуги ω равную y , найдемъ:

$$\left(my - \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^3 + \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} y^5 - \frac{(m+3)(m+2)(m+1)m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} y^7 + \dots \right) \sqrt{4 - y^2}$$

а для хорды нечѣтно-кратной дуги $(2m+1)\omega$

$$\begin{aligned} (2m+1) \left(y - \frac{(m+1)m}{2 \cdot 3} y^3 + \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} y^5 - \frac{(m+3)(m+2)(m+1)m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} y^7 + \dots \right) \end{aligned}$$

Замѣнимъ, что хотя мы и предположили, что полуокружность раздѣлена на некоторое число равныхъ дугъ, но приведенныя нами формулы бу-

дутъ справедливы для какой ни есть дуги, хотя бы она и не вѣщдалась цѣлое число разъ въ окружности круга.

Легко видѣть, что посредствомъ сихъ формулъ, можно приводить къ рѣшенію численныхъ уравненій раздѣленіе произвольной дуги на какое угодно число равныхъ частей. Дѣйствительно, положимъ что пребудетъ раздѣлить дугу s , коей хорда $= a$, на 5 равныхъ частей; въ такомъ случаѣ получимъ уравненіе $y^5 - 5y^3 + 5y = a$. Одинъ изъ корней будетъ равняться хордѣ пятой части дуги s , другой $\frac{1}{2}(\pi - s)$, третій $\frac{1}{2}(\pi + s)$, четвертый $\frac{1}{2}(2\pi + s)$, пятый $\frac{1}{2}(3\pi + s)$. Точно такъ будетъ и вообще.

Въ такомъ состояніи находилась теорія круговыхъ сѣченій, и даже нѣкико не воображали, чтобы она могла подвинуться впередъ, какъ въ 1801 году, выпало въ свѣтъ примѣчательное сочиненіе Гаусса подъ заглавіемъ: *Disquisitiones Arithmeticae*, въ которомъ эта теорія изложена. Гауссъ доказываетъ, что дѣленіе окружности на n равныхъ частей возможно посредствомъ циркуля и линейки, когда n изображаетъ простое число (*nombre premier*) вида $2^n + 1$. И такъ, окружность можешь быть раздѣлена на 17 частей, або 17 число простое вида $2^4 + 1$. То же самое можно сказать о числахъ $257 = 2^8 + 1$ и $65537 = 2^{16} + 1$. Если изобразимъ вообще чрезъ M число, на которое окружность можешь быть раздѣлена геометрически, то, ниже предѣла 300, найдемъ слѣдующія тринадцать восемь значеній для M :

2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 43, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272,

въ чемъ легко удостовериться соображаясь съ открытіемъ Гаусса и съ тѣмъ, что было извѣстно до него относительно дѣленія окружности.

Мы сказали выше, что теорія круговыхъ сѣченій *истощена* Гауссомъ. Дѣйствительно, въ упомянутомъ выше сочиненіи, онъ предлагаетъ слѣдующую теорему: Чтобы геометрически дѣленіе окружности на M равныхъ частей было возможно, число M не должно заключать имхъ простыхъ нечетныхъ дѣлителей, какъ только вида $2^n + 1$, и сверхъ того, сіи дѣлители должны быть ест. различны между собою.

Если M не удовлетворяет этим условиям, то, по утверждению Гаусса, он может доказывать невозможность *геометрического* разделения окружности на M равных частей.

Мы опишем чашахей из статьи BINOMES (ÉQUATIONS), в которой говорено подробно об открытиях Гаусса относительно сего предмета. Смол. также PENTAGONE RÉGULIER. **ANGULAIRE (MOUVEMENT).** (Мех.) **УГЛОВОЕ ДВИЖЕНИЕ.** Движение системы около неподвижной точки или оси. Подобное движение чаще называется *вращательным*. Смол. ROTATION (MOUVEMENT DE).

VITESSE ANGULAIRE. (Мех.) Угловая скорость. Когда неизменяемая система обращается около неподвижной оси, то отношение скорости каждой точки, к ее расстоянию отъ оси, есть одно и то же для всех точек. Сие-то отношение именуется *угловою скоростью*. Если эта скорость постоянна, то вращательное движение будет *равномерное*.

ANGULEUX. (Геом.) **УГЛОВАТЫЙ;** живущий из-сколым углом. *Corps anguleux, угловатое тело.*

ANIMÉ PAR DES FORCES. (Мех.) **ПОБУЖДАЕМЫЙ СИЛАМИ.** Смол. FORCE.

ANNEAU. (Геом.) См. ANNULAIRE (SURFACE). **ANNEAU ASTRONOMIQUE.** См. CADRAN ÉQUINOXIAL PORTATIF.

ANNEAU DE SATURNE. (Астр.) **САТУРНОВО КОЛЬЦО.** Смол. SATURNE.

ANNEAUX COLORÉS. (Опт.) **ЦВѢТНЫЯ КОЛЬЦА.** Когда на плоское, или съ весьма малю выпуклостью стекло, тщательно выполированное, положимъ другое, двойно-выпуклое, но живущее едва заметную кривизну, то между ними останется слой воздуха, коего шлошпоша вообще достаточна для того, чтобы лучи свѣта, выходя изъ выпуклага стекла, преломлялись или отражались. Если свѣтъ будетъ падать на выпуклое стекло, то заметимъ около точки прикосновения поверхностей стеклъ болѣе или менѣе значительное число разноцвѣтныхъ концентрическихъ полосъ, которыя называются *цветными кольцами*. Мы изложимъ адѣсь вкратцѣ обстоятельства, сопровождающія это явление, и заметимъ прежде всего, что необходимо произвѣсти трѣне между стеклами и придадимъ одно

къ другому, дабы по возможности, уменьшивъ шлошпошу слоя воздуха, заключающагося между ними. Достигнувъ этого условія, заметимъ, что въ точки прикосновения стеклъ образуется черное пятно; около него, въ видѣ концентрическихъ круговъ, появляются цветныя кольца, коихъ цвѣтъ сохраняетъ всегда такую последовательность въ первомъ кольцѣ, начиная отъ чернаго пятна — голубой, бѣлый, желтый, красный; во второмъ — фиолетовый, голубой, зеленый, желтый, красный; въ третьемъ — пурпуровый, голубой, желтый, красный; въ четвертомъ — зеленый, красный; въ пятомъ — голубой, зеленоватый, красный; въ шестомъ — голубой, зеленоватый, блѣдно-красный; въ седьмомъ — голубой, зеленоватый, блѣдно-красноватый. Первое изъ сихъ колець называется *цветнымъ кольцомъ первого порядка*, второе — *кольцомъ второго порядка*, и такъ далѣе.

Ньютоу, заметившій кривизну колець, открылся законы и причину этого явления. Онъ тщательно измѣрилъ радиусы колець различныхъ порядковъ въ мѣстахъ наиболѣе яркихъ, и нашелъ, что длины ихъ пропорциональны квадратнымъ корнямъ изъ четныхъ чиселъ 1, 3, 5, 7, 9, 11...; длинны же радиусовъ темныхъ колець нашлись пропорциональными квадратнымъ корнямъ изъ четныхъ чиселъ 0, 2, 4, 6, 8, 10... Отсюда Ньютоу вывелъ, посредствомъ весьма простаго вычисления, что промежутки между поверхностями стеклъ при свѣтлыхъ кольцахъ возрастаютъ какъ числа прогрессіи 1, 3, 5, 7, 9, 11..., а при темныхъ, какъ четныя числа 0, 2, 4, 6, 8, 10... Для сихъ опытовъ онъ употреблялъ одно стекло плоское, а другое выпуклое, принадлежащее шару, коего діаметръ былъ во сто одинъ фунтъ. Онъ нашелъ, что шлошпоша слоя воздуха, соотвѣствующаго самой свѣтлой части перваго кольца, составляла $\frac{1}{178000}$ долю англійскаго дюйма; слѣдовательно, самой свѣтлой части втораго кольца соотвѣствовала шлошпоша въ $3 \times \frac{1}{178000}$ дюйма; прѣпятаго, $5 \times \frac{1}{178000}$ и проч.

Ньютоу производилъ также опыты надъ цвѣтными кольцами впуская между стеклами каплю воды; опыты сіи показали, что порядокъ цвѣтовъ и относительныя размѣренія колець не мѣняются, а только радиусы ихъ уменьшаются

ся въ отношении 7 къ 8, откуда проходящимъ извѣщеніе молотомъ слѣдуетъ воды и воздуха въ отношеніи 3 къ 4, а это отношеніе есть именно то, которое существуетъ между преломляемостію изъ воды въ воздухъ. Ошибки надъ другими веществами, какъ то: масломъ, снегомъ и проч. привели къ тому же самому слѣдствію, именно, что *толстота слоевъ, соответствующихъ отдѣльному цвету кольца, обратно пропорціональна показателю преломленія этихъ веществъ, которые заключаются между стѣнами.*

Когда Нютокъ привелъ явленіе цвѣтныхъ колецъ къ своимъ законамъ, столь же простымъ, сколько и правильнымъ, то онъ приложилъ стараніе подвести ихъ подъ одинъ законъ, еще простѣйшій; для достиженія этой цѣли, онъ принялъ свѣту свойство, которое назвалъ *accès de facile réflexion et de facile transmission*, то есть, *присутствіе удобнаго отраженія и пропущенія свѣта.*

Принимая свѣтъ за вещество, составленное изъ частицъ, исходящихъ изъ свѣщающаго тѣла и движущихся съ чрезвычайною быстротою, Нютокъ вывелъ слѣдующее заключеніе: свѣтъ какъ свѣтъ въ приведенныхъ выше опытахъ, а также въ тонкихъ пластинкахъ, окражается при періодическихъ толстотахъ *e, 3e, 5e, 7e...*, разсмѣлъ подъ *e* толстоту слоя при первомъ свѣтломъ кольцѣ, а проходилъ, напротивъ того, при послѣдующихъ темныхъ толстотахъ *0, 2e, 4e, 6e...*, то свѣтородныя частицы должны имѣть, по существу своему, какое-то стремленіе, равнымъ образомъ періодическое, располагающее ихъ, при извѣстныхъ обстоятельствахъ, попеременно отражаться при толстотахъ *e, 3e, 5e, 7e...*, а проходящихъ, при толстотахъ *0, 2e, 4e, 6e...*. Этому свойству, по которому каждый лучъ свѣта, при переходѣ изъ одной среды въ другую, приобретаетъ способность попеременно отражаться и проходить при встрѣчѣ съ преніею срединою, Нютокъ далъ извѣнчиваю *присутствіе удобнаго отраженія и пропущенія свѣта.*

Толстота *2e*, извѣщающаяся для различныхъ веществъ, опредѣляетъ длину прислуга. Приводимъ таблицу для величинъ *2e*, составленную Нютономъ для простыхъ лучей въ пустотѣ, воздухѣ, водѣ и стеклѣ; замѣтимъ, что величины *2e* выражены здѣсь во сто миллионныхъ частяхъ

англійскаго дюйма. Для воздуха, онъ выведены непосредственными опытами, а для прочихъ веществъ полученные чрезъ раздѣленіе найденныхъ наблюденіемъ чиселъ на показатели преломленія, то есть, на $\frac{322}{555}$ для пустоты, на $\frac{3}{4}$ для воды и на $\frac{10}{8}$ для стекла. Вот сіи величины отношены къ предположенію перпендикулярно падающихъ лучей.

Толстота *2e* для различныхъ лучей.

	въ пустотѣ	въ воздухѣ	въ водѣ	въ стеклѣ
Крайній фиолетовый	3,99816	3,99698	2,99773	2,57870
Пределъ фиолетоваго и синяго.....	4,32456	4,32308	3,24251	2,78908
Пределъ синяго и голубаго.....	4,51475	4,51342	3,38507	2,91188
Пределъ голубаго и зеленаго.....	4,84284	4,84142	3,63107	3,12350
Пределъ зеленаго и желтаго.....	5,25886	5,25732	3,92799	3,57891
Пределъ желтаго и оранжеваго.....	5,61963	5,61798	4,21349	3,62450
Пределъ оранжеваго и краснаго.....	5,86586	5,86414	4,39811	3,78531
Крайній красный...	6,34628	6,34441	4,75851	4,09517

Мы должны, по способу нашей книги, ограничиться симъ краткимъ показаніемъ явленія цвѣтныхъ колецъ. Читатели, желающіе ознакомиться съ этимъ важнымъ, и имѣющимъ любопытнымъ предметомъ, найдутъ надлежащія подробности въ курсахъ Физики, преимущественно же въ трактатахъ объ Оптикѣ. Въ системѣ волненія по началу интерференцій свѣта, явленія цвѣтныхъ колецъ объясняются самымъ удивительнымъ образомъ.

ANNÉE. (Астр.) **ГОДЪ.** Извѣстное число дней, составляющихъ періодъ, ниспосланный или перемѣняющийся, солнечный или лунный, смотря по тому — обращеніемъ ли солнца или луны измѣряется время. Годъ раздѣляется на *Астрономическій* и *Гражданскій*.

Годъ Астрономическій (annee astronomique) имѣетъ различныя значенія:

- 1) **Аннѣе тропическій.** Годъ тропическій есть истинный солнечный годъ, то есть, время которое солнце употребляетъ, чтобы возвратиться къ тому же широту, и слѣдовательно время, которое нужно для того, чтобы каждое годовое время снова возвращалось въ томъ же порядкѣ.

Тропический годъ содержитъ 365 дней 5 часовъ 48 минутъ 51 секунду средняго солнечнаго времени.

2) **ANNÉE SIDÉRALE.** Годъ звездный. Время, которое солнце употребляетъ, чтобы возвратиться къ той же звездѣ. Звѣздный годъ болѣе тропическаго 20'20". Причина такой разности состоитъ въ слѣдующемъ: точки равноденственныхъ отступаютъ ежегодно на 50''1; поэтому солнце совершитъ тропическій годъ прежде, нежели оно возвратится къ той же звездѣ: и. е. когда оно пройдетъ только 359°59'9''9 эклиптики. Остаточныя 50''1 продолжитъ оно въ 20'20" средняго солнечнаго времени.

3) **ANNÉE ANOMALISTIQUE.** Годъ аномалистическій. Время, которое солнце употребляетъ для возврата къ той же аномаліи; онъ болѣе звѣзднаго 5'6''2, и болѣе тропическаго 25'21''2. Причина оія происходитъ отъ того, что линія абсциссъ солнца имѣетъ прямое движеніе въ разсужденіи неподвижныхъ звѣздъ на 11''1, а въ разсужденіи точекъ равноденственныхъ на 61''2.

ANNÉE CIVILE. Годъ гражданскій у всехъ народовъ былъ или солнечный или лунный. По причинѣ различныхъ способовъ вычислять солнечный гражданскій годъ, произошли также различныя названія: годъ *Юліанскій, Григорианскій, общій и високосный*.

ANNÉE JULIENNE. Годъ Юліанскій содержитъ 365 солнечныхъ дней и 6 часовъ, и слѣдовательно онъ болѣе истиннаго солнечнаго тропическаго года 11'9'', который составляетъ почти одинъ день въ 134 года, или почти 3 дня въ 409 лѣтъ. Но такъ какъ для удобности счисленія нужно, чтобы каждый годъ начинался началомъ дня или сутокъ, то условившись считать въ первыхъ трехъ годахъ сразу по 365 дней, а въ четвертомъ 366 дней. Первые три года называются *простыми* (*années communes*), а четвертый *високоснымъ* (*bis-sextile*). Годы отъ Р. Х. дѣлящіеся нацѣло на 4, суть високосные, а прочіе, простые. Это счисленіе изобрѣтено Александрійскимъ Астрономомъ *Соизеномъ*, и введено въ употребленіе Юліемъ Кесаремъ за 45 лѣтъ до Р. Х.

Разность 11'9'' между Юліанскимъ и истиннымъ тропическимъ годомъ, накопляясь со временемъ, наконецъ сдѣлалась очевидною, и причина неаппlicable замѣчательства въ праздникъ

званія Пасхи, такъ что Папа Григорій XIII искалъ способъ исправить недоспѣхъ Юліанскаго Календаря. И дѣйствительно, весеннее равноденствіе, которое во время Ватиканскаго Собора, въ 325 году, было 21 Марта, унадало въ 1582 году на 11 Марта. Поэтому, въ томъ же самомъ 1582 году, Папа повелѣлъ лишніе 10 дней, вошедшіе въ предыдущіе годы съ 525 до 1582, исключать изъ нихъ, причислить къ исполненію, и 5 Октября 1582 года считали 15 числомъ того же мѣсяца, такъ что весеннее равноденствіе въ слѣдующемъ году пришлось опять 21 Марта. Но чтобы впередъ весеннее равноденствіе не удалялось отъ 21 Марта, было постановлено считать 1600 годъ високоснымъ, а годы 1700, 1800, 1900, которые по Юліанскому счисленію високосные, считать простыми, 2000 годъ считать високоснымъ, и вообще, послѣдніе годы прѣкъ столѣтій сразу дѣлать простыми, а послѣдній годъ четвертаго столѣтія считать високоснымъ; такимъ образомъ лишніе три дня, исключеніе въ каждыя четыреста лѣтъ, исключаются изъ нихъ, и придаютъ къ исполненію году.

Эта перемѣна, хотя не вводитъ удовлетворительна для Астрономовъ, но принята теперь почти всѣми Европейскими Державами подъ названіемъ *Григорианскаго ипотисленія*. Въ Германіи оно принято въ 1700, а въ Англіи въ 1752 году. Юліанскій Календарь остался только въ Россіи.

ANNÉE GREGORIENNE. Годъ Григорианскій есть истинный тропическій солнечный годъ, изъ 365 д. 5 ч. 48 м. 51 с. Въ эпоху счисленія, какъ и въ Юліанскомъ, годы состоятъ изъ цѣлаго числа дней, и. е. первые три года изъ 365, а четвертый изъ 366 дней, съ тѣмъ только различіемъ, что въ Юліанскомъ счисленіи, всѣ столѣтніе годы високосные, а въ Григорианскомъ, три столѣтніе годы сразу считаются простыми, а четвертый, за ними слѣдующій, считается високоснымъ.

ANNÉE COMMUNE. Простой или общій годъ состоитъ изъ 365 дней.

ANNÉE BISSEXTILE. Високосный годъ содержащій въ себѣ 366 дней. Смол. выше.

ANNÉE LUNAIRE. Лунный годъ, подобно солнечному, раздѣляется на астрономическій и гражданскій.

Лунный астрономический годъ состоитъ изъ двѣнадцати синодическихъ лунныхъ мѣсяцевъ. Лунный мѣсяцъ измѣряется или временемъ, которое луна употребляетъ для возвращенія къ одной и той же почти равноденственной, или временемъ, которое проходитъ между двумя послѣдовательными новолуніями. Первый мѣсяцъ называется *періодическимъ* (*mois périodique*), и равенъ 27 д. 7 ч. 43 м. 6; второй, *синодическимъ* (*mois synodique*), и равенъ 29 д. 12 ч. 44 м. 5 с. Слѣдовательно, лунный астрономическій годъ содержитъ 354 д. 8 ч. 48 м. 56 с.

Такъ какъ синодическій мѣсяцъ почти равенъ 29 суткамъ съ половиною, то поэтому принимаютъ **лунный гражданскій мѣсяцъ** состоящимъ попеременно изъ 29 и 30 дней.

Лунный гражданскій годъ раздѣляется на *простой* и на *вѣстовой*.

Простой лунный годъ (*année lunaire commune*) состоитъ изъ двѣнадцати гражданскихъ лунныхъ мѣсяцевъ, слѣдовательно, изъ 354 дней.

Вѣстовой лунный годъ (*année embolismique* или *intercalaire*) состоитъ изъ тринадцати такихъ мѣсяцевъ, или 384 дня.

ANNOTATION. (Анал.) ЗНАКОПОЛОЖЕНІЕ, ОБОЗНАЧЕНІЕ. То же, что NOTATION (См.)

ANNUAIRE. МѢСЯЦОСЛОВЪ, КАЛЕНДАРЬ.

ANNUITÉS (А.м.) СРОЧНЫЯ, ГОДОВЫЯ УПЛАТЫ. Когда заемщикъ, должный нѣмъ капиталъ съ процентами, уплачиваетъ въ равновременные сроки, то взносы въ такомъ случаѣ называются *срочными уплатами*.

Чтобы найти отношеніе, существующее между капиталомъ, который слѣдуетъ выплатить, и срочными уплатами, надлежитъ отнести къ одному и тому же времени какъ величину капитала, такъ и действительныя значенія послѣдовательныхъ уплатъ. Изобразимъ чрезъ A уплачиваемый капиталъ, чрезъ a годовую уплату, и чрезъ r такую процентную со 100; См. INTERÊT. Пусть будетъ t число сроковъ, напримѣръ годовыхъ предполагаемыхъ для погашенія долга A .

По наступленіи перваго срока, напримѣръ, по истеченіи перваго года, долгъ заемщика, увеличенный процентами, будетъ $A \left(1 + \frac{d}{100}\right)$; См. INTERÊT SIMPLE; но онъ уплачивается суммою a

слѣдовательно, долгъ его будетъ только

$$A \left(1 + \frac{d}{100}\right) - a.$$

По наступленіи втораго срока, вносимъ долгъ, съ присовокупленіемъ къ нему годовыхъ процентовъ, будетъ

$$\left[A \left(1 + \frac{d}{100}\right) - a\right] \left(1 + \frac{d}{100}\right) = A \left(1 + \frac{d}{100}\right)^2 - a \left(1 + \frac{d}{100}\right);$$

но такъ какъ, по предположенію, заемщикъ въ каждый срокъ вноситъ сумму a , то, послѣ второй уплаты, останется за нимъ сумма

$$A \left(1 + \frac{d}{100}\right)^2 - a \left(1 + \frac{d}{100}\right) - a.$$

Точно такимъ образомъ найдемъ, что послѣ третьей уплаты, долгъ опредѣлится выраженіемъ

$$A \left(1 + \frac{d}{100}\right)^3 - a \left(1 + \frac{d}{100}\right)^2 - a \left(1 + \frac{d}{100}\right) - a,$$

и такъ далѣе. По наступленіи послѣдняго срока, то есть, по истеченіи t лѣтъ, и когда послѣдняя годовая уплата a будетъ внесена заемщикомъ, долгъ его очевидно выразится чрезъ

$$A \left(1 + \frac{d}{100}\right)^t - a \left(1 + \frac{d}{100}\right)^{t-1} - a \left(1 + \frac{d}{100}\right)^{t-2} - \dots - a \left(1 + \frac{d}{100}\right) - a,$$

и эта величина, по условію вопроса, должна обратиться въ нуль. Слѣдовательно

$$A \left(1 + \frac{d}{100}\right)^t =$$

$$a \left[\left(1 + \frac{d}{100}\right)^{t-1} + \left(1 + \frac{d}{100}\right)^{t-2} + \dots + \left(1 + \frac{d}{100}\right) + 1 \right].$$

Вторая часть этого уравненія содержитъ въ себѣ члены, составляющіе геометрическую прогрессию; опредѣливъ ихъ сумму по извѣстнымъ правиламъ (См. PROGRESSION GÉOMÉTRIQUE), найдемъ

$$A \left(1 + \frac{d}{100}\right)^t = a \frac{\left(1 + \frac{d}{100}\right)^t - 1}{\left(\frac{d}{100}\right)},$$

или, полагая для краткости $1 + \frac{d}{100} = r$,

$$Ar^t = a \frac{r^t - 1}{r - 1}.$$

Въ этомъ послѣднемъ уравненіи заключается рѣшеніе всѣхъ задачъ о *годовых уплатахъ*. Если желать, по данной величинѣ годовой уплаты, опредѣлить величину уплачиваемаго капитала, то опредѣляемъ A изъ предыдущаго уравненія, и находимъ:

$$(1) \quad A = \frac{a(r^t - 1)}{(r - 1)r^t}.$$

Если взять в виду найденную величину годовой уплаты по данному долгу A , то выводить из этого же уравнения, и получаем:

$$(2) \quad a = \frac{A(r-1)r^t}{r^t-1}.$$

Еще могут представиться следующие два вопроса: 1° Определить число лет t , потребных для погашения известного долга A , когда величина годовой уплаты a и такса процентов даны. 2° Найти таксу процентов по данным A , a и t .

Для решения первого из сих двух вопросов, дасть которомунибудь из предыдущих уравнений вид

$$r^t = \frac{a}{a-A(r-1)},$$

и взяв логарифмы, получаем

$$t \log. r = \log. a - \log. [a - A(r-1)],$$

откуда

$$(3) \quad t = \frac{\log. a - \log. [a - A(r-1)]}{\log. r}.$$

Для решения второго вопроса, следует определить из уравнения

$$(4) \quad [a - A(r-1)] r^t = a$$

неизвестную r ; оно будет степени $t+1$, и следовательно, čím значительнее число сроков, тѣм выше степень сего уравнения и сложнее решение вопроса. Для примера приведем следующую задачу:

Спрашивается, какую сумму надобно внести ежегодно, чтобы выплатить 100000 рублей в 10 летъ, считая по 5 процентов со ста'

Здѣсь $A = 100000$ р., $t = 10$, $r = 1 + \frac{5}{100} = 1,05$, а величина a неизвестна. Следовательно, надлежит употребить формулу (2), которая доставляетъ

$$a = \frac{100000 \times 0,05 (1,05)^{10}}{(1,05)^{10} - 1};$$

производя означенный здѣсь выкладки (для помощи, посредством логарифмовъ), найдемъ

$$a = 12949 \text{ руб. } 12 \text{ коп.}$$

ANNULAIRE (SURFACE), TORE, ARMILLE, ANNEAU. (Геом.) КОЛЬЦЕВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ, КОЛЬЦО.

Такъ называется поверхность вращения, образуемая кругомъ, обращающимся около прямой линіи. При обращеніи круга, его плоскость должна заключать въ себѣ ось вращения, а центръ оставаться въ плоскости, перпендикулярной къ сей оси. Расстояние же центра

отъ этой самой оси, превышающее радиусъ круга произвождителя, предполагается постояннымъ.

Изъ правила Гюльмена [Смол. CENTROBA-RIQUE (MÉTHODE)] следуетъ, что объемъ кольцевой поверхности равенъ произведению окружности круга, описываемаго центромъ производящаго круга, на площадь сего послѣдняго; а поверхность кольца, произведѣнію той же окружности, на окружности производящаго круга.

ANNULER или ANÉANTIR. УРАВНЯТЬ НУЛЮ, УНИЧТОЖИТЬ.

En annulant l'expression $4x-1$, l'on tire $x = \frac{1}{4}$. Уравнивая нулю выраженіе $4x-1$, выводимъ $x = \frac{1}{4}$. S'annuler, s'anéantir; обратиться въ нуль, уничтожиться.

ANOMALIE. (Астр.) (Отъ греческаго α , безъ, и $\nu\alpha\lambda\acute{o}\varsigma$, равный, собственно: *неравность*).

АНОМАЛІЯ. Аномалію въ Астрономіи называется вообще всякая неравность въ движеніи свѣтила, или отклоненіе ихъ отъ известнаго порядка; преимущественно же аномалію называется уголъ при солнцѣ*), заключающійся между радиусомъ вѣтхороны планеты и большою осью эллипса, описаннаго планетою. Пусть ADB (черт. 1, листъ II) половина эллипса, описаннаго планетою, S его центръ, SA большая, а CD малая полуось, S солнце въ фокусѣ, CS эксцентриситетъ, p мѣсто планеты, следовательно Sr ея истинное разстояніе отъ солнца; уголъ ASp называется истинною аномаліею (*anomalie vraie*) планеты. Если на диаметръ AB опишемъ полуокругъ ADB , поможемъ изъ точки p опустить перпендикуляръ на AB , и продолжимъ его до пересѣченія съ кругомъ въ P , то уголъ ACP , или дуга AP , заключающаяся между A и верхнею точкою P перпендикуляра MP , называется эксцентрическою аномаліею (*anomalie excentrique*). Изъ солнца S произвольнымъ радиусомъ, наприимр SA , опишемъ кругъ $AFGH$, и вообразимъ, что по окружности сего круга движется равномерно какая нибудь точка въ одну сторону съ планетою, и примемъ такъ, что точка и планета проходятъ чрезъ большую ось AB эллипса въ одно время и въ той же сторонѣ въ разсужденіи солнца; следовательно, время обращенія точки въ кругъ будетъ равно времени обращенія планеты въ эллипсѣ. Положимъ теперь,

*) Вообще при центральныхъ тѣлахъ, около которыхъ движется другое тѣло, и описывается кругъ, эллипсъ, парабола или гипербола.

что планета и точка начали двигаться въ одно и то же время из A , и что послѣ времени t планета пришла въ P , а движущаяся точка въ P' ; въ такомъ случаѣ уголъ ASP' называется *среднею аномаліею* (*anomalie moyenne*), а движущаяся точка называется точкой — *среднею планетою* (*astre fictif*).

Выраженіе средней аномаліи посредствомъ дуги круга много облегчается вычисленіемъ, и основано на вѣдомомъ законѣ Кеплера, въ силу котораго площадь, описанная планетою, пропорциональна времени, — и еще на томъ изображеніи, что въ кругѣ площади пропорціональны дугамъ. Если дѣлимъ площади круга и эллипса описанныя въ одно время и при томъ шажъ, что въ кругѣ движенье равномерное, а въ эллипсѣ оно подчиняется упомянутому сей-часъ Кеплерову закону, то площади, описанныя радиусомъ секторомъ въ эллипсѣ, будучи пропорціональны дугамъ круга, въ тѣ же времена описанными. Средняя аномалія есть главнѣйшій элементъ при вычисленіи истиннаго экванта планетъ для даннаго времени, и поэтому она составляетъ основаніе всѣхъ астрономическихъ таблицъ. Аномалія акценсиритическая служитъ въ Анализѣ для вычисленія аномаліи истинной посредствомъ средней, и обратно; и шажъ, она есть вспомогательная величина, служащая для перехода отъ средней аномаліи къ истинной, а отъ истинной къ средней.

Опредѣленіе истинной аномаліи въ функции средней, или угла Asp посредствомъ эллиптического сектора, принадлежитъ къ числу важнѣйшихъ вопросовъ къ Астрономіи, и извѣстенъ подъ наименованіемъ *Кеплеровой задачи*. Смот. KEPLER (PROBLÈME DE). Сей знаменитый Астрономъ раздѣлилъ ее приближенно, и повѣстивъ въ превосходномъ сочиненіи своемъ: *De stella Martis*. Валлисъ и Нютонъ рѣшили ее посредствомъ продолговатой циклоиды; но ихъ рѣшеніе въ практической Астрономіи не употребляется. Вычисления задвигались шажъ предъ именемъ Лавуэра, Кейля, Кассини, Германна, Мехелъ, Симсона, Лаланды, Даниэля, Боссю, Лабланжа, Деламбэра, Оріани, Шуберта, Гауса, Лапласа, и проч. Смот. *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1710 и 1719; *Transactions philosophiques* 1707 и 1713; *Mémoires de Pétersbourg* T. I, *Prix de l'Académie* 1766; *Mémoires de l'Académie de Berlin* 1769; *Trigonométrie*

de Cagnoli; Astronomie de Lalande; Astronomie par Delambre; Astronomie par Schubert.

ANOMALISTIQUE. АНОМАЛИСТИЧЕСКІЙ.

Аномалистическое обращеніе планеты есть такое, которое она употребляетъ для описанія дѣлаго эллипса, или, что все равно, для возвращенія въ точку же абсиды, изъ котораго вышла. Это время было бы равно звѣздному обращенію, еслибы абсиды не имѣли движенья; но абсиды всѣхъ планетныхъ путей, исключая путь Венеры, движущіяся въ разсужденіи звѣздъ впередъ или по порядку знаковъ. Смот. АРНЕБЛЕ. И шажъ, аномалистическое обращеніе всѣхъ планетъ, за исключеніемъ Венеры, болѣе звѣзднаго ихъ обращенія; но аномалистическое обращеніе Венеры менѣе звѣзднаго. — *Année anomalistique; anomalistique année*. Смот. ANNEE.

ANSE DE PANIER. (Геом.) ЛОЖНЫЙ ЭЛЛИПСЪ; КОРОВОВАЯ ДУГА; КОРОМЫСЛО.

Такъ называется кривая $AEDHB$ (черт. 19, листъ 1), похожая на эллипсъ, и образуемая нѣсколькими круговыми дугами, вогнутыми въ одну сторону. Сумма угловъ, измѣряющихъ сѣку дугами, равняется дугѣ, пролегающей угловъ. Дуга дугъ, соединяющихъ концы эллипса, должно быть всегда нечетное. Средняя изъ нихъ FDH дѣлится пополамъ линіею CD , именуемою *высотой ложнаго эллипса*.

На черт. 19 представляется ложный эллипсъ *о трехъ дугахъ*. Пусть AB изображаетъ его діаметръ, C средину сей линіи. Изъ точки C воздвигается перпендикуляръ, который беретъ равныя CD , то есть *высоту ложнаго эллипса*. Пусть будутъ AF и BH крайнія дуги, а FDH средняя. Центры K и L крайнихъ дугъ должны находиться на діаметрѣ AB , чтобы касательныя въ точкахъ A и B были перпендикулярны къ этому діаметру, какъ въ эллипсѣ. Равнымъ образомъ, центры E средней дуги, должны находиться на продолженной линіи CD или FDH , чтобы касательная въ точкѣ D была параллельна діаметру AB , какъ и въ эллипсѣ. Удовлетворяя сему условію, очевидно удовлетворяемъ и остальнымъ, въ сдѣланіе котораго, сумма трехъ угловъ, измѣряемыхъ тремя дугами AF , BH и FDH должна равняться 180° . Дѣйствительно, уголъ измѣряемый дугою AF есть

AKP, или, что всё равно *BKM*, дуга *BF* вписана в угол *BMP* или *BMK*, а средняя дуга *BDH* углов *KBM*. Но сумма углов *BKM*, *BMK* и *KBM* очевидно равна двум прямым. — Ложные величины употребляются в Сирошельном Искусстве. Нередко сводимы даются виды ложных величин, и иногда они называются *коробовыми* *сводами*.

ANTECEDENT. (Ариф.) **ПРЕДЫДУЩИЙ.** Первый член отношения; второй именуется *последующим* (*conséquent*). Геометрическая пропорция имеет два *предыдущих* и два *последующих*. Например, в пропорции

$$a : b :: c : d,$$

a и *c* называются *предыдущими*, а *b* и *d* *последующими*.

Из этого видно, что когда отношение написано в виде дроби, то ее числитель можно назвать *предыдущим*, а знаменатель *последующим*. Смол. **PROPORTION.**

ATELONGIORES, то же что **BARLONGS** (Смол.)

ANTICARTÉSIENS. **АНТИКАРТЕЗИАНЫ.** Проповедники Декартовой системы о вихрях. См. **TOURBILLONS (SYSTÈME DES).**

ANTI-DÉVELOPPÉE. (Геом.) **ПРОТИВУ-РАЗВЕРЖАЮЩАЯСЯ, АНТИ-ЗВЛУТА.** Смол. **DÉVELOPPÉE.**

ANTILOGARITHME или **MÉSALOGARITHME.** (Анал.) **АНТИЛОГАРИТМЪ** или **ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ; ОБРАТНЫЙ ЛОГАРИТМЪ.** Так называют иногда дополнение логарисма синуса, тангенса, секанса. Смол. **COMPLÈMENT DU LOGARITHME.**

ANTIPARALLÈLES (LIGNES). (Геом.) **АНТИПАРАЛЛЕЛЬНЫЯ ЛИНИИ.** Проведенъ въ плоскости двѣ какия ни есть линіи *A* и *B*; пусть будутъ *C* и *D* двѣ другія линіи, пересѣкающія *A* и *B*. Если уголъ, составленный прямою *C* съ линією *A* или *B*, равенъ углу, составленному прямою *D* съ линією *B* или *A*, то линіи *C* и *D* называются *антипараллельными*. Онѣ были бы параллельны между собою, еслибы уголъ, составленный линією *C* съ *A* или *B*, равнялся углу, составленному прямою *D* съ *A* или *B*.

Слѣние косого монууса съ круговымъ основаніемъ, плоскостію *антипараллельною* его основанію, есть *крутъ*.

ANTITHÈSE. Утѣм. сл. то же что **TRANSPOTITION.** (Алг.) **ПЕРЕНОСЕНІЕ.** Такъ называютъ некоторые алгебрисмы дѣйствіе, посредствомъ котораго переносится какойнибудь членъ уравненія изъ одной части въ другую. И такъ, изъ уравненія $x^2 + px - q = 0$; выходящаго, *черезъ перенесеніе* (*par antithèse*), $x^2 + px = q$.

АР.

ARAGOGIE или **DÉMONSTRATION ARAGOGIQUE.** **АПАГОГИЯ, АПАГОГИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО;** доказательство какаго либо предложенія тѣмъ путемъ, когда показывается невозможность противоположнаго ему предложенія.

ARÉLÉE. (Астр.) **АФЕЛІЙ.** Онь Греческ. *айо*, далеко, и *релес*, солнце. Точка пути планеты, въ которой ея разстояніе отъ солнца бываетъ наибольшее. Афелий есть одна изъ двухъ крайнихъ точекъ большой оси алиниса, описываемаго планетою, и дальнѣйшая отъ солнца; другая крайняя точка этой самой оси, противоположная первой, и ближайшая къ солнцу, называется *Перигелий* (*Périhélie*). — Въ древнихъ системахъ Астрономіи, въ которыхъ земля предполагается неподвижною въ центрѣ Вселенной, Афелий обращался въ *Апогей* (*Apoée*), а Перигелий въ *Перигей* (*Périgée*). Онь взаимнаго притяженія планетъ, сіи точки имѣютъ безпрерывное движеніе отъ Запада къ Востоку, исключая асиды Венеры, которые движутся противъ порядка знаковъ; скорости движенія, при разныхъ планетахъ, различны, что можно видѣть изъ прилагаемой здѣсь таблицы.

	Вѣковое движеніе перигелия планеты.	
	Западное:	Восточное:
Меркурій . . .	585", 56	5604", 69
Венера . . .	— 276, 85	4756, 36
Земля . . .	1179, 81	6200, 94
Марсъ . . .	1582, 42	6603, 56
Юпитеръ . . .	685, 86	5685, 00
Сатурнъ . . .	1957, 07	6958, 20
Уранъ . . .	293, 33	5260, 46

Подъ *Апогеемъ* въ древней Астрономіи разумѣли точку, въ которой планета находится въ дальнѣйшемъ разстояніи отъ земли. Разсматривая только видимое движеніе, еще и теперь говорятъ, что солнце находится въ *Апогей*, когда земля пришла въ свой Афелий. Апогей противопологается

Перигей, или точка, въ которой планета находится въ ближайшемъ разстояніи отъ земли.

Такъ какъ луна движется въ эллипсѣ, коего одинъ фокусъ занимаетъ земля, то постоноу, когда луна приходитъ въ точку своего эллипса, дальнѣйшую отъ земли, тогда она дѣйствительно находится въ Апогее; а въ Перигей въ то время, когда приходитъ въ точку, ближайшую къ землѣ.

APLANÉTIQUE (COUVERTE). (Геом.) АПЛАНЕТИЧЕСКАЯ КРИВАЯ.

Кривая такого свойства, что всѣ лучи, исходящіе изъ одной свѣтящейся точки, и падающіе на сію кривую, собираются, по преломленію, въ одинъ фокусъ. Изобразивъ чрезъ s и r разстоянія какой нѣсть точки кривой отъ свѣтящейся точки и отъ фокуса, въ которомъ собираются преломленные лучи, получимъ слѣдующее уравненіе для апланетической кривой:

$$\frac{r}{\lambda} - \frac{r_1}{\lambda_1} = c,$$

гдѣ $\frac{r}{\lambda}$ означенъ показателемъ преломленія (*dénominateur de la refraction*), а c постоянную величину. Если же изобразимъ чрезъ a, b координаты свѣтящейся точки, чрезъ a_1, b_1 координаты фокуса, а чрезъ x и y прямоугольныя перемѣны координаты кривой, то предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$\frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}{\lambda} - \frac{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2}}{\lambda_1} = c.$$

Изъ этого уравненія видимъ, что апланетическая кривая принадлежитъ къ разряду кривыхъ четвертаго порядка.

Названіе *апланетической кривой* предложилъ Г. Кетеле, Профессоръ въ Брюсселѣ, занимающійся съ успѣхомъ нѣкоторыми числами Элементарной Математики.

APLATI. (Геом.) СЖАТЫЙ. *Sphero de aplat*, сжатый сфероидъ; такой, у коего ось менѣе діаметра экватора.

APLATISSEMENT. СЖАТИЕ, СПЛЮЩЕННОСТЬ. *Aplatissement du sphéroïde terrestre*; сжатіе земнаго сфероида. См. FIGURE DE LA TERRE.

APLOMB. (Практ. Геом.) ОТВѢСНО, ВЕРТИКАЛЬНО. Перпендикулярно къ горизонтальной плоскости. *Être aplomb* или *il a plomb*, отвѣснъ, отвѣснъ; вѣснъ съ свѣцовою гирею.

АРОГЕЕ. (Астр.) АПОГЕЙ. См. APHÉLIF. APOLLONIENNES (PARABOLE et HYPERBOLE).

(Геом.) АПОЛЛОНІЕВЫ ПАРАБОЛА и ГИПЕРБОЛА. Такъ называютъ иногда параболу и гиперболу, втораго порядка, для отличенія ихъ отъ другихъ, высшихъ порядковъ.

Аполлоній, родомъ изъ Пергея, члѣнъ въ Памфиліи, прозванный постоноу *Пергесіемъ* (*Pergasus*), родился околѣ 280 лѣтъ до Р. Х. Онъ написалъ подробный трактатъ о коническихъ сеченіяхъ, который дошелъ до насъ почтѣ въ цѣлости. Сей знаменитый въ древности Геометръ, первый наименовалъ *параболой*, *эллипсоидомъ* и *гиперболой* коническія кривыя. Эти названія, нѣсколько отличающія коническія кривыя другъ отъ друга, но еще характеризующія каждую изъ нихъ въ особенностяхъ, сохранились до нашихъ временъ. См. въ слѣдующихъ PARABOLE, ELLIPSE, HYPERBOLE этиологію этихъ словъ.

АРОМЭСОМЕТРИЕ. АПОМЕКОМЕТРИЯ. Измѣреніе разстояній. Наука, относящаяся къ Тригонометріи.

АРОРЕ, АРОРОН или АПОРИСМЕ. АПОРИЗМЪ.

Трудная, неразрѣшимая, неприсущая задача. Названіе, данное нѣкоторыми древними математиками такимъ задачамъ, коихъ рѣшеніе было чрезвычайно затруднительно, хотя невозможность рѣшить ихъ и не была доказана. Нѣкоторыя изъ сихъ задачъ были даже вовсе неразрѣшимы. Таковы напримѣръ: *геометрическое раздѣленіе всякаго угла на три равныя части, квадратура круга, удвоеніе куба* и проч. См. TRISECTION DE L'ANGLE, QUADRATURE DU CERCLE, DUPLICATION DU CUBE.

АРОТНЕМЕ. (Геом.) АПОТЕМА. Длина перпендикуляра, опущеннаго изъ центра многоугольника на одну изъ его сторонъ, или, что все равно, радіусъ вписаннаго круга, если многоугольникъ правильный — *Апотемою* также называютъ наклонную сторону конуса.

АРОТОМЕ. (Арие. и Геом.) АПОТОМА. Слово употребляемое нѣкоторыми математиками для означенія разности между двумя несоизмѣримыми величинами. Такова напримѣръ разность $\sqrt{2} - 1$. Въ Геометріи это слово имѣетъ то же значеніе. Разность между діагональю квадрата и его стороною есть *апотоме*. См. BINOME.

APPAREIL. ПРИБОРЪ, СНАРЯДЪ. Вообще на-
кая либо физическая машина. *Appareil d'Atwood,*
Атвудовъ приборъ.

APPARENCE. (Персн.) **ИЗОБРАЖЕНИЕ. — ВИ-
ДИМОСТЬ.** Изображеніе или прозвѣція какого
либо тѣла или предмета на картинной плоскости.

APPARENT. (Персн.) **ВИДИМЫЙ.** *Lieu apparent,*
видимое мѣсто; то мѣсто, въ которомъ видимъ
предметъ. Напримеръ, когда употребляемъ зри-
тельную спектля или зеркала, то видимъ предметъ
не въ истинномъ его мѣстѣ, а въ другомъ, бли-
жайшемъ, и это мѣсто называется *видимымъ.*
Смощ. *VISION, MIROIR, TÉLESCOPE* и проч.
*Horison apparent, visible или sensible, видимый гори-
зонтъ.* Смощ. *HORISON.* — *Ligne de niveau appa-
rent, линия видимого уровня.* Горизонтальная линія,
то есть, линія перпендикулярная къ направ-
ленію ошѣса. Смощ. *NIVEAU.* — *Diamètre appa-
rent; видимый диаметръ* тѣла называющагося
угломъ, подъ которымъ истинный диаметръ пред-
ставляется глазу наблюдателя. Этотъ уголъ
очевидно уменьшается по мѣрѣ удаленія тѣла.
*Diamètre apparent du soleil, de la lune; видимый диа-
метръ солнца, луны.* — *Movement apparent; види-
мое движеніе.* Кажущееся движеніе тѣла, или
дѣйствительно движущагося, или находящагося
въ покоѣ, между тѣмъ какъ глазъ наблюдателя
непрестанно движется самъ.

APPLANISSEMENT. (Геом.) **РАЗВЕРТЫВАНІЕ,
СПЛОСКИВАНІЕ;** приведеніе кривой поверхно-
сти, когда только это возможно, въ состояніе
плоскости; См. *DÉVELOPPABLE (SURFACE).*
Surface aplaniée, развернутая кривая; кривая линія,
называется *развернутой,* когда разсматриваютъ
ее въ плоскости разверзанія той поверхности,
на которой она первоначально была начерчена.

APPLICATION. или, употребительнѣе **SUPERPO-
SITION.** (Геом.) **НАЛОЖЕНІЕ.** Дѣйствіе, по-
средствомъ котораго налагаютъ линію, фигуру,
и проч. одну на другую. Напримеръ, въ Геомет-
ріи доказываютъ, *посредствомъ наложенія,* что
два иреугольника, имѣющіе общее основаніе и
прилежащіе углы равные, равны между собою. —
Иногда подъ словомъ *application* разумѣютъ въ
Геометріи то дѣйствіе, которое въ Арифметикѣ
называется *дѣленіемъ.*

APPLICATION. (Мех.) **ПРИЛОЖЕНІЕ.** *Application*
d'une force à un point matériel, приложеніе силы къ
материальной точкѣ. Смощ. *FORCE.*

APPLICATION d'une science à une autre. **ПРИЛО-
ЖЕНІЕ, прилмненіе, приспособленіе** одной науки
къ другой. Когда, для усовершенія какой нибудь
науки, вводятъ въ нее правила и истины другой,
то говорятъ, что вторую науку *прикладываютъ*
къ первой.

**APPLICATION DE L'ALGÈBRE или DE L'ANALYSE A
LA GÉOMÉTRIE;** Приложение Алгебры или
Анализа къ Геометріи. См. *GEOMETRIE.*
APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE A L'ALGÈBRE.
Приложеніе Геометріи къ Алгебрѣ.

**APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE ET DE L'ALGÈBRE
A LA MÉCANIQUE;** Приложение Геометріи и
Алгебры къ Механикѣ.

APPLICATION DE LA STATIQUE A LA GÉOMÉTRIE;
Приложеніе Статики къ Геометріи, пре-
имущественно состоящее въ употребленіи цен-
тровъ тяжести при опредѣленіи объемовъ тѣлъ.
Смощ. *CENTROBARIQUE (METHODE);* также
BARICENTRIQUE, CALCUL.

APPLIQUÉE. ОРДИНАТА, ПРИЛОЖЕННАЯ.
Смощ. *ORDONNÉE,* также *ABSCISSE.*

SCIENCES APPLIQUÉES. Прикладныя науки. *Ma-
thématiques appliquées, Mécanique appliquée; приклад-
ная Математика, Механика.* Смощ. *MATHE-
MATIQUES, MÉCANIQUE* и проч.

APPLIQUER или SUPERPOSER. (Геом.) **НАЛО-
ЖИТЬ.** *Appliquer une droite sur une autre, наложить*
прямую линію на другую. — *Appliquer une science*
a une autre, приложить одну науку къ другой. —
Appliquer; раздѣлить. Смощ. *APPLICATION.*

APPLIQUER. (Мех.) **ПРИЛОЖИТЬ.** *Deux forces*
appliquées à un même point; двѣ силы приложенныя
къ одной и той же точкѣ. Смощ. *FORCE.*

APPRECIABLE (QUANTITÉ). (Анал.) **ОЩУТИ-
ТЕЛЬНАЯ, ЧУВСТВОВАТЕЛЬНАЯ ВЕЛИЧИНА.**
Такъ называется величина, хотя малая, но ко-
торая однажы можетъ быть выражена, и не
должна быть опкидываема въ вычисленія. Въ
этомъ самомъ смыслѣ употребляющъ слово *AS-
SIGNABLE (QUANTITE),* (Смощ.).

APPROCHÉE (VALEUR). (Анал.) **ПРИБЛИЖЕН-
НАЯ, ПРИБЛИЗИТЕЛЬНАЯ ВЕЛИЧИНА.**
Такъ называется величина какого либо количества,

мало развинувшая опыт истинного его значения, и тем не менее она будет распознавать опыт того значения, к которому приложенные будет эта величина.

Различение приближенных величин весьма важно по своим многообразным приложениям в математическом Анализе. Действительно, часто определение истинных значений количеств приводится к вычислениям сложным до такой степени, что они почти не могут быть произведены; но еще чаще случается, что разыскание сих истинных значений превосходить силы настоящего Анализа; и тогда, чтобы сослаться себя приближенное понятие об искомым количествам, мы, по необходимости, должны прибегать к их приближенным величинам; но даже и в таком случае, не всегда достигается цель. Способы, посредством которых определяются приближенные величины, называются *способами приближения* (*méthodes d'approximation*). Если бы они дали надлежащую степень точности, то можно бы было обойтись без истинных величин; но, по истине, способов приближения мы разумеем такой, который, при выкладках удобопроизводимых, приводит к определению величины, по произведению мало-разнующей от истинной, и сверх того, доставляющей пределы погрешностей, то есть, пределы разности между истинным значением искомого количества, и пою приближенною величиною, на которой останавливаемся.

Важнейшие вопросы из Естественной-Философии решаются посредством способов приближения. К сожалению, в большей части случаев, их нельзя назвать точными, ибо, чаще всего, пределы погрешностей остаются неизвестными.

Упомянутый выше по своей простоте способ приближения есть *Ньютонов*. Вошь в тем он состоит.

Положим, что имеем m уравнений:

$$f_1(x, y, z, \dots) = 0$$

$$f_2(x, y, z, \dots) = 0$$

$$f_3(x, y, z, \dots) = 0$$

.....

с m неизвестными x, y, z, \dots . Предполагается, что первая приближенная величины сих последних известны; пусть будут они соответственно a, b, c, \dots . После сего принимаем $x = a + \varepsilon, y = b + \varepsilon', z = c + \varepsilon'', \dots$, где $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots$

изображают довольно малые количественности. Предупреждение уравнения обращаются в следующие:

$$f_1(a + \varepsilon, b + \varepsilon', c + \varepsilon'', \dots) = 0$$

$$f_2(a + \varepsilon, b + \varepsilon', c + \varepsilon'', \dots) = 0$$

$$f_3(a + \varepsilon, b + \varepsilon', c + \varepsilon'', \dots) = 0$$

.....

По способу Ньютона, надлежит в этих уравнениях заменить только первыми степенями количеств $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots$ по причине их малости; в следствие такого условия, они примут вид линейных уравнений:

$$A_1 + B_1\varepsilon + C_1\varepsilon' + D_1\varepsilon'' + \dots = 0$$

$$A_2 + B_2\varepsilon + C_2\varepsilon' + D_2\varepsilon'' + \dots = 0$$

$$A_3 + B_3\varepsilon + C_3\varepsilon' + D_3\varepsilon'' + \dots = 0$$

.....

которые легко могут быть разрешены. Таким образом, получаются вторые приближенные величины $a + \varepsilon, b + \varepsilon', c + \varepsilon'', \dots$ неизвестных x, y, z, \dots . Изобразив их через a', b', c', \dots , и действуя над сим последними точно так же как над a, b, c, \dots , получим третьи приближенные величины a'', b'', c'', \dots , и так далее.

Но к сожалению случается часто, что величины a, b, c, \dots , доставляемые сим способом, бывают весьма значительными, между тем как оне предполагались довольно малыми, отчего приближение становится ошибочным. Такой случай встречается, например, в определении возмущений, коим подвергается движение планет около солнца; исследование такого движения привело к затруднению величайших геометров, Эйлера и Лагранжа, подчинивших Анализу возмущения планет. Но они исправили прежний способ введением весьма остроумных приемов, тем положили основание важной теории возмущений элементов планетных орбит. См. PERTURBATION. В других исследованиях, например, в теории движения жидкостей, способ Ньютона представлял другого рода неудобство, именно: мы остаемся в неизвестности относительно величин, которые пренебрегаются, то есть, не видим, как велики должны быть наши погрешности. Даже, при решении численных алгебраических уравнений, способ Ньютона в том виде, в каком он его предложил, часто представлял сказанное неудобство. Известный Французский математик Фурье, исправил в этом

ошибочности сей способъ. Поэтому, для опредѣленія корня алгебраическаго уравненія $f(x) = 0$, предполагая, что величина этого корня известна по приближенію до $\frac{1}{10}$. Пустьъ будетъ a эта приближенная величина, предполагая $x = a + \varepsilon$, получимъ $f(a + \varepsilon) = f(a) + f'(a)\varepsilon + f''(a)\frac{\varepsilon^2}{1.2} + f'''(a)\frac{\varepsilon^3}{1.2.3} + \dots$ [Смол. TAYLOR (THEOREME DE)]. Но такъ какъ $f(a + \varepsilon) = 0$, и какъ сверхъ того члены, заключающіе въ себѣ множители $\varepsilon^2, \varepsilon^3$ и проч. должны быть отброснуты, то получимъ:

$$f(a) + f'(a)\varepsilon = 0 \text{ откуда } \varepsilon = -\frac{f(a)}{f'(a)};$$

следовательно, вторая приближенная величина для x будетъ $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$; изъ этой второй приближенной величинъ выведемъ третью, изъ третьей четвертую, и такъ далѣе. Но такъ какъ значенія опускаемыхъ членовъ $f''(a)\frac{\varepsilon^2}{1.2}, f'''(a)\frac{\varepsilon^3}{1.2.3} \dots$ могутъ быть одного и того же порядка величины съ неопущенными $f(a)$ и $f'(a)\varepsilon$, то можетъ случиться (и на самомъ дѣлѣ часто случается), что последовательныя приближенныя величины, вѣсто того чтобы приближаться болѣе и болѣе къ значенію корня, напротивъ того удаляются отъ него, и наоборотъ менѣе точны первой величины a . Фурье доказалъ, что значеніе $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ будетъ ближе къ истинной величинѣ корня не жели a , если знаемъ два предѣла a и b , такіе, что между ними заключается только одинъ корень функціи $f(x)$, и вѣстѣ съ тѣмъ не заключается ни одного корня функцій $f'(x)$ и $f''(x)$; сверхъ того, надобно еще чтобы функціи $f(a)$ и $f'''(a)$ имѣли одинаковые знаки. Если это последнее условіе не выполнено, то болѣе приближенная величина корня будетъ $b - \frac{f(b)}{f'(b)}$, которая выводится изъ способа Ньютона, когда начинаемъ приближеніе съ большого предѣла b . — И такъ, способъ Ньютона можетъ быть приложенъ только къ тому предѣлу, для котораго $f(x)$ и $f''(x)$ имѣютъ одинаковые знаки, и сверхъ того, допускается еще, что предѣлы искомаго корня заключающіе единственно этотъ корень уравненія $f(x) = 0$, и не заключающіе ни одного уравненій $f'(x) = 0$ и $f''(x) = 0$; снвъ условіямъ вообще легко бываетъ

удовлетворить. Но еслибы мы желали непосредственно начать приближеніе съ меньшаго предѣла a въ томъ случаѣ, когда $f'(a)$ и $f''(a)$ имѣютъ противоположные знаки, то, вѣстѣно величины $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$, слѣдовало бы принять величину $a - \frac{f(a)}{f'(b)}$; равнымъ образомъ, когда функціи $f(b)$ и $f''(b)$ съ противоположными знаками, а приближались къ корню съ предѣла b , то вѣсто значенія $b - \frac{f(b)}{f'(b)}$, надлежитъ принять величину $b - \frac{f(b)}{f''(b)}$.

Покажемъ примѣромъ Ламониковъ способъ приближенія, исправленный Чичъ Фурье.

Пусть будетъ уравненіе третьей степени:

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0,$$

для котораго имѣемъ

$$f'(x) = 3x^2 - 2 = 0$$

$$f''(x) = 6x = 2$$

$$f'''(x) = 6x.$$

Вещественный корень этого уравненія заключается между 2 и 2,1; слѣдовательно, можно принять $a = 2, b = 2,1$. Сверхъ того, легко удостовѣриться, что между предѣлами 2 и 2,1 не заключается ни одного корня функцій $f'(x)$ и $f''(x)$, то есть, уравненій $3x^2 - 2 = 0$ и $6x = 0$. И такъ, если желаемъ начать приближеніе съ меньшаго предѣла a , то опредѣляемъ функціи

$$f(a) = f(2) = -1$$

$$f'(a) = f'(2) = 10$$

$$f''(a) = f''(2) = 12,$$

и, по причинѣ что $f(a)$ и $f''(a)$ съ противоположными знаками, мы должны принять за приближенное значеніе корня величину $a - \frac{f(a)}{f''(b)}$; но $f'(b) = 11,23$, почему вторая приближенная величина корня будетъ $2 + \frac{1}{11,23} = 2,089$, которая ближе къ истинному значенію чѣмъ 2. И дѣйствительно, еслибы продолжали приближеніе по объясненному способу, то нашли бы величину 2,0843, точную до $\frac{1}{10000}$. Начиная съ большого предѣла $b = 2,1$, найдемъ:

$$f(b) = f(2,1) = 0,061$$

$$f'(b) = f'(2,1) = 11,23$$

$$f''(b) = f''(2,1) = 12,6;$$

такъ какъ $f(b)$ и $f'(b)$ съ одинаковыми знаками, то употребляемъ формулу $\delta = \frac{f(b)}{f'(b)}$, и получаемъ для приближенной величины корня число 2,096, которое ближе къ истинному его значенію чѣмъ 2,1.

Что касается до рѣшенія по приближенію дифференціальнаго уравненія по способу Ньютона, то омыслимъ читателю къ труду Г. Остроградскаго: *Note sur la méthode des approximations successives*. (Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersbourg. VI. Serie. Sciences Mathématiques, physiques et naturelles. Tome III.). Въ этой Запискѣ, имѣя знаменитый математикъ предлагающъ значительныя улучшения, которыя возвышаютъ еще достоинство Ньютонова способа.

Сверхъ изложеннаго способа приближенія, есть еще и другіе, менѣе употребительныя, но которые имѣютъ, каждый, свое преимущество. Таковъ способъ приближенія посредствомъ *непрерывныхъ дробей*, предложенный Лагранжемъ. Смотри CONTINUE (FRACTION). Но этотъ способъ можно назвать общимъ только въ отношеніи алгебраическихъ уравненій; что касается до трансцендентныхъ, въ особенности лѣтъ, которые заключаютъ въ себя дифференціалы, то онъ только въ небольшомъ числѣ случаевъ можетъ быть приложенъ.

Для рѣшенія по приближенію алгебраическаго уравненія $f(x) = 0$ посредствомъ непрерывныхъ дробей, ищемъ сперва, чрезъ последовательныя подстановленія, два смежныя цѣлыя числа, между которыми заключаются одинъ или нѣсколько корней. Положимъ, для простоты, что между числами a и $a + 1$, заключается только одинъ корень. Припишемъ $x = a + \frac{1}{z}$, и подставляя эту величину въ предложенное уравненіе, получаемъ $f(a + \frac{1}{z}) = 0$, которое будетъ, относительно z , той же самой степени какъ $f(x) = 0$ въ разсужденіи x . Вывода опирая изъ уравненія $f(a + \frac{1}{z}) = 0$ смежныя числа b и $b + 1$, между которыми заключается корень z , полагаемъ снова $z = b + \frac{1}{z'}$. Здѣсь должно замѣтить, что такъ какъ, по предположенію, между a и $a + 1$ находится только одинъ корень уравненія $f(x) = 0$, то поэтому уравненіе $f(a + \frac{1}{z}) = 0$ будетъ допускать только одинъ корень, большій единицы. Но еслибы между a и $a + 1$, заключалось нѣсколько корней, то

функция $f(a + \frac{1}{z})$ имѣла бы столько же корней, большіхъ единицы; изобразивъ чрезъ $\delta, \delta', \delta'' \dots$ наименьшія цѣлыя числа, ближайшія къ силѣ корня; въ такомъ случаѣ следовало бы приближаться отдѣльно къ каждому изъ корней, коихъ имѣло приближенныхъ величинъ нашлись бы $a + \frac{1}{\delta}, a + \frac{1}{\delta'}, a + \frac{1}{\delta''} \dots$ Возвратимся теперь къ

прежнему нашему предположенію. Мы сказали, что корень x уравненія $f(x) = 0$ заключается между b и $b + 1$, и положили $z = b + \frac{1}{z'}$; подставляя эту величину въ $f(a + \frac{1}{z})$, получимъ опять уравненіе въ z' одинакой степени съ первоначальнымъ $f(x) = 0$, и достигающее, по прежнему, одинъ только корень, большій единицы. Предполагая, что сей послѣдній заключается между c и $c + 1$, возьмемъ $z' = c + \frac{1}{z''}$, и продолжая такимъ образомъ, увидимъ что искомый корень x уравненія $f(x) = 0$, выражается непрерывною дробью

$$x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \dots}}}$$

Самое важное преимущество этого способа состоитъ въ томъ, что при его употребленіи, знаемъ всегда предѣлы погрѣшностей, и можемъ уменьшать ихъ по произволу. Дѣйствительно, по свойству непрерывныхъ дробей (Смотри CONTINUE (FRACTION)), главная дробь $\frac{a}{1}, \frac{ab+1}{b}, \frac{abc+c+a}{bc+1}, \frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b}, \dots$ будутъ попеременно то менѣе, то болѣе искомага корня x .

Возьмемъ, наприхѣръ, разсмотрѣнное нами выше уравненіе

$$x^3 - 2x - 5 = 0;$$

вещественный корень этого уравненія заключается между предѣлами 2 и 3. Следовательно, надлежаще приимавъ $x = 2 + \frac{1}{z}$, тогда получимъ $z^3 - 10z^2 - 6z - 1 = 0$.

Ближайшее цѣлое число, удовлетворяющее этому уравненію, есть 10; и такъ, должно предположить $z = 10 + \frac{1}{z'}$, что приводить къ уравненію $61z'^3 - 94z'^2 - 20z' - 1 = 0$,

для котораго $z' > 1$ и < 2 , почему полагаемъ $z' = 1 + \frac{1}{z''}$, и находимъ $54z''^3 + 25z''^2 - 89z'' - 61 = 0$.

Здѣсь опять $x'' = 1$ и $\frac{1}{x''} = 2$; слѣдовательно, должно принять $x'' = 1 + \frac{1}{x''}$. Точно такъ же обра- зомъ получимъ $x''' = 2 + \frac{1}{x''}$, $x^{IV} = 1 + \frac{1}{x''}$, $x^V = 3 + \frac{1}{x''}$, $x^{VI} = 1 + \frac{1}{x''}$, $x^{VII} = 1 + \frac{1}{x''}$, $x^{VIII} = 12 + \frac{1}{x''}$, и такъ далѣе. Подставляя последовательно вмѣсто x , x' , x'' , x''' , ... ихъ значенія, найдемъ для искомаго корня x слѣдующую непрерывную дробь:

$$x = 2 + \frac{1}{10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{12 + \dots}}}}}}}}}$$

Главная дробь будетъ:

$$\frac{2}{1}, \frac{31}{10}, \frac{35}{11}, \frac{44}{21}, \frac{111}{55}, \frac{165}{74}, \frac{476}{275}, \frac{751}{549}, \frac{1507}{824}, \frac{16415}{7887}, \dots$$

Разлагая шестую дробь $\frac{165}{74}$ въ десятичную, получаемъ уже выводъ 2,0945, согласующійся съ приведеннымъ нами выше. Слѣдующія дроби представляютъ величины корня, болѣе и болѣе точныя; если, напримѣръ, разложимъ въ десятичныя послѣднія двѣ изъ главныхъ дробей, то получимъ

$$\frac{1507}{824} = 2,0945512 \dots$$

$$\frac{16415}{7887} = 2,0945511 \dots$$

откуда заключаемъ, что истинная величина вещественнаго корня уравненія $x^3 - 2x - 5 = 0$, заключаеся между числами 2,0945512 и 2,0945514; слѣдовательно, если возьмемъ которое угодно изъ нихъ, то погрѣшность будетъ менѣе $\frac{2}{10000000}$, ибо первое изъ найденныхъ значеній менѣе корня, а второе болѣе, по свойству непрерывныхъ дробей. Принявъ цифры, общія обѣимъ десятичнымъ дробямъ, найдемъ $x = 2,094551$, гдѣ всѣ цифры точны. —

Для приближенія къ корнямъ алгебраическихъ уравненій было предложено много другихъ способовъ, болѣе или менѣе удовлетворительныхъ. Таковъ между прочими способъ *Данила Бернулли*, основанный на теоріи возвратныхъ рядовъ; Смол. RECURRENTE (SERIE). Положимъ что

данное уравненіе есть $f(x) = 0$, а $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ его корни. Получимъ

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \dots$$

возьмъ производную, и раздѣливъ на $f(x)$, найдемъ

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - \alpha} + \frac{1}{x - \beta} + \frac{1}{x - \gamma} + \dots$$

Но такъ какъ

$$\frac{1}{x - \alpha} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\alpha^2}{x^3} + \frac{\alpha^3}{x^4} + \dots$$

$$\frac{1}{x - \beta} = \frac{1}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\beta^2}{x^3} + \frac{\beta^3}{x^4} + \dots$$

$$\frac{1}{x - \gamma} = \frac{1}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\gamma^2}{x^3} + \frac{\gamma^3}{x^4} + \dots$$

то, изобразивъ чрезъ n степень предложеннаго уравненія, получимъ

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n}{x} + (\alpha + \beta + \gamma + \dots) \frac{1}{x^2} + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots) \frac{1}{x^3} + (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \dots) \frac{1}{x^4} + \dots$$

И такъ, если разложимъ, чрезъ алгебраическое дѣленіе $\frac{f'(x)}{f(x)}$ въ рядъ, простирающійся по воз- растающимъ степенямъ количества $\frac{1}{x}$, то коэф- фиціенты различныхъ степеней $\frac{1}{x}$ будутъ изобра- жать суммы последовательныхъ степеней всѣхъ корней предложеннаго уравненія. Предполагая для краткости

$$S_0 = n$$

$$S_1 = \alpha + \beta + \gamma + \dots$$

$$S_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots$$

$$S_3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \dots$$

$$\dots$$

$$S_{r-1} = \alpha^{r-1} + \beta^{r-1} + \gamma^{r-1} + \dots$$

$$S_r = \alpha^r + \beta^r + \gamma^r + \dots$$

найдемъ

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = S_0 \cdot \frac{1}{x} + S_1 \cdot \frac{1}{x^2} + S_2 \cdot \frac{1}{x^3} + S_3 \cdot \frac{1}{x^4} + \dots + S_{r-1} \cdot \frac{1}{x^r} + S_r \cdot \frac{1}{x^{r+1}} + \dots$$

Легко видѣть, что описаніе двухъ последова- тельныхъ коэффиціентовъ этого ряда, именно:

$$\frac{S_r}{S_{r-1}} = \frac{\alpha^r + \beta^r + \gamma^r + \dots}{\alpha^{r-1} + \beta^{r-1} + \gamma^{r-1} + \dots}$$

$$= \alpha \cdot \frac{1 + \frac{\beta^r}{\alpha^r} + \frac{\gamma^r}{\alpha^r} + \dots}{1 + \frac{\beta^{r-1}}{\alpha^{r-1}} + \frac{\gamma^{r-1}}{\alpha^{r-1}} + \dots}$$

приближается тем более к корню, чем α будет более в отношении к остальным корням β, γ, \dots , и еще, по мере увеличения степени n .

Итак, если уравнение $f(x) = 0$ имеет один корень, значительно превышающий все остальные, то, разложив $\frac{f'(x)}{f(x)}$ в ряд по степеням $\frac{1}{x}$, и составив дробь

$$\frac{S_1}{S_0} + \frac{S_2}{S_1} \cdot \frac{S_3}{S_2} + \dots + \frac{S_p}{S_{p-1}}$$

заключаем, что эти отношения будут более и более приближаться к истинному значению скаланого корня.

Впрочем, должно заметить, что при употреблении в таком виде изложенного способа, предполагается, что уравнение $f(x) = 0$ не имеет мнимых корней, или, по крайней мере, что модули их меньше наибольшего вещественного корня. Несмотря на то, при надлежащих изменениях, способ Даниэля Бернулли может быть применен к определению всех вещественных корней уравнения. Мы не можем входить здесь в подробностей; скажем только, что для определения наименьшего корня уравнения $f(x) = 0$, можно только принять $x = 1$, и тогда наименьший корень уравнения $f(x) = 0$ будет соответствовать наибольшему уравнению $f(1) = 0$; следовательно, для определения корня x в этом случае, можно бы только разложить дробь $\frac{f'(x)}{f(x)}$ в ряд, по возрастающим положительным степеням количества x .

Способ Даниэля Бернулли был изменен Эйлером, и предложенный им другой, более удобный и простой вид. Вот краткое изложение изложенного Эйлера способа.

Подобно предыдущему, он основан на определении такого ряда

$$p, q, r, s, t, u, \dots$$

в котором бы означен

$$\frac{q}{p} + \frac{r}{q} + \frac{s}{r} + \frac{t}{s} + \frac{u}{t} + \dots$$

более и более приближался к истинному значению корня. Итак, полагаем

$$1 = \frac{q}{p}, \quad 1 = \frac{r}{q}, \quad 1 = \frac{s}{r}, \quad 1 = \frac{t}{s}, \quad 1 = \frac{u}{t} \dots$$

получим

$$1 = \frac{q}{p}, \quad 1^2 = \frac{r}{p}, \quad 1^3 = \frac{s}{p}, \quad 1^4 = \frac{t}{p}, \quad 1^5 = \frac{u}{p} \dots$$

Подставляя эти приближенные величины для $x, x^2, x^3, x^4, x^5, \dots$ в данное уравнение, и приняв произвольные числа вместо количеств p, q, r, s, t, \dots , начинающих ряд, выводить последовательно следующие величины s, t, u, \dots

Чтобы не основываться на каком-нибудь недоразумении при употреблении этого способа, приложим его к общему уравнению третьей степени

$$x^3 = Ax^2 + Bx + C;$$

подставляя приведенные выше величины для x, x^2 и x^3 , получим

$$\frac{s}{p} = A \frac{r}{p} + B \frac{q}{p} + C,$$

или

$$s = Ar + Bq + Cp.$$

Следовательно, для определения члена s , нужно знать три первые величины p, q, r , которые можно выбрать по произволу. Впрочем, если правило, основанное на теории возвратных рядов, посредством которого определяются величины для p, q, r , вообще более выгодно, нежели произвольно взятые, читатель найдет некоторые подробности об этом предмете, в слове: RECURRENTE (SERIE). Следующие величины s, t, u, \dots уже выводимые посредством p, q и r . И действительно, помножив предложенное уравнение на x , на x^2, \dots получим

$$x^4 = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

$$x^5 = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$$

$$\dots \dots \dots$$

подставляя же вместо $x, x^2, x^3, x^4, x^5, \dots$ приведенные выше приближенные их значения, найдем

$$t = As + Br + Cq$$

$$u = At + Bs + Cr$$

$$\dots \dots \dots$$

Например, имея уравнение

$$x^3 = 5x^2 - x + 4,$$

и положив

$$p = 0, \quad q = 1, \quad r = 1$$

найдем

$$s = 2, \quad t = 9, \quad u = 29, \quad v = 86, \quad w = 265, \text{ и проч.}$$

Итак, ряд приближенных дробей к корню x будет:

$$\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{9}{2}, \frac{29}{9}, \frac{86}{29}, \frac{265}{86} \dots$$

Дробь $\frac{265}{86}$ верна до $\frac{1}{100}$; для большей точности надлежало бы продолжать ряд далее.

Употребление этого способа требует, чтобы данное уравнение заключало в себя все члены; впрочем, всегда легко будет привести уравнение к такому виду, предполагая в нем $x = y + z$, где z изображает какую либо определенную величину. Заметим также, что выбор первых членов $p, q, r \dots$ имеет большое влияние на степень приближения дробей $\frac{s}{r}, \frac{t}{s}, \frac{u}{t} \dots$ к искомому корню x . Для дальнейших подробностей по сему предмету, описываем читателя к Алгебре Эйлера; там он увидит, какими исключениями подлежат эти способы. —

В заключение приведем пример решения по приближению трансцендентного уравнения $x^x - 100 = 0$ по способу Ньютона.

Легко усмотреть, что искомая величина x заключается между пределами 3,5 и 4; действительно, вычисляя величину $(3,5)^{3,5}$ посредством логарифмов, найдем что она падает между 87 и $87 \frac{1}{100}$, а $4^4 = 256$. Следовательно, надлежаще приняв $x = 3,5 + \varepsilon$. Так как предыдущее уравнение может быть написано в виде

$$x \log x = \log 100 = 2^*),$$

то получим

$$f(x) = x \log x - 2 = 0.$$

Но мы видели, что поправка ε определяется дробью $-\frac{f'(a)}{f''(a)}$, в которой a изображает первую приближенную величину неизвестной x ; в настоящем случае $a = 3,5$; и так, получим

$$f'(x) = \log x + 1,$$

разучив под M модуль Бригговских логарифмов, то есть, число 0,43429; следовательно

$$f(3,5) = (3,5) \log (3,5) - 2 = -0,09576$$

$$f'(3,5) = \log (3,5) + 0,43429 = 0,97836$$

$$\varepsilon = -\frac{f(3,5)}{f'(3,5)} = \frac{0,09576}{0,97836} = 0,09788,$$

и наконец

$$x = 3,598.$$

Второе действие, подобное первому, но в котором надлежало бы принять за приближенную величину x число 3,598, привело бы нас к значению x еще более точному.

*) Мы разучили здесь Бриггсов логарифмы, для которых модуль = 0,43429. См. LOGARITHME.

Мы описываем читателей к следующим статьям, имеющим близкую связь с способами приближения: CONTINUÛ FRACTION; SERIE; RECURRENT (SERIE; RETOUR DES SUITES; BURMANN (SERIE DE); LAGRANGE (THEOREME DE); LAMBERT'S RIE DE; OMALE (FONCTION); также к сочинениям: Лагранжа — *Resolution des equations numeriques*; Фурье — *analyse des equations determinees*, 1851.

APPROCHER. (Анал.) **ПРИБЛИЖАТЬСЯ.** *Approcher de la vraie valeur d'une racine; приближаться к истинной величии корня.* См. APPROCHÉE (VALEUR).

APPROCHER DE LA CERTITUDE ПРИБЛИЖАТЬСЯ

к достоверности, к несомненности. (Неч. Вър.) По мере того как увеличивается дробь, выражающая вероятность, мы говорим, что она последняя *приближается к достоверности*. Для большей ясности, приведем пример, в котором употребим это выражение. Положим, что в урне, заключающей белые и черные шары, мы вынимаем по одному шару, замечая его цвет, и наблюдая притом каждый раз выпускать вынутый шар обратно в урну. Допустим, что повторив действие весьма значительное число раз $p + q$, вынули p белых шаров, а q черных. В таком случае вероятность, что отношение числа белых шаров к числу черных, заключалась, например, между пределами $\frac{p}{q} - \frac{1}{10000}$ и $\frac{p}{q} + \frac{1}{10000}$, будет выражаться дробью, весьма близкою к единице, и эта дробь будет увеличиваться, по мере увеличения числа вынутых шаров. Что касается до вероятности, выражаемой сею дробью, то говорим, что она неопредленно *приближается к достоверности*, по мере увеличения числа извлекаемых из урны шаров, и окончательно обратится в достоверность, если это число превзойдет всякий предел.

APPROCHES (COURBE AUX — ÉGALES). (Мех.)

КРИВАЯ РАВНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ.

Так называется кривая, по которой тело, обладающее одною силою тяжести, переходит в равном времени, равным вертикальным пространствам. В безвоздушном пространстве, *кривая*

равнаго приближенія есть кубическая парабола второго порядка.

Действительно, пусть будетъ AB (черт. 20, листъ I), желанная кривая, а IK вертикальная линия. Положимъ, что по истеченіи времени t , движущееся тѣло, изъ точки A перешло въ положеніе M ; пусть будетъ v его скорости въ это самое мгновеніе. По условію вопроса надобно выразить, что am пропорціонально времени t ; предполагая $am = x$ и $tM = y$, будемъ

$$t = lx,$$

разумѣя подъ l постоянное количество. Но извѣстно изъ правилъ Динамики, что скорость тѣла, движущагося по какой ни есть кривой линіи, выражается корнемъ квадратнымъ $\sqrt{2gx}$, гдѣ g означенъ силу тяжести, а x вертикальную высоту, перейденную тѣломъ; См. CURVILINE (MOUVEMENT). И такъ

$$v = \sqrt{2gx};$$

но, съ другой стороны, изобразивъ чрезъ s дугу кривой AM , имѣемъ $v = \frac{ds}{dt}$; См. VITESSE. Слѣдовательно получимъ два уравненія

$$t = lx \text{ или } dt = l dx$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gx};$$

но $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, почему будемъ

$$\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = l \sqrt{2g} \cdot x^{\frac{1}{2}},$$

откуда

$$dy = \sqrt{2g l^2 x^3} \cdot \pi - 1, \text{ и т. д.}$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ

$$y + C = \frac{1}{\frac{1}{2}g l^2} (2g l^2 x - 1)^{\frac{3}{2}}$$

или

$$(y + C)^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}g^2 l^4} (2g l^2 x - 1)^3,$$

гдѣ C изображаетъ постоянное произвольное количество. Возмъ уравненіе искомой кривой линіи, и мы видимъ, что оно действительно принадлежитъ кубической параболѣ второй степени; если примемъ $C = 0$, $2g l^2 = 1$, и положимъ $x - 1 = z$, то оно приметъ слѣдующій простой видъ: $z^3 = \frac{1}{2} z^3$ или $z^3 = \frac{1}{2} z^3$.

Задача кривой равнаго приближенія была предложена Лейбницемъ въ 1687 году въ видѣ вызова, съ такою цѣлю, чтобы показать въкоторымъ мѣрѣ истинна неодолимость Геометріи Давидова, и вмѣстѣ съ тѣмъ высказались на видѣ

важною только возникающаго Дифференціального исчисленія. Одинъ Гугенсъ рѣшилъ задачу безъ пособія новаго Анализа; вскорѣ послѣ того, Яковъ Бернулли, руководствуясь Анализомъ безконечныхъ, предложилъ также рѣшеніе вопроса, не зная способовъ Лейбница и Гугенса. Внеслѣдствіи Вариньона, а послѣ него Монпертии, рѣшили задачу въ болѣе общемъ видѣ. Первый принялъ законъ измѣненія тяжести произвольнымъ, а перейденное вертикальное разстояніе не просто пропорціональнымъ времени, но, выражался по намъ, равнымъ какой ни есть функции времени. Монпертии вывелъ уравненіе кривой равнаго приближенія принимая въ расчетъ и сопротивленіе воздуха.

APPROXIMATION (MÉTHODES D'). (Анал.) СПОСОБЫ ПРИБЛИЖЕНІЯ.

Способы, посредствомъ которыхъ опредѣляются величины неизвѣстныхъ, не истинныхъ, но другія, мало разнѣсящія отъ настоящихъ. Способы приближенія употребляются вообще при рѣшеніи уравненій алгебраическихъ и трансцендентныхъ. Превращеніе количествъ въ непрерывныя дроби, разложеніе неизвѣстныхъ въ безконечныя ряды и инокорыя другія дѣйствія, относятся къ способамъ этого рода. См. APPROCHÉE (VALEUR).

APPROXIMATION. ПРИБЛИЖЕНІЕ. *Approximation lente, rapide; медленное, быстрое приближеніе. Pousser l'approximation jusqu'aux décimales de l'ordre n; довести приближеніе до n-го порядка десятичныхъ цифръ, до n-ой десятичной цифръ. Viter l'approximation aux quatrièmes puissances; ограничить приближеніе четвертыи степенями; то есть, ожидать планую, шестую и высшія степени.*

Par approximation; по приближенію, приближительно. Trouver les racines d'une équation par approximation; найти по приближенію корни уравненія.

APPROXIMATIF. — IV. ПРИБЛИЖЕННЫЙ, — НАЯ. *Valeur approximative; приближенная величина.* См. APPROCHÉE.

APPROXIMATIVEMENT. ПРИБЛИЖИТЕЛЬНО, *приблизительно, по приближенію.*

APPROXIMÉE (RÉSOLUTION — DES ÉQUATIONS). РѢШЕНІЕ УРАВНЕНІЙ ПО ПРИБЛИЖЕНІЮ. См. APPROCHÉE (VALEUR).

APPUI. (Мех.) ПОДПОРА. *Point d'appui; точка подпоры, точка опоры, подпорная точка.* Неподвиж

ная точка въ рычагѣ (или въ другой машинѣ), около которой силы уравновѣшиваются между собою; слѣдовательно, предполагается что равнодействующая этихъ силъ проходить чрезъ *точку подпоры*, и уничтожается ея сопротивленіемъ. Смол. LEVIER.

APPUYER (S'). (Геом.) СТОЯТЬ, ОПИРАТЬСЯ.

Въ Геометріи говоримъ, что уголь при окружности *стоитъ на дугѣ* или *опирается на дугу*. Такъ напримѣръ на чертѣжѣ 9 (листъ I), уголь IEN, имѣющій свою вершину E при окружности, *стоитъ на дугѣ IKN*.

APRETÉ. (Мех.) ШЕРОХОВАТОСТЬ. Свойство поверхности шѣла, представляющей неровности или негладкости, отъ которыхъ значительно увеличивается треніе. Смол. FROTTEMENT.

APSIDES. (Астр.) АПСИДЫ. Оконечности большой оси планетной орбиты. *Leqno des apsides*, линия *apsidow*; линія, соединяющая ателій и перигелій, или апогей и перигей. См. APHÉLIE.



ARABES (CHIFFRES). (Ариф.) АРАБСКІЯ ЦИФРЫ. Смол. CARACTERES COMMUNS.

ARBELON. (Геом.) АРБЕЛОНЪ, Спикра. Такъ названа въ *Лемматъ Архимеда* фигура *AcCbBcDdd* (черт. 21, листъ I), ограниченная съ одной стороны полукружіемъ *AcCbB*, а съ другой, полукружіемъ *AdD* и *DcB*. — Легко доказать, что площадь *арбелона* равна площади круга, имѣющаго діаметромъ перпендикуляръ *DC*, возсѣпавленный изъ точки касанія *D* двухъ малыхъ полу-круговъ, и продолженный до встрѣчи съ большимъ полу-кругомъ.

ARBITRAGE. (Ком. Ариф.) АРБИТРАЖЪ. Вычисления, посредствомъ которыхъ, сравнивая данныя въсѣльные курсы, находимъ, чрезъ какое мѣсто выгоднѣе получить или перевести деньги. Напримѣръ, если бы Петербургскій банкиръ, который долженъ получить известную сумму въ Лондонѣ, желалъ бы вычислить, что выгоднѣе для него, получить ли прямо эту сумму изъ Лондона, или перевести ее чрезъ Парижъ или Амстердамъ, то такая задача относилась бы къ арбитражу.

Всѣ вопросы этого рода рѣшаются весьма простыми образомъ посредствомъ тройнаго вѣзвѣда. Смол. CHANGE, CONJOINTE (RÉGLE).

ARBITRAIRE. (Анал.) ПРОИЗВОЛЬНЫЙ. *Constante arbitraire*; произвольное постоянное количество, произвольная постоянная. Таковы, напримѣръ, величины, прибавляемыя къ неопредѣленнымъ интеграламъ дифференціальнымъ функціямъ или уравненіямъ. Смол. INTEGRAL (CALCUL), CONSTANTE.

Что касается до произвольныхъ величинъ, вводимыхъ интегрированіемъ уравненій въ конечныхъ разностяхъ, то эти величины не суть постоянныя по необходимости, какъ то всегда бываетъ въ дифференціальныхъ уравненіяхъ; но только онѣ не должны перемѣняться при переходѣ независимой переменной *x* въ состояніе *x + Δx*. Такъ напримѣръ, если *Δx* количество постоянное, равное *h*, а *Δy = 0*, то можно будетъ принять *y* равнымъ всякому количеству, сохраняющему одну и ту же величину, при переменной *x* въ *x + h*. Въ разрядѣ круговыхъ функцій есть множество такихъ, которыми пользуются этия свойствамъ. Таковы напримѣръ $\sin \frac{2\pi x}{A}$, $\cos \frac{2\pi x}{A}$, разукта подъ *A* полуокружности. — И такъ, уравненію въ разностяхъ $\Delta y = 0$ удовлетворяетъ не только интеграломъ

$$y = C$$

разукта подъ *C* постоянное количество, но и еще

$$y = \eta \left(\sin \frac{2\pi x}{h}, \cos \frac{2\pi x}{h} \right),$$

гдѣ *η* изображаетъ совершенно произвольную функцію.

ELIMINATION DES CONSTANTES ARBITRAIRES. Исключеніе постоянныхъ произвольныхъ количествъ. Пусть будетъ

$$f(x, y, a, b, c, \dots) = 0$$

конечное уравненіе между двумя переменными величинами *x*, *y* и постоянными количествами *a*, *b*, *c*, ... Если возьмемъ послѣдовательныя производныя (Смол. DÉRIVÉE) этого уравненія, то получимъ

$$f'(x, y, a, b, c, \dots) = 0$$

$$f''(x, y, a, b, c, \dots) = 0$$

$$f'''(x, y, a, b, c, \dots) = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

Совокупная одно или несколько из смех поставленных уравнений с первообразными $f(x, y, a, b, c, \dots) = 0$, исключают одно или несколько из произвольных постоянных a, b, c, \dots . Уравнение, получаемое чрез подобное исключение, называется *дифференциальным*. Оно будет *первого* порядка, если исключили одну произвольную величину между двумя уравнениями $f(x, y, a, b, c, \dots) = 0$ и $f'(x, y, a, b, c, \dots) = 0$; *второго* — если исключили два из величин a, b, c, \dots между тремя уравнениями $f(x, y, a, b, c, \dots) = 0$, $f'(x, y, a, b, c, \dots) = 0$ и $f''(x, y, a, b, c, \dots) = 0$; и так далее.

Дифференциальное уравнение первого порядка может быть получено одним только образом чрез исключение данного постоянного количества между первообразными уравнениями $f(x, y, a, b, c, \dots) = 0$ и его первую производную $f'(x, y, a, b, c, \dots) = 0$. Но причём к тому, что дифференциальные уравнения высших порядков могут быть получены исключением образам посредством исключения постоянных произвольных. Например, уравнение второго порядка можно получить:

1°. Чрез исключение двух постоянных, например a и b из уравнений

$$f(x, y, a, b, c, \dots) = 0$$

$$f'(x, y, a, b, c, \dots) = 0$$

$$f''(x, y, a, b, c, \dots) = 0.$$

2°. Исключая постоянное количество, например a из уравнений $f(x, y, a, b, c, \dots) = 0$ и $f'(x, y, a, b, c, \dots) = 0$, получится уравнение вида

$$q(x, y, y', b, c, \dots) = 0,$$

где y' изображает $\frac{dy}{dx}$; взяв производную, найдем

$$q'(x, y, y', b, c, \dots) = 0.$$

Совокупив последние два уравнения, исключим вторую постоянную b , и получим то же дифференциальное уравнение второго порядка.

3°. Исключая постоянную величину b из уравнений $f(x, y, a, b, c, \dots) = 0$ и $f'(x, y, a, b, c, \dots) = 0$, найдем уравнение вида

$$w(x, y, y', a, c, \dots) = 0,$$

и совокупив с последним с его производною

$$w'(x, y, y', a, c, \dots) = 0$$

для исключения величин a , получим опять то же самое дифференциальное уравнение второго порядка.

CONSTANTS ARBITRAIRES. Произвольные функции. Так называют функции одной, или нескольких переменных, когда действия, которыми должно произвесть над известными, произвольными или неизвестными. Такого рода функции входят в полные интегралы частных дифференциальных уравнений.

Положим, например, что имеем частное дифференциальное уравнение $\frac{dz}{dx} = f(x, y)$; помножив на dx получим $\frac{dz}{dx} dx = f(x, y) dx$, и взяв интеграл относительно x , найдем $z = \int f(x, y) dx + C$. В этом выражении, C изображает не просто постоянную произвольную величину, но какую угодно функцию переменной x , так что можем принять $C = \varphi(x)$, разумея под φ произвольную функцию. Если бы имели уравнение $\frac{dz}{dx} = f(x, y, z)$, то нашли бы $z = \int f(x, y, z) dx + \varphi(x, z)$ где $\varphi(x, z)$ изображает произвольную функцию переменных x и z .

ESTIMATION DES CONSTANTES ARBITRAIRES. Исключение произвольных функций. Чрез совокупление конечного уравнения между тремя переменными с частными его производными, можно исключить два количества, или постоянные или переменные, и таким образом получить уравнение, независимое от исключенных величин. Посредством такого действия мы можем составлять уравнения, выражающие свойства функций какого либо количества, предполагая вид этих функций совершенно произвольным. Объясним это примером. Пусть будет уравнение

$$z = f(ax + by),$$

где под f разумеет совершенно произвольную функцию. Полагая $ax + by = t$, получим:

$$z = f(t), \quad \frac{dz}{dx} = a, \quad \frac{dz}{dy} = b,$$

и сверх того

$$\frac{dz}{dx} = f'(t) \frac{dt}{dx}, \quad \frac{dz}{dy} = f'(t) \frac{dt}{dy},$$

Исключив из этих уравнений производную $f'(t)$, и подставляя вместо $\frac{dt}{dx}$ и $\frac{dt}{dy}$ разницы этих величин a и b , получим уравнение

$$b \frac{dz}{dx} - a \frac{dz}{dy} = 0,$$

которое справедливо, какой бы вид мы не при-
няли для функций f . И такъ, могли бы предпо-
ложить

$$z = (ax + by)^n, \quad z = \log(ax + by), \\ z = \tan(ax + by) \text{ и проч.}$$

Слѣдовательно уравненіе $b \frac{dz}{dx} - a \frac{dz}{dy} = 0$ за-
ключаетъ въ себя признаки, по которому можно
судить, будетъ ли предложенное выраженіе въ
 x и y функциею отъ $ax + by$. Если бы напри-
мѣр, желали узнать, шагого ли вида количество

$$z = \sin ax \cdot \cos by + b \sin by \cdot \cos ax$$

то составивъ производныя

$$\frac{dz}{dx} = a \cos ax \cdot \cos by - a \sin by \cdot \sin ax$$

$$\frac{dz}{dy} = -b \sin ax \cdot \sin by + b \cos by \cdot \cos ax,$$

опредѣлили бы потомъ

$$b \frac{dz}{dx} - a \frac{dz}{dy} = b(a \cos ax \cdot \cos by - a \sin by \cdot \sin ax) - \\ - a(b \sin ax \cdot \sin by + b \cos by \cdot \cos ax) = 0$$

Но такъ какъ вторая часть этого уравненія
тождественно равна нулю, то заключаемъ, что
предложенное выраженіе есть функция отъ $ax + by$
и дѣйствительно

$$\sin ax \cdot \cos by + \sin by \cdot \cos ax = \sin(ax + by).$$

Для приложенія способа исключенія произ-
вольныхъ функций, отсылаемъ къ страницамъ: LA-
GRANGE (THEOREME DE), DÉVELOPPABLE
(SURFACE), CONIQUE (SURFACE), CYLIN-
DRIQUE (SURFACE), GAUCHE (SURFACE),
RETOUR (SURFACE DE).

VARIATION DES CONSTANTES ARBITRAIRES. Из-
мѣненіе произвольныхъ постоянныхъ.
Способъ, изображающій *Лагранжевы*, и интѣ-
гралъ многообразныя приложенія въ математиче-
скомъ Анализѣ. Основаніе способа состоитъ въ
измѣненіи, по извѣстнымъ правиламъ, количествъ,
которые сперва были принимаемы за постоянныя.
См. **VARIATION DES CONSTANTES ARBI-
TRAIRES.**

ARBRE (Méch.) ВАЛЪ. Ось, около которой про-
исходящія вращенія въ машинѣ большого разма-
ра. *Arbre d'une roue dentée; валъ зубчатого колеса.* См.
AXE.

ARBRE DE RETOUR, ARBRE DE DIRECTION. ДРЕВО ВОЗВРАТА, ДРЕВО НАПРАВЛЕНІЯ

См. **CASCADES (METHODE DES).**

ARC. (Геом.) **ДУГА.** Часть какой либо кривой
линіи, напиримѣр, круга, эллипса, циклоиды, и
проч. *Arc elliptique, hyperbolique, elliptico-circulaire, и-
перболическая дуга.*

ARC DE CERCLE. Дуга круга, круговая дуга.
Часть окружности круга.

ARCS CONCENTRIQUES. Концентрическія,
однѣмъ центръ имѣющія дуги. Дуги описанныя
изъ одной точки, но различными радіусами.

ARCS ÉGAUX. Равныя дуги. Дуги, описанныя
однимъ и тѣмъ же радіусомъ, и заключающія въ
себѣ одинаковое число градусовъ, слѣдовательно
совпадающія при наложеніи одной на другую.

ARCS SEMBLABLES. Подобныя дуги, то есть
такія, которыя заключаютъ въ себѣ одинаковое
число градусовъ, но описаны радіусами, нерав-
ными между собою.

EXPRESSION DIFFERENTIELLE DE L'ARC. Диффе-
ренціальное выраженіе дуги. Въ плос-
кой кривой дифференціалъ дуги s опредѣляется
формулою $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, а для кривой двоя-
кой кривизны $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, гдѣ x , y ,
изображаютъ прямоугольныя координаты разса-
матриваемой кривой. Черезъ интегрированіе предъ-
идущихъ выраженій, получился, въ каждомъ част-
номъ случаѣ, длина самой дуги. Такимъ образомъ
для плоской кривой будетъ $s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$, а
для двояко-кривой $s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Приве-
денныя нами выраженія, опредѣляющія ds , весьма
легко выводятся, когда примемъ кривую линію
за многоугольникъ, состоящій изъ бесконечнаго
числа сторонъ.

Для примѣра, положимъ, что ищется длина
параболической дуги. Уравненіе обыкновенной
параболы есть

$$x^2 = 2py,$$

гдѣ p означаетъ полу параметръ. Дифференцируя
последнее уравненіе, найдемъ

$$x dx = p dy \text{ или } dy^2 = \frac{x^2}{p^2} dx^2,$$

откуда

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{x^2}{p^2} dx^2} = \frac{dx}{p} \sqrt{p^2 + x^2},$$

и слѣдовательно

$$\text{ИТОГОВЫЕ: } y = \sqrt{r^2 + x^2} - C + \frac{x^2}{2p} \sqrt{r^2 + x^2} + \frac{1}{2} \log(x + \sqrt{r^2 + x^2}),$$

где C представляет произвольную константу. Если принять за начало дуги вершину параболы, то при $y = 0$ будет также $x = 0$; следовательно $0 = C + \frac{p}{2} \log \sqrt{r^2}$, откуда $C = -\frac{p}{2} \log p$, и наконец

$$y = \frac{x \sqrt{r^2 + x^2}}{2p} + \frac{p}{2} \log \left(\frac{x + \sqrt{r^2 + x^2}}{p} \right).$$

ARC DIURNE. (Астр.) **ДНЕВНАЯ ДУГА.** Дуга описываемая светилом во время нахождения его над горизонтом. *Ночная дуга (arc nocturne)* есть та, которую светило описывает в бытность свою под горизонтом. Половинами этих дуг называются: 1) *полудневная (arc semi-diurne)*, 2) *ночная дуга (arc semi-nocturne)*. Заметьте, что промежуток времени, протекающий от восхождения светила до его захождения, называется *дневным дугом*, а между заходом и восхождением — *ночным дугом*.

ARC DE POSITION. То же, что **ANGLE DE POSITION.** (Смол.)

ARC DE RETROGRADATION. Дуга возвратного движения. Дуга описываемая видимым движением планеты пришедшей порядка знаков.

ARC-EN-CIEL или **IRIS.** (Опт.) **РАДУГА.** Возмущенное явление, въ видъ разноцвѣтной дуги, усматриваемое только въ дождливую погоду, и всегда въ сторонѣ, противоположной солнцу. Довольно часто радуга бываетъ сопровождаема другою, которая называется *внѣшнею радугою (arc en-ciel extérieur)*, для отличенія ея отъ первой, именуемой *внутреннею (arc en-ciel intérieur)*. Цвѣты внутренней или главной радуги ярче цвѣтовъ внѣшней. Случается, но очень рѣдко, что видны трижды радугу, которой отлички еще слабѣе второй. Цвѣтныя полосы въ главной радугѣ всегда расположены въ слѣдующемъ порядкѣ, считая снизу вверхъ: 1) *фиолетовая*, 2) *синяя*, 3) *голубая*, 4) *зеленая*, 5) *желтая*, 6) *оранжевая* и 7) *красная*. Во второй радугѣ порядокъ обратный; начиная счетъ какъ и прежде снизу вверхъ, послѣдовательность цвѣтовъ будетъ такая: 1) *красный*, 2) *оранжевый*, 3) *желтый*, 4) *зеленый*, 5) *голубой*, 6) *синій* и 7) *фиолетовый*.

Древнѣе естествоиспытатели не оставляли никакого удовольствительнаго объясненія радуги, а только предлагали нѣкоторыя догадки, болѣе или менѣе неосновательныя. Первый, объяснявшій это явленіе преломленіемъ солнечнаго свѣта въ дождевыхъ капляхъ, былъ *Антоній де Доминикъ*, Архіепископъ Синапскій. Въ книгѣ его: *De radiis visus et lucis (о лучахъ зрѣнія и свѣта)*, напечатанной въ Венеціи въ 1611 г., и написанной имъ еще за 20 лѣтъ передъ тѣмъ, онъ показываешь, каковыя образы внутренняя радуга происходила отъ двухъ преломленій солнечнаго свѣта и одного промежуточнаго отраженія, а внѣшняя, отъ двухъ преломленій и двухъ промежуточныхъ отраженій въ каждой дождевой каплѣ, предполагаемой сферическою. Кеплеръ имѣлъ такое же понятіе объ образованіи радуги, что можно видѣть изъ писемъ его къ *Бернже* въ 1605 году и *Гарриоту* въ 1606 году. *Декартъ*, принявшій теорію радуги *Антонія де Доминикъ*, исправилъ его объясненіе внѣшней радуги, которое было ошибочно. Но ни одинъ изъ сихъ естествоиспытателей не зналъ истиннаго происхожденія цвѣтовъ, почему предложенныя ими объясненія не во всѣхъ отношеніяхъ удовлетворительныя. *Нютонъ*, дополнивъ эту теорію важными открытіемъ составленія лучей свѣта. Послѣ него, *Иванъ Бергелли* и *Галлей* занимались теоріею радуги, и рѣшая аналитически многіе любопытныя вопросы, относящіеся къ сему явленію.

Объясненіе внутренней радуги. Изобразимъ чрезъ *IARB* (черт. 2, листъ II) круговое сѣченіе сферической дождевой капли плоскостію, проходящею чрезъ центръ сферы S , центръ капли C и глазъ наблюдателя. Пусть будетъ SI одинъ изъ солнечныхъ лучей, падающій на каплю въ точкѣ I , эпитомъ дугъ, переходя изъ воздуха въ воду, преломляеися, приблизясь къ нормалю IC , пойдетъ по направленію IA , и упадетъ въ точкѣ A ; нѣкоторая часть свѣта выйдетъ изъ капли, а другая отразится въ R , при чемъ, по законамъ Оптики, уголъ паденія LAD будетъ равенъ углу отраженія EAR . Лучъ свѣта AR , переходя въ точкѣ R изъ средины плотнѣйшей въ рѣдчайшую, преломляеися опять, и пойдетъ по направленію RO . Если глазъ наблюдателя находится въ направленіи луча RO , то онъ получитъ впечатлѣніе цвѣта сего луча. Но такъ какъ лучъ SI есть

тонкая кисть света, заключающая в себя все первоначальные цвета, различной преломляемости, что очевидно, что когда «белый» цвет, которого преломляемость наибольшая, пойдет по направлению PV , а красный, наименьше преломляющийся, по RO , то все цвета радуги будут заключаться в пространстве $VPRO$, и займут места, соответственные степени их взаимных преломляемостей. И так, если глаз наблюдателя находится по направлению OR , то он увидит по сему направлению только красный цвет. Но если глаз будет постепенно подниматься до V , то он примет последовательно все цвета радуги: сначала красный, потом оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий, фиолетовый. Отсюда легко заключить, что когда воздух наполнен дождевыми каплями, то наблюдатель, при надлежащих обстоятельствах, должен увидеть в одно время под различными углами все радужные цвета; но как глаз его соединяется собою вершину конуса, образуемого обращением зрительного луча, то каждый цвет представляется в виде круговой дуги или полосы, а совокупность всех полос соединит изображение радуги. Ширина радуги очевидно будет зависеть от разности наибольшей и наименьшей преломляемостей лучей, именно, фиолетового и красного.

Разсмотрим теперь аналитически обстоятельства появления внутренней радуги. Пусть будет SI падение луча (*rayon d'incidence*); по преломлении в точке I , этот луч пойдет по направлению IA , отразится из A в точку R , где, преломляясь, выйдет по направлению RO . Луч RO называется *лучем выхождения* (*rayon d'emergence*). Изобразим через α угол падения SIQ , через β угол преломления CIA , и через γ , угол отклонения света SLO .

Угол γ весьма легко может быть выражен посредством углов α и β . Действительно, известно из Геометрии, что $\gamma = \frac{1}{2}(\text{уг. } ICR - \text{уг. } OR)$; но угол $ICR = 4\beta$, а $OR = 4(\alpha - \beta)$; следовательно (1) $\gamma = \frac{1}{2}\{4\beta - 4(\alpha - \beta)\} = 4\beta - 2\alpha$.

Сверх того, изобразив через μ показатель преломления (*rapport de réfraction*) разнотелного луча, будем иметь (Смол. REFRACTION) (2) $\sin \alpha = \mu \sin \beta$.

Угол γ достигнет максимума с α и β , и может получить наибольшее значение; для определения сего последнего, стоит только взять $d\gamma = 0$.

И так, дифференцируя уравнения (1) и (2), получим

$$d\gamma = 4d\beta - 2d\alpha = 0, \text{ откуда } d\alpha = 2d\beta$$

$$\text{Cos } \alpha \cdot d\alpha = \mu \text{ Cos } \beta \cdot d\beta;$$

подставляя же величину $d\alpha = 2d\beta$ в последнее уравнение, найдем

$$2 \text{ Cos } \alpha = \mu \text{ Cos } \beta;$$

возвышая в квадраты, получим

$$4 \text{ Cos}^2 \alpha = \mu^2 \text{ Cos}^2 \beta,$$

или, что все равно,

$$3 \text{ Cos}^2 \alpha + 1 - \text{Sin}^2 \alpha = \mu^2 (1 - \text{Sin}^2 \beta);$$

но, в следствие ур. (2), эта формула принимает вид

$$3 \text{ Cos}^2 \alpha + 1 = \mu^2,$$

а из сей последней выводим

$$(3) \quad \text{Cos } \alpha = \sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{3}}.$$

Посредством этой формулы легко объяснить появление всех радужных цветов, найдем ширину каждой цветной полосы, а следовательно и полную ширину внутренней радуги.

Например, определим посредством приведенных выше формул наибольший угол отклонения γ , под которым красный луч может быть отклонен. По опытам Ньютона для красного луча, коего преломляемость наименьшая, показател преломления $\mu = \frac{1.02}{1}$; подставляя сию величину в формулу (3), найдем

$$\text{Cos } \alpha = \sqrt{\frac{(\frac{1.02}{1})^2 - 1}{3}}, \text{ откуда } \alpha = 59^\circ 25' 50'';$$

в следствие же уравнения (2) будем

$$\sin \beta = \frac{81}{108} \sin 59^\circ 25' 50'', \text{ откуда } \beta = 40^\circ 14' 40'';$$

наконец, подставляя выведенные сейчас величины для α и для β в ур. (1), получим для наибольшего угла отклонения красного луча величину

$$\gamma = 42^\circ 1' 40''.$$

Подобным образом, по известным показателям преломления других лучей, можно определить наибольшие углы их отклонения: для фиолетового луча, коего преломляемость наибольшая, показатель преломления $\mu = \frac{1.07}{1}$, найдем $\alpha = 58^\circ$, $\gamma = 40^\circ 17'$. Для промежуточных лучей очевидно найдутся бы углы, заключающиеся между пред-

*) В новейшей книге Фраунгофера приводятся весьма точные опыты над преломляемостью лучей в различных средах; им удержаны здесь числа, найденные Ньютоном.

лам $40^{\circ} 17'$ и $42^{\circ} 1' 40''$; следовательно, ширина дуги будет равна разности этих двух предельных углов, то есть $1^{\circ} 44' 40''$. Заменим однако, что вместо вывода найдем нами в том же предположении, когда солнце принимается просто за светилящую точку; но если показать в соображение его видимый диаметр, равняющийся $30'$, то и найденной наименьшей ширины дуги должно будет прибавить еще $30'$, так что истинная ее ширина будет расширяться до $2^{\circ} 14' 40''$, что весьма мало удалено от непосредственных измерений в тех случаях, когда цвета дуги бывают ярки.

Мы видели, что лучи различной преломляемости, идущие в различных направлениях угловых выхождения. Легко усмотреть, что при наибольших углах уклонения q , смежные выходящие лучи будут чувствительнейшим образом параллельны между собою, следовательно производят на глаза наблюдателя впечатление обильнейшее для зрения. При других же углах выхождения лучи, идущие в различных направлениях, сближаются между собою, и поэтому представляют божья, или производят своим соединением обширные главные радужные дуги. Вот объяснение внутренней дуги; перейдем теперь к внешней, и определим ее измерение.

Объяснение внешней дуги. Положим, что луч SI (черт. 3, лист II) преломляется в I , пойдет по направлению IA , отразится в A в A' , и потом, выходя из дождевой капли в воздух в точке R , преломится по направлению RO . Изобразим, как и выше, чрез α угол падения SIQ , чрез β угол преломления GLA , и чрез q угол уклонения света SLO , или, что все равно, RLI . Легко видеть, что в четырехугольнике $LRCI$ углы LRC и LIC равны между собою, а каждый из них равен $\pi - \alpha$; что касается до угла RCI , то он равен четырем прямым без усвоенного угла $ICA = \pi - 2\beta$, ибо треугольники ICA , $AC'A'$, $A'CR$ равны; следовательно

$$(4) \quad q = 2\pi - 2(\pi - \alpha) - [2\pi - 3(\pi - 2\beta)] \\ = \pi + 2\alpha - 6\beta.$$

Изобразив, по прямому, чрез μ показатель преломления рассматриваемого луча, получим

$$(5) \quad \sin \alpha = \mu \sin \beta.$$

Для наибольшего значения угла q , будет $d\beta = 0$, следовательно

$$2d\alpha - 6d\beta = 0, \text{ откуда } d\alpha = 3d\beta,$$

дифференцируя уравнение (5), получим

$$\cos \alpha \cdot d\alpha = \mu \cos \beta \cdot d\beta,$$

или, подставляя на место $d\alpha$ найденную сей-час величину

$$3 \cos \alpha = \mu \cos \beta.$$

Возвратив это уравнение с (5), получим:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{8}}.$$

Если придем в соображение только крайние края внешней дуги, то найдем:

$$\text{для красного: } \varphi = 50^{\circ} 59'$$

$$\text{для фиолетового: } \varphi = 54^{\circ} 3'.$$

Следовательно, ширина внешней дуги будет $54^{\circ} 8' - 50^{\circ} 59' = 3^{\circ} 10'$, когда солнце принимается за светилящую точку; увеличив вместо угла видимый диаметр солнца, найдем $3^{\circ} 40'$ для наибольшей ширины внешней дуги. Расстояние между внутренней и внешней дугами, или, что все равно, расстояние внешнего края красного края первой, от внутреннего края того же цвета второй, равняется разности $59^{\circ} 59' - 42^{\circ} 1' 40'' = 17^{\circ} 57' 20''$. Из сего угла следует еще вычесть видимый диаметр солнца, и тогда получим $8^{\circ} 27' 20''$ для истинного расстояния между двумя дугами. Увеличив найденный угол $q = 42^{\circ} 1' 40''$ пол-диаметром солнца, получим для наибольшего радиуса внутренней дуги $42^{\circ} 16' 40''$; вычитая же пол-диаметр солнца из опраделенного так перед сием угла наибольшего уклонения красного луча внешней дуги, найдем для наименьшего ее радиуса дугу же $58^{\circ} 44'$.

Из сказанного легко также заключить, что когда высота солнца превышает 42° , то главная дуга не видна для нас. Действительно, проведем из глаза O наблюдателя (черт. 4, л. II) линию OS' , параллельную солнечным лучам. Линия OG , изображающая направление фиолетового луча, должна составлять угол в 42° с направлением солнечного луча, а следовательно такой же угол и с OS' . Но если высота солнца будет превышать 42° , то угол, заключающийся между линией OS' и горизонтом будет также в 42° , но под горизонтом; следовательно и луч OG будет находиться под горизонтом наблюдателя, и не достигнет его глаза. Точно

такими образом объяснить и то общепринятое, что когда высота солнца будет бодѣ 42° , но менѣе 54° , то видима радуга одна можетъ быть усмотрѣна.

Иногда, при лунныхъ сіяніяхъ, усматриваются радуги, крокъ чѣдѣ бываютъ обыкновенно весьма блѣдны; онѣ называются *лунными* (*arcs-en-ciel lunaires*), и превосходятъ, какъ и солнечныя, онѣ предложены лунныхъ лучей въ дождевыхъ капляхъ.

Можно также произвести *искусственную радугу* (*arc-en-ciel artificiel*), обратясь спиною къ солнцу, и брызнувъ передъ собой водою въ надлежащемъ направленіи. —

ARCHIMÈDE (SPIRALE и VIS D'). См. SPIRALE, VIS.

ARCHITECTONIQUE, АРХИТЕКТОНКА, ЗОДЧЕСТВО.

Наука, заключающая въ себѣ приложеніе Механики къ Высшей Архитектурѣ или Зодчеству. Въ Архитектоникѣ предлагались правила для устройства колесовъ, храмовъ, пирамидъ, лабиринтовъ и проч. — Известный математикъ *Ламбертъ* (*Lambert*) издалъ также книгу подъ заглавіемъ: *Essai d'Architectonique*.

ARDENT (MIROIR, VERRE). (Опик.) ЗАЖИГАТЕЛЬНОЕ ЗЕРКАЛО, СТЕКЛО. См. MIROIR, VERRE.

ARE. (Мѣтр.) **АРЪ.** Единица поверхности въ новой мѣтрической системѣ, принятой во Франціи. Аръ равняется 100 квадратнымъ мѣтрамъ, или $\frac{1}{100}$ гектара, а гектаръ равенъ 0,915 русской десятины. См. METRIQUE (NOUVEAU SYSTEME).

ARENAIRE (ARITHMETIQUE), АРЕНАРІЙ, ПСАММИТЪ;*) *Песчисленіе песчинокъ.* Письмо *Архимеда* къ Гезону, сыну Гіерона, Царя Сиракузскаго, написанное съ цѣлю опровергнуть мнѣніе тѣхъ изъ его современниковъ, которые утверждали, будто бы число песчинокъ, или безконечно, или по крайней мѣрѣ такъ велико, что большаго числа, нельзя выразить. Архимедъ съ геометрическою точностію доказываетъ въ своемъ письмѣ, что можно выразить не только число песчинокъ земнаго шара въ томъ предположеніи, что онъ твердъ, состоящій изъ песку, но даже и

тогда, когда предположимъ все пространство до неподвижныхъ звездъ наполненнымъ пескомъ.

Архимедъ, въ этомъ письмѣ, основывается свое исчисленіе на предположеніи Астронома Аристарха Самосскаго относительно удаленія неподвижныхъ звездъ отъ земли, именно: онъ допускаетъ, что это разстояніе не болѣе 100000000 разъ большому радіусу земли; окружность же земли, Архимедъ полагаетъ 300 милью стадій, что составляло 432321 версту, и следовательно слишкомъ въ десять разъ болѣе настоящаго, ибо земля, какъ известно, имѣетъ въ окружности около 37573 версты. Сверхъ того, Сиракузскій Геометръ предполагаетъ, что въ объемѣ маковаго зерна входитъ не болѣе 10000 песчинокъ, а діаметръ маковаго зерна принимаятъ не менѣе $\frac{1}{10}$ дюйма*). Потомъ, вычисливъ послѣдовательно число песчинокъ заключающихся въ шарѣ, имѣющемъ діаметромъ одинъ дюймъ, сто дюймовъ, десять тысячъ дюймовъ и проч., и найдя окончательное, что число песчинокъ, достаточное для наполненія шара, простирающагося до неподвижныхъ звездъ, будетъ менѣе тысячи *мириадъ тысячъ восьмидесяти*, что по нашему счисленію означаетъ число 10^{42} .

Читателей, желающихъ видѣть *менѣе* понятіе объ этомъ предметѣ, мы отсылаемъ къ книгѣ: *Архимеда? Псаммитъ, переводъ съ Греческаго В. Петрушевскаго 1824 г.*

ARENARIUS или PSAMMITES. АРЕНАРІЙ, ПСАММИТЪ. См. выше.

AREOLE. (Геом.) **ПЛОЩАДКА.** Небольшая поверхность, ограниченная со всѣхъ сторонъ линиями.

ARÉOMÈTRE. (Физ.) **АРЕОМЕТРЪ, ЖИДКОМЪРЪ.** Инструментъ для опредѣленія плотности жидкостей. Ареометры употребляются также для опредѣленія доброты хлѣбнаго вина, и въ такихъ случаяхъ они называются *Спирто-мѣрами* (*pèse-esprits*). См. также BALANCE HYDROSTATIQUE.

Ареометры бываютъ различныя по своему устройству: простѣйшій изъ нихъ представляетъ на чертѣжѣ 5 (листъ II). Онъ состоитъ изъ пустаго смекланнаго сосуда *AB*; нижній шарикъ

*) По гречески *φύρος*, а по лат. *arsia* значащая несоко.

*) Греческій дюймъ былъ, какъ полагаютъ, менѣе чѣмъ болѣе $\frac{1}{2}$ нашего дюйма.

В наполняют ртутью или свинцом для того, чтобы испортившись, при погружении в жидкость, удерживать в ней вертикальное положение. Но известно, что всякое тело, погруженное в жидкость, теряет из веса своего весь вытесненной им жидкости; следовательно, в жидкостях менее плотных, ареометр опустится ниже, нежели в тех, коих плотность будет большая. Сего замечания достаточно для того, чтобы предвидеть возможности судить о плотности жидкостей по степени углубления в нее испортившихся. На сей конец в трубку AC вкладывается бумажная трубочка с означенными на ней делениями, и эти деления показывают плотности той жидкости, в которую погружается ареометр. Впрочем, из самого вида испортившихся легко усмотреть, что деления сіа не равны между собою, а идут увеличиваясь кверху. Такого рода ареометр преимущественно употребляется для определения доброты хлебных вин, и называется спиртомером.

Мы не будем останавливаться на ареометрах с рамками (*aréomètres à poids*) Фиранейта и Никомеда: читателя найдутъ ихъ описанія во всѣхъ курсахъ Физики.

ARÉOMÉTRIE. АРЕОМЕТРИЯ. Искусство определять плотность жидкостей.

ARÊTE. (Геом.) РЕБРО. Такъ называется в линейчатыхъ поверхностяхъ производящая прямая во всѣхъ ея положеніяхъ. *Arête d'un cône, d'un cylindre; ребра конуса, цилиндра.* — Въ многогранныхъ *робрами* называются пересѣченія плоскостей граней. См. **ANGLE SOLIDE.**

ARÊTE DE REBOUSSEMENT. ВОЗВРАТНОЕ РЕБРО, РЕБРО ВОЗВРАТА. Такъ называлъ Монжъ кривую, образуемую последовательными пересѣченіями *ла-ррактеристикъ* въ какой нибудь поверхности; См. **CARACTERISTIQUE.** Возвратныхъ ребръ можетъ быть столько, сколько и характеристикъ. И такъ, целый родъ кривыхъ поверхностей, выражаемый уравненіемъ перваго порядка въ частныхъ дифференціалахъ, имѣетъ только одну характеристику, а следовательно и одно возвратное ребро. Когда дифференціальное уравненіе поверхностей извѣстнаго рода будетъ втораго порядка, то вообще будетъ существовать двѣ характеристики, а потому и два возвратныхъ ребра.

Мы сказали вообще, ибо можетъ случиться, какъ напримѣръ въ развертывающихся поверхностяхъ, что двѣ характеристики приводятся къ одной, и въ такомъ случаѣ будетъ также существовать одно возвратное ребро.

ARGUMENT. (Зам. сунк.) АРГУМЕНТЪ. Такъ называется аналитическая функция $\int_0^q \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}$ въ отношеніи къ широтѣ q и къ прагонометрическимъ линиямъ этой самой широты.

Изобразивъ чрезъ $\int_0^q \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}$, имеемъ $u = \arg. q$, $\sin q = \sin \arg. q$; и проч. См. **ELLIPTIQUES (FONCTIONS).**

ARGUMENT D'UNE TABLE. АРГУМЕНТЪ ТАБЛИЦЫ. Переменная величина, для различныхъ значеній которой помѣщается въ таблицѣ извѣстная функция этой переменной. Напримѣръ въ логарифмическихъ таблицахъ, гдѣ показаны величинны функции $\log x$, число x , есть *аргументъ* таблицы.

ARISTOTE (ROUE D'). (Мех.) АРИСТОТЕЛЕВО КОЛЕСО. Такъ называютъ казущійся парадоксъ, представляющійся при движеніи колеса около оси, когда самое колесо касается на плоскости по прямой линіи. Полагаютъ что *Аристотель* замѣтилъ первый этотъ спранный парадоксъ, который по этой причинѣ и удержалъ наименованіе *Аристотелева колеса*.

Положимъ что кругъ, обращаясь около своего центра, касается въ то же время по прямой линіи, и, съ совершеніемъ полнаго оборота, описываетъ прямую, коей длина равна его окружности. Если въ этотъ кругъ, который назовемъ *главнымъ*, вообразимъ другой меньшій, одностенный съ первымъ, и движущійся вмѣстѣ съ нимъ, то, по совершеніи большаго кругомъ полнаго оборота, малый опишетъ прямую линію, равную уже не своей окружности, но окружности главнаго круга. Такъ напримѣръ, въ каретномъ колесѣ, спущенна при своемъ обращеніи переѣдетъ прямую, большую своей окружности, а именно, окружность самаго колеса. Описанный случай не подверженъ никакому сомнѣнію: онъ подтверждается ежедневнымъ опытомъ. Но какъ объяснить, что окружности супплицы описываютъ прямую, большую этой самой распрямленной окружности?

Аристотелево рѣшеніе состояло только въ лежачемъ положеніи того, въ чемъ состояло затрудненіе. Галилей, пытавшійся также объяснить эпимъ парадоксъ, вообразилъ безчисленное множество бесконечно малыхъ пустотъ (*vides infinitum petiti*), распределенныхъ по двумъ прямымъ линіямъ, описываемымъ обонимъ кругамъ; онъ утверждалъ, что малый кругъ не касается точекъ своей окружности къ пустымъ пространствамъ переходимой имъ прямой линіи, и, такимъ образомъ, описывается только линію, равную длинѣ своей окружности. Нѣтъ надобности доказывать слишкомъ очевидную основательность такого объясненія. —

Дѣлали и другія понятія, болѣею частью междоусловительными. Первое настоящее рѣшеніе парадокса Аристотелева колеса, предложено членомъ Парижской Академіи *Дорту де Мераномъ* (*Dortou de Meran*) въ 1715 году. Онъ объяснилъ кажущееся противорѣчіе приведеннаго случая *скользящимъ* спутницы по прямой линіи, переходимой точками съ окружности.

Можно разрѣшить затрудненіе еще и другими образами. Вообразимъ кругъ, обращающійся около своего центра въ то время, какъ сей послѣдній движется по прямой линіи; очевидно, что практической движенье центра вовсе не зависитъ отъ вращательнаго движенья круга, и следовательно содержаніе между скоростями, относительно къ обонимъ движеніямъ, совершенно произвольное. Но, очевидно, что можно уподобить капающее на плоскости колесо съ кругомъ, обращающимся около своего центра, между тѣмъ какъ эпимъ центръ движется параллельно упирающейся плоскости. Следовательно, такъ же легко вообразить движенье колеса, какъ и движенье круга.

ARITHMANCIE или **ARITHMOMANCIE**. **АРНОМОНАНТІЯ**, **ЧИСЛОГДАНИЕ**. Милкое искусство гадать посредствомъ чиселъ, и ученіе о сокровенныхъ ихъ свойствахъ. Оно, какъ полагаютъ, получило свое происхожденіе у Халдеевъ, Египтянъ и Евреевъ, и перешло потомъ къ Грекамъ. Последователи *Пифагора* принимали *единицу* за рождающее начало всѣхъ чиселъ; *два*, изображало у нихъ злое начало, и следовательно безпорядокъ, смѣшеніе и. п. п. Число *три* называли они *совершенною гармонією*, и находили въ немъ

разныя магическія значенія. *Число* было у нихъ въ большомъ уваженіи. Число 5, какъ составленное изъ 2 и 3, первого чѣтного и перваго нечѣтнаго числа, означало собою бракъ, и поному сивало себя особенное покровительство Юноны. Подобныя заблужденія уиъ человеческого (если только это истинное искусство не заключало въ себя простой аллегоріи), могутъ найтись себѣ оправданіе развѣ только въ неистовствѣномъ состояніи тѣхъ ондаленныхъ отъ насъ временъ, въ которыхъ они возникли. —

ARITHMETICEN, **ARITHMETIKĒ**, **СЧѢТНИЦА**, **ЧИСЛОСЛОВЪ**. Человекъ знающій основательнаго Ариметики, или преподающій эту науку.

ARITHMETIQUE, **АРІΘΜΕΤΙΚΑ**, **ЧИСЛОСЛОВІЕ**, **СЧѢТНАЯ НАУКА**. Отъ Греческаго *αριθμος*, число, и *τεχνη*, искусство. Наука занимающаяся дѣйствіями надъ числами. Семь главныхъ дѣйствій, составляющихъ Ариметичку, суть: *сложеніе*, *вычитаніе*, *умноженіе*, *дѣленіе*, *возведеніе въ степени*, *извлеченіе корней* и *рѣшеніе численыхъ уравненій*. Хотя обыкновенно относятъ къ Алатебръ рѣшеніе численыхъ уравненій, но по мнѣнію многихъ новѣйшихъ математиковъ, разумѣющихъ подъ Ариметичкою *таблицестую часть Алатебры*, это дѣйствіе должно войти въ составъ Ариметички. *Выводеніе*, *возведеніе* въ степень можетъ быть приписано за частный случай умноженія, по чему остануется только *шесть* различныхъ между собою дѣйствій. Если бы желали еще болѣе ограничить число дѣйствій, то можно бы было привести ихъ къ одному, именно, къ *сложенію*. И дѣйствительно, всѣ знаютъ, что вычитаніе приводится къ сложенію; что касается до умноженія и дѣленія, то первое есть не иное что какъ сокращенное сложеніе, а второе, вычитаніе. При извлеченіи же корней, или при рѣшеніи численыхъ уравненій, мы производили всегда, или сложенія и умноженія, или вычитанія и дѣленія. Однако же несправедливо было бы сказать, что извлеченіе корней и рѣшеніе уравненій приводятся къ четырѣмъ упомянутымъ дѣйствіямъ; ибо, сіи послѣдніи должны быть производимы въ *высшемъ* порядкѣ, и эпимъ самый порядокъ составляетъ собою существенную часть дѣйствія. Смол. **ADDITION**, **MULTIPLICATION**, **DIVISION**, **ELEVATION**

AUX PUISSANCES, EXTRACTION DES RACINES, RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS.

Многие математикам затруднились разграничить Арифметику отъ Ариеметрики, потому что первая есть одна наука занимаемая теми же действиями, какъ и вторая. Но, должно замѣтить во первыхъ, что Алгебра *доказывается* нѣ правилами, которыми Ариеметрика руководствуется, а во вторыхъ, что Алгебра имеетъ предметомъ преобразованіе различныхъ действий однихъ въ другія такъ, чтобы Ариеметикѣ оставалось только исполненіе, но возможности проснѣйшихъ. Вотъ, кажется, рѣзкое различіе между сими двумя науками. Смол. NOMBRE, ALGEBRE.

Нельзя сказать ничего положительнаго ни о времени, ни о мѣстѣ рожденія Ариеметрики. Нѣкоторые приписали египтянамъ, что она открыта Хадданами, и другіе, Египтянами. Страбонъ, въ своей Географіи, говоритъ, что современники его приписывали изобрѣшеніе Ариеметикѣ Финикіанамъ, потому что народъ сей производилъ въ свое время самую обширную торговлю въ свѣтѣ; а это самое необходимо требовало накопительныхъ познаній въ счѣтной наукѣ. Оставляя всѣ эти догадки, можно, кажется, принять достаточно вѣрно то, что люди начали считать съ самаго того времени, какъ составлялся обществъ; безъ сомнѣнія, они знали число членовъ своихъ семействъ, считали стада свои, и пр. Вотъ начало Ариеметики. Что касается до ея усовершенствованія, то безъ сомнѣнія оно должно было означено къ вѣкамъ гораздо позднѣйшимъ.

Греки заимствовали Ариеметику отъ Египтянъ, и значительно обогатили ея, передали Римлянамъ; потомъ она перешла къ Арабамъ, и наконецъ къ намъ. Арабы оказали важную услугу счѣтной наукѣ изобрѣщеніемъ весьма удобнаго изображенія чиселъ, много способствовавшего къ усовершенствованію ея. Смол. CARACTERES COMMUNS.

Всѣ народы (за исключеніемъ древнихъ Китайцевъ и еще одного неистощимаго племени, о которомъ упоминаетъ Аристотель) избрали десятичную систему счисленія. Это безусловное согласіе можно приписать только тому, что народы, находившіеся еще въ младенчествѣ, начинали считать по пальцамъ. Настѣивать десять на обѣихъ рукахъ, какъ должно было удерживать

это въ памяти; потомъ повторили то же дѣйствіе во второй разъ, въ третій, и такъ далѣе до десяти разъ, что могли еще означать пальцами. Но, истощивъ знаменій образовъ десяти разъ число пальцевъ, то есть, достигнувъ 100, они должны были уже придумать какой либо знаменій для изображенія ста, и по той же причинѣ, для изображенія десяти сотенъ и такъ далѣе. — Вотъ, безъ сомнѣнія, основаніе десятичной системы. Что касается до изображенія чиселъ знаменіями, то почти всѣ народы употребляли на сей конецъ письма своихъ алфавитовъ. Смол. CHARACTERE.

Предѣлы нашего Лексікона не позволяютъ намъ входить ни въ какія подробности, относительно сущности Ариеметики и числительныхъ знаменій у различныхъ народовъ. Читатель найдетъ любопытныя подробности о сей предметѣ въ *Энциклопедическомъ Лексиконѣ*, въ статьѣ: *Ариеметика* соч. Лемана.

Нѣкоторые математикамъ раздѣляли Ариеметику на слѣдующія части:

ARITHMÉTIQUE THÉORIQUE. Теорическая, умозрительная, основная Ариеметика. Она занимается изслѣдованіемъ различныхъ свойствъ и отношеній, существующихъ между означенными числами, и доказательствомъ ихъ правды, которыми она руководствуется. Нѣкоторые части теоретической Ариеметики должно отнести къ Алгебрѣ.

ARITHMÉTIQUE PRATIQUE. Практическая, техническая, прикладная Ариеметика. Практическая Ариеметика занимается самымъ производствомъ численныхъ выкладокъ; напримеръ, еслибы требовалось раздѣлить число 3717 на 9, и потомъ, частное умножить на 15, то такая задача относилась бы къ *практической Ариеметикѣ*.

ARITHMÉTIQUE INSTRUMENTALE. Искусственная Ариеметика, то есть та, въ которой дѣйствія производятся съ болѣе или менѣею скоростію, посредствомъ изобрѣтенныхъ на сей конецъ машинъ; таковы напримеръ *Нетерова палочка*, *Гунтеровъ шкала*, *Ариеметическая машина Паскаля*, новѣйшая Англійская математика *Баббеджа*, и пр. См. BAGUETTES DE NEPER, ÉCHELLE DE GUNTER, BABBADGE (MACHINE ARITHMÉTIQUE DE).

ARITHMÉTIQUE LOGARITHMIQUE. Логарифмическая Арифметика, въ которой излагаются способы для произведенія выкладок посредствомъ логарифмовъ.

ARITHMÉTIQUE NUMÉRIQUE. Численная Арифметика, занимающая предметомъ дѣйствія надъ величинами выраженными, изображенными цифрами. Въ ней употребляются *Арабскія цифры*.

ARITHMÉTIQUE SPÉCIEUSE, ARITHMÉTIQUE LITTÉRALE или **ALGÈBRE.** Буквенная Арифметика, Алгебра. Смол. **ALGÈBRE.**

ARITHMÉTIQUE DÉCIMALE, DÉCADAIRE, или DÉNAIRE. Десятичная Арифметика (принятая всѣми), въ которой употребляются *десять знаковъ*, именно: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

ARITHMÉTIQUE BINAIRE или **DYADIQUE.** Двухзначная, двойничная, диадическая Арифметика. Въ ней употребляются только *два знака*, обыкновенно 0 и 1. Смол. **BINAIRE (ARITHMÉTIQUE).**

ARITHMÉTIQUE TRINAIRE. Трехзначная, тректирениная Арифметика, употребляющая *три знака*: 0, 1 и 2.

ARITHMÉTIQUE TÉTRASTIQUE или **QUATÉNAIRE.** Четырехзначная Арифметика, въ которой употребляются *четыре знака*: 0, 1, 2 и 3.

ARITHMÉTIQUE QUINAIRE. Пятизначная Арифметика, въ которой все числа изображаются *пятью знаками*: 0, 1, 2, 3, 4.

ARITHMÉTIQUE DUODÉSIMALE или **DUODÉNAIRE.** Двенадцатизначная, двенадцатицифренная, дванадцатицифренная Арифметика, употребляющая *двенадцать знаковъ*, каковы: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и еще *два* произвольные.

ARITHMÉTIQUE SEXAGÉSIMALE. Шестидесятичная Арифметика, занимающаяся шестидесятичными дробями. Смол. **SEXAGÉSIMAL.**

ARITHMÉTIQUE DES INFINIS Арифметика безконечныхъ, въ которой излагаются способы для опредѣленія суммы безконечныхъ рядовъ. Смол. **INFINI, SÉRIE.**

ARITHMÉTIQUE DES INCOMMENSURABLES, DES IRRATIONNELS. Арифметика несоизмеримыхъ, иррациональныхъ. Смол. **INCOMMENSURABLE, IRRATIONNEL.**

ARITHMÉTIQUE UNIVERSELLE. Всюобщая Арифметика. Такъ называлъ Нотонъ Алгебру,

или науку о величинахъ вообще. См. **ALGÈBRE, ANALYSE.** Она вышла въ 1707 году книгою подъ заглавіемъ: *Arithmetica universalis*, въ которой излагаются правила Алгебры и приложение сей науки къ Геометріи. Въ этойъ сочиненіи Нотонъ помѣстилъ разные новые способы; наиболее примѣчательные относятся къ приведенію въ уравненіе вопросовъ геометрическихъ. Лучшій изъ комментаторовъ *Всегообщей Арифметики* былъ *Кастильонъ (Castillon)*, членъ Берлинской Академіи, который, въ 1761 году, выдалъ въ 2 частяхъ знаменитое таверженіе Нютона, съ собственными поправками, подъ заглавіемъ: *Arithmetica universalis, etc. cum commentariis Ioh. Castillonii.*

ARITHMÉTIQUE TRANSSCENDANTE. Трансцендентная, высшая Арифметика, Теорія чиселъ. Смол. **NOMBRES (THÉORIE DES).**

ARITHMÉTIQUE POLITIQUE. Политическая Арифметика. Она наука, сфо назв. обрабатываемая, нѣтъ предмета изслѣдованія, полезная для благосостоянія народовъ; таковы, напримѣръ, изслѣдованія относящіяся къ народонаселенію, къ оцѣнѣ плодородности почвъ, количеству потребляемыхъ жизненныхъ припасовъ, и проч. Соображалъ такого рода свѣдѣнія государственныя чиновники, которые вносили замѣчанія, записки для земледѣль, мануфактуръ и купцовъ, и проч.

ARITHMÉTIQUE COMMERCIALE. Коммерческая Арифметика. Приложение Арифметики къ различнымъ задачамъ, относящимся къ коммерціи, какъ то: къ сравненію вексельныхъ курсовъ, къ арбитражу, годовымъ уплатамъ, къ правилу учета и проч. Смол. **ARBITRAGE, ANNUITÉS, ESCOMPTÉ, CHANGE** и проч.

ARITHMÉTIQUE AMUSANTE или **DIVINATOIRE.** Увеселительная, гадательная Арифметика. Искусство опредѣлять посредствомъ вычисленія какія либо загаданныя числа или карты, или еще, найдяши отношеніиальный порядокъ, при которомъ удовлетворялись бы извѣстныя условія. Для примѣра приведемъ следующую задачу: *Пятьдесятъ человекъ Турокъ и столько же Христіанъ, находившихся на кораблѣ, были застигнуты жестокою бурю. Побоясь въ морѣ въстать, корабль объявилъ, что необходимо выброситъ за бортъ и половину экипажа для спасенія другой по-*

(B) $u_1 - u_0, u_2 - u_1, u_3 - u_2, u_4 - u_3, \dots$

и такъ же можемъ шретьи

(C) $u_2 - 2u_1 + u_0, u_3 - 2u_2 + u_1, u_4 - 2u_3 + u_2, \dots$

и такими же образомъ составимъ ряды (D), (E) и проч., то ряды (B), (C), (D), (E), ..., въ отноше-
нии къ (A), называются *первыми, вторыми, третьими, четвертыми... разностными рядами*. Если n -й разностный рядъ будетъ весь состоять изъ равныхъ членовъ, отличныхъ отъ нуля, то рядъ называется *арифметическимъ рядомъ n -го порядка*. Очевидно, что въ такомъ случаѣ, члены $(n+1)$ -го, $(n+2)$ -го и проч. разностныхъ рядовъ обращаются въ нули. Изъ сего опредѣленія легко заключить, что арифметическая прогрессія $a, a+b, a+2b, a+3b, \dots$

есть арифметическій рядъ *первого порядка*, для котораго постоянный членъ перваго разностнаго ряда $= 1.b$.

Рядъ

$$a^2, (a+b)^2, (a+2b)^2, (a+3b)^2, \dots$$

изображаетъ арифметическій рядъ *второго порядка*, для котораго постоянный членъ втораго разностнаго ряда $= 1.2.b^2$. И вообще, строка

$$a^n, (a+b)^n, (a+2b)^n, (a+3b)^n, \dots$$

представляетъ арифметическій рядъ *n -го порядка*, для котораго постоянный членъ n -го разностнаго ряда $= 1.2.3 \dots n.b^n$.

Изъ самаго опредѣленія рядовъ арифметиче-
скихъ легко заключить, что изслѣдованіе ихъ свойствъ самымъ естественнымъ образомъ при-
водило къ *Искусленію Разностей*. См. DIFFE-
RENCES (CALCUL AUX — FINIES).

ARITHMOGRAPHIE. АРИТМОГРАФЪ, то же что ARITHMOMETRE (Смоч.).

ARITHMOGRAPHIE. АРИТМОГРАФИЯ. Такъ Г. Ламберъ (*Ampere*); въ своемъ *Essai sur la philosophie des sciences*, Paris 1834 г. предлагаетъ назвать Ари-
меттику и элементарную часть Алгебры.

ARITHMOLOGIE. АРИТМОЛОГИЯ. Наименованіе, предлагаемое въ томъ же сочиненіи Г. Лампера для *Чистой Математики*, включая въ нее и Ис-
численіе Вероятностей. — Некоторые матема-
тики называли иногда Арифметику *Арифмологією*.

ARITHMOMETRE. АРИТМОМЕТРЪ. Счетная машина, изобрѣшенная *Томасомъ де Колмаръ* (*Thomas de Colmar*), и представленная въ на раз-
смотрѣніе Парижской Академіи въ 1821 году.

АРИТМОМОНИКЪ. АРИТМОМОНИЯ. Такъ назы-
вали некоторые математич. элементарную часть

универсальной Арифметики.

**ARMPLE. (Геом.) КОЛЬЦО, КОЛЬЦЕВАЯ ПО-
ВЕРХНОСТЬ**. Смоч. ANNULAIRE (SURFACE).

ARPENT. (Метр.) АРПАНЪ. Французская пове-
рельная мѣра, равная 300 квадратнымъ тоаз-
замъ, или 0,3125 Русскихъ десятинъ.

**ARRENTAGE. ЗЕМЛЕДѢРІЕ, МЕЖЕВАНІЕ,
МЕЖЕВКА**. Искусство, имѣющее предметомъ
измѣреніе полей, но если, изображеніе участковъ
земли на бумагѣ въ точномъ, но уменьшенномъ
видѣ, и опредѣленіе ихъ поверхности.

Земледѣріе собственно основано на трехъ
частей.

Первую часть составляютъ дѣйствія, произ-
водимыя на самомъ мѣстѣ, какъ то: измѣреніе
основаній и другихъ линій на землѣ, также, опре-
дѣленіе угловъ. На сей конецъ употребляютъ
разныя инструменты. Смоч. CHAÎNE, BASSE,
EQUERRE D'ARPENTEUR, ASTROLABE,
GRAPHOMETRE, ROUSSOLE, PLANCHETTE,
NIVEAU, JALON, FICHES и проч.

Вторая часть занимается изображеніемъ на
бумагѣ того участка земли, котораго опредѣленіе
размѣры и видъ, при чемъ употребляютъ разныя
пособія. Смоч. COMPAS, RAPPORTEUR,
ÉCHELLE и проч. Смоч. также CARTE, PLAN.

Предметъ третьей части — опредѣленіе ква-
дратнаго содержанія или поверхности изобра-
женнаго на бумагѣ участка земли. Смоч. AIRE,
TRIANGLE, CARRÉ и проч.

Первая часть преимущественно называется
Землемѣріемъ, вторая — *Сѣлкою плановъ* (*Levé
des plans*); третья — *Измѣреніе изъ поверхностей*,
Высѣлкой Тоизе. Смоч. эти слова.

Земледѣріе, которое, въ историческомъ отно-
шеніи, можно считать основнымъ камнемъ Геоде-
тріи, по свидѣтельству всѣхъ писателей, полу-
чило свое начало въ Египтѣ. См. GÉOMETRIE.
По житію некоторыхъ, причиненная разлитіемъ
рѣки Нила затаптываніемъ въ границахъ смеж-
ныхъ между собою участковъ земли, и необходи-
мость разграничивать ихъ каждый разъ кажды-
мъ засѣданіемъ искомыхъ постоянныхъ прѣзвѣ-
дъ межеваній полей. Вотъ происхожденіе Земледѣ-
рія. Другіе, откосиши начало этого искусства

къ временамъ Освоившимся. въ цѣрковномъ коно-
раго Египетъ пересѣли безчисленнымъ множе-
ствомъ каналовъ, и раздѣляли утѣшки между его
дѣлами, которыхъ обложилъ податью, сораз-
мѣрно съ величиною достигшейся каждому землѣ.
Такой раздѣлъ конечно преобладавъ нѣкоторыхъ
возможностей въ Геометріи, и, по свидѣтельству Ге-
родота, онъ былъ произведенъ подъ руководствомъ
Фота (*Thot* или *Theut*), сановника при дворѣ *Са-
достриса*, поощренъ, по повелѣнію того же историка,
одно лице изъ *Оурирели*.

Что касается до дальнейшихъ успѣховъ Земле-
мѣрія, то мы прислаиваемъ чинамъ члену къ слову
GEOMETRIE. Высшая часть Землемѣрія назы-
вается Гевдезією. Смол. GÉODÉSIE.

ARPEUR, МЕЖЕВАТЬ. — ОМЕЖЕВАТЬ.

Arpenter des champs, межевать поля. Смол. выше.

ARPEUR, ЗЕМЛЕМѢРЪ, МЕЖЕВЩИКЪ.

Человѣкъ занимающійся Землемѣріемъ. См. AR-
PENTAGE. *Chaîne d'arpenteur, межевая цѣпь.*
Équerre d'arpenteur, землемерный угольникъ. См.
CHAÎNE, EQUERRE.

ARRANGEMENT, ПЕРЕСТАНОВЛЕНІЕ. Смол.

ALTERNATION.

ARRÉRAGE; употребительнѣе во множественномъ числѣ ARRÉRAGES. НЕДОИМКА, НЕДО-

БОРЪ. Та сумма, которая не была уплачена къ
надлежащему сроку.

Положимъ, напримѣръ, что сумма *A*, которая
должна быть уплачена къ извѣстному сроку, у-
плачивалась по истеченіи *t* лѣтъ послѣ условлен-
наго срока. Если изобразить чрезъ *p* процен-
ты со спа, то сверхъ недоимочной суммы *A*, полу-
читель недоимки долженъ еще взыскать процен-
ты съ нея за *t* лѣтъ. Принимая въ расчетъ только
простые проценты, добавочная сумма будетъ $\frac{Atp}{100}$;
въ случаѣ сложныхъ процентовъ, она опредѣляется
формулою $A \left[\left(1 + \frac{p}{100} \right)^t - 1 \right]$. Смол. INTÉRÊT.

ARRÊT (POINT D'). (Геом.) ТОЧКА ПРЕСЪ- ЧЕНІЯ, ПРИОСТАНОВЛЕНІЯ. Такъ называется точка, въ которой кривая вдругъ пресѣкается или останавливается. Напримѣръ, кривая, опре- дѣляемая уравненіемъ $y = \frac{1}{\log(x)}$, имѣетъ точку пресѣченія въ началѣ координатъ. См. POINTS SINGULIERS.

ARS CONJECTANDI, ART DE CONJECTURER.

ИСКУССТВО ПРЕДПОЛАГАТЬ. Заглавіе при-

мѣчательнаго сочиненія *Якова Бернулли* объ Ис-
численіи Вѣроятностей. Авторъ предполагаетъ въ
немъ общую теорію соединеній и рядовъ, и при-
кладываетъ ее къ рѣшенію многихъ трудныхъ во-
просовъ, относящихся къ Анализу Вѣроятностей.
Это сочиненіе въ особенностяхъ привѣчательно
доказательствомъ слагающаго предположенія: *При
неопредѣленномъ повтореніи испытаній, изъ коихъ
каждое приводитъ къ одному изъ нѣсколькихъ со-
бытій, отношеніе между числами появленій двухъ
какихъ ни есть изъ событий неистощимо прибли-
жается къ отношенію вѣроятностей тѣхъ же
событій, и наконецъ, при достаточномъ числѣ ис-
пытаній, разступаетъ отъ него какъ угодно мало.*
Сочиненіе *Arts conjectandi* издано *Николаемъ Бер-
нулли* въ Базелѣ въ 1713 году, семь лѣтъ послѣ
смерти Сочинителя.

ART CARACTÉRISTIQUE. ХАРАКТЕРИСТИЧЕ- СКОЕ, ЗНАКОСОКРАТИТЕЛЬНОЕ ИСКУС-

СТВО. Искусство изображать яснымъ и про-
стымъ образомъ различныя свойства и взаимныя
соотношенія величинъ, употребляя на то при-
данныя знаменья. Такимъ способомъ можно
значительно сокращать какъ словесное выраже-
ніе предположеній, такъ и самыя доказательства
различныхъ теоремъ и рѣшенія вопросовъ. На-
примѣръ, желая выразить посредствомъ знаковъ,
что *квадратъ числа 5, сложенный съ единицею,
дѣлится безъ остатка на 13*, мы пишемъ просто:
 $5^2 + 1 \equiv 0 \pmod{13}$. Смол. CARACTERE.

ARTICLE. Уст. выр. (Арив.) КРУГЛОЕ ЧИСЛО.

Число, дѣлящееся безъ остатка на 10; напримѣръ
20, 50, 100 и проч. Такого рода число называ-
лось также иногда *nombre rond, numerus rotundus*.

ARTIFICES DE CALCUL. ИСКУСНЫЕ, УДАЧ- НЫЕ ПРИЕМЫ, упрощающіе вычисленія или до-

казательства какихъ нибудь предположеній.

ARTIFICIELLES (LIGNES). ИСКУССТВЕННЫЯ

ЛИНІИ. Такъ называются линіи, намѣченныя на
масштабѣ, и изображающія *логарифмы, синусы,
тангенсы* и проч. Посредствомъ такого масштаба,
вмѣстѣ съ обыкновеннымъ, можно рѣшать, доволь-
но вѣрно, задачи изъ Тригонометріи, Мореплаван-
ія и проч.

НОВЫЕ АРТИФИЦИАЛЫ, ИСКУССТВЕННЫЕ ЧИСЛА, то есть *логарифмы, синусы, тангенсы* и проч.



ASCENDANTE (PROGRESSION). (Анг.) ВОЗРАСТАЮЩАЯ, ВОСХОДЯЩАЯ ПРОГРЕССИЯ.

Так называется прогрессия, коей члены поспешно увеличиваются. Такова, например, арифметическая 1, 2, 3, 4, ... и геометрическая 1, 2, 4, 8, ... *Developper une fonction en serie, procedant suivant les puissances ascendantes de la variable, разложить функцию в ряд, простирающийся по возрастающим степеням переменной.* — Вообще ряд называется *восходящим* (*serie ascendante*), когда он простирается по возрастающим целым *положительным* степеням переменной количества.

Таков например ряд $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$ *Исходящий ряд (serie descendante)* есть такой, в котором степени переменной количества целым, и, как выше, *возрастающим* числам, но *отрицательным*; например: $1 + \frac{x^{-1}}{1} + \frac{x^{-2}}{1.2} + \frac{x^{-3}}{1.2.3} + \dots = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{1.2.x^2} + \frac{1}{1.2.3.x^3} + \dots$

ASCENSION. (Мех.) ВОСХОЖДЕНИЕ, то есть, движение снизу вверх. *Ascension verticale d'un corps pesant; вертикальное восхождение тяжёлого тела. Ascension des liquides dans les tubes capillaires; восхождение жидкостей в капиллярных трубках.*

Mouvement ascensionnel. Движение вверх, движение восходящего тела. См. CHUTE DES GRAVES.

ASCENSION DROITE. ПРЯМОЕ ВОСХОЖДЕНИЕ светила есть дуга экватора, считаемая по порядку знаков от точки весеннего равноденствия, до точки, в которой круг склонения, проходящий чрез светило, перескаеет экваторъ.

ASCENSION OBLIQUE. КОСВЕННОЕ ВОСХОЖДЕНИЕ светила есть дуга экватора, заключающаяся между точкою весеннего равноденствия и точкою экватора, которая в одно время восходит со светиломъ. И такъ косвенное восхождение одной и той же звезды, но в разныхъ местахъ поверхности земли, будетъ больше или меньше, смотря на большее или меньшее нахо-

ждение сферы въ этихъ местахъ; между тѣмъ какъ прямое восхождение светила не зависитъ отъ наклонения. Разность между прямымъ и косвеннымъ восхождениемъ называется *разностью восхождений* (*différence ascensionnelle*).

ASPIRANTE (POMPE). (Мех.) ВСАСЫВАЮЩІЙ НАСОСЪ. Смол. POMPE.

ASSEMBLAGE. (Геом.) СОЕДИНЕНИЕ, СОВОКУПЛЕНИЕ. *Assemblages de lignes droites, de plans. Соединения прямыхъ линий, плоскостей. Les assemblages de plans qui circonscrivent un espace, donnent des polyèdres; соединения плоскостей, ограничивающихъ пространство, образуютъ многогранники.*

ASSIGNABLE (QUANTITÉ). ОЦЕНУТЕЛЬНАЯ, ЧУВСТВОВАТЕЛЬНАЯ ВЕЛИЧИНА, то есть величина, которая можетъ быть сравниваема съ другими конечными величинами. И такъ, подобное количество хоня и бываетъ обыкновенно весьма малое, однакоже не можетъ быть принято за *бесконечно малое*.

ASSEMBLÉES. (Мех. Вѣр.) СОБРАНИЯ. Вѣроятность справедливости рѣшенія какого либо для Собраніемъ судей есть вопросъ довольно щекотливый въ Анализѣ Вѣроятностей. Анализъ сей доставляетъ способы для опредѣленія *состава* Собраній при условіи, чтобы ихъ рѣшенія были по возможности правдивы; онъ приводитъ къ заключенію, которое впрочемъ показываетъ и зримый рѣсурдукъ, что тѣмъ члены Собранія будутъ просвѣщеннѣе, тѣмъ рѣшенія ихъ будутъ болѣе правдивы, и тогда вѣроятность справедливости ихъ рѣшеній будетъ увеличиваться съ ихъ числомъ. Напротивъ того, вѣроятность справедливости рѣшенія уменьшается съ увеличеніемъ числа членовъ, если сіи послѣдніе недостаточно посвящены въ сущность дѣла, подлежащаго ихъ обсужденію. Отсюда слѣдуетъ, что въ просвѣщенныхъ Государствахъ число членовъ Законодательнаго Собранія должно быть значительное, а это легко выполнить тамъ, гдѣ образованность почти повсемѣстная. Въ Государствахъ менѣе просвѣщенныхъ, гдѣ образованные люди довольно рѣдки, опасно допускать многочисленность въ Собраніяхъ, потому что между членами могутъ найтись такіе, которые, по своему невѣжеству, не въ состояніи здраво обсуждать дѣло, предлагаемое на ихъ разсмотрѣніе.

Что касается до аналитического решения вопроса, относящегося къ приговорамъ Собраний, то мы отмечаемъ чашечекъ къ снѣдью: TRI-BUNAUX.

ASSIGNER. ОПРЕДЕЛИТЬ, НАЙТИ, ПРИПИСАТЬ. *On vous assigne à une valeur telle que, и проч.* Можно будетъ опредѣлить x такимъ образомъ, приписать x -у такое значеніе, что и проч.

ASSOCIÉS (NOMMÉS). (Теор. Чис.) СОПРЯЖЕННЫЯ ЧИСЛА. Сопряженными числами относительно модуля p , называючися такія, коихъ произведение равноостаточно съ 1-ею. Напримѣръ числа 5 и 8, относительно модуля 15, будутъ сопряженными, ибо $5 \cdot 8 \equiv 1 \pmod{15}$. Смот. CONGRUS.

ASSUJETTIR. ПОДЧИНИТЬ. *Assujettir une quantité à certaines conditions; подчинить количество нѣкоторымъ условіямъ. Un point matériel assujetti à rester sur une surface donnée; матеріальная точка подчиненная условію оставаться на данной поверхности. — ASSUJETTIR или RENDRE FIXE. УТВЕРДИТЬ, СДѢЛАТЬ НЕПОДВИЖНЫМЪ.* *Un atôme est assujettir aux points dans un système invariable, sollicité par des forces quelconques, ce système restera en équilibre; если сдѣлаемъ неподвижными три точки съ неизмѣняемой системой, побуждаемой какими ни есть силами, то система будетъ находиться въ равновѣсѣи.*

ASSURANCES. (Исч. Вѣр.) ЗАСТРАХОВАНІЕ, СТРАХОВАНІЕ, ОТДАВАНІЕ НА СТРАХЪ. Смот. ASSURER, AVANTAGE.

COMPAGNIES D'ASSURANCES. СТРАХОВЫЯ ОБЩЕСТВА. *Assurances maritimes; застрахованіе кораблей. Assurances sur la vie des hommes. Застрахованіе человеческой жизни. Assurances contre l'incendie. Застрахованіе отъ огня. Assurance contre la grêle. Застрахованіе отъ града.*

TAUX DE L'ASSURANCE или PRIME. СТРАХОВАЯ ЦЕНА. Проценны вліяющія Страховому Обществу лицамъ, отдающимъ на страхъ. Страховая премія зависитъ преимущественно отъ вѣроятности, что застраховываемый предметъ можетъ утратиться или подвергнуться поврежденію. Если бы желали сохранять полную справедливость, то надлежало бы установить премію, которая бы равнялась цѣнѣ вещи, отдаваемой на страхъ, возможной на вѣроятность ея утраты. Такъ напримѣръ, застраховывая на одинъ годъ дождь,

оцѣненный въ 100000 рублей, и предполагая 5 пожаровъ на 1000 домовъ въ теченіи года, застрахователь долженъ заплатить Страховому Обществу $\frac{5}{1000} \cdot 100000 \text{ руб.} = 500 \text{ рублей}$; но онъ можетъ заплатить болѣе этой суммы, и сохранить прямою преимущественно со стороны *красоты выгоды*. Смол. AVANTAGE MORAL. Еслибы Страховое Общество получало только преміи, вычисленныя по приведенному сей-часъ правилу, то оно бы скоро рушилось, ибо не могло бы покрыть издержекъ, сопряженныхъ съ содержаніемъ такого рода заведенія.

ASSURÉ. ЗАСТРАХОВАТЕЛЬ. Тотъ, который отдаетъ въ страхъ.

ASSURER. ЗАСТРАХОВАТЬ, ОТДАВАТЬ НА СТРАХЪ. Застраховать предметъ, значить заплатить нѣкоторую сумму извѣстному лицу или Обществу, опытающему за цѣлостъ этого предмета. Опытственность Общества состоитъ въ уплатѣ застрахователю условенной суммы въ томъ случаѣ, когда вещь, или подвергнется поврежденію, или утратится. *Assurer une maison, un bâtiment, sa vie; застраховать домъ, судно, свою жизнь.*

ASSURER. (Мех.) УТВЕРДИТЬ; сдѣлать неподвижнымъ; то же что ASSUJETTIR во второмъ значеніи.

ASSUREUR. СТРАХОВЩИКЪ; лице, опытающее за цѣлостъ вещи. — Иные употребляютъ это слово въ смыслѣ застрахователя (*assuré*).

ASYMPTOTE. СМОТ. ASYMPTOTE.

ASTATIQUE (AIGUILLE). АСТАТИЧЕСКАЯ ИГЛА. Намагниченная игла, устроенная такимъ образомъ, что земной магнетизмъ не имѣетъ никакого вліянія на ея направленіе. Астатическій приборъ можно получить соединя посредствомъ металлическаго прута двѣ параллельныя иглы, въ равной степени намагниченныя, которыя должны быть обращены одноименными полюсами въ противоположныя стороны.

ASTEROIDES. АСТЕРОИДЫ. Такъ назыв. Гершель четыре новыя планеты: Юнону, Палладу, Весту и Цереру, открывшія Платцель, Ольберсъ и Гардингеръ.

ASTRE. СВѢТЛО. Общее названіе небесныхъ тѣлъ, то есть неподвижныхъ звездъ, планетъ и кометъ.

ASTROGNOSIE. АСТРОГНОЗИЯ; отрасль Астрономии, занимающаяся учением о неподвижных звездах, то есть, ихъ названіемъ, величиною, положеніемъ и проч.

ASTROLABE. АСТРОЛАБИЯ. Инструментъ для астрономическихъ наблюдений, бывшій въ употребленіи у древнихъ. Впрочемъ, разнаго устройства инструментовъ носила это названіе. Чинаи, желавшіе имѣть удовлетворительное понятіе о *Птолемеовой астралабии* и о другихъ, найдутъ подробныя о нихъ свѣдѣнія въ *Encyclopédie méthodique*, овлѣденіе *Mathématique*, статья АСТРОЛАВЕ. — Нынѣ, *астралабією* называется углоизмѣрный инструментъ, состоящій изъ вѣднаго полукруга, раздѣленнаго на 180 градусовъ, и, смониръ по величинѣ его діаметра, каждый градусъ подраздѣляется еще на дробныя части. Двѣ аллиды, снабженныя дюштрами, или иногда зрительными трубками, составляющъ принадлежность инструмента. Одна изъ нихъ, совпадающая съ діаметромъ, нѣ-глагоу прикрѣплена къ полукругу; другая аллида, подвижна, обращается свободно около центра вѣднаго полукруга. Когда аллиды направлены на два предмета, то дуга на лимбѣ, заключающаяся между сплоронами аллидъ, измѣряетъ угловое разстояніе двухъ предметовъ. При наблюдении угловъ астралабією, она кладется на *стативъ* или *треножникъ*, и приводится посредствомъ *бакитаба* или *блока* въ какое угодно направленіе; слѣдовательно, она можетъ служить для измѣренія угловъ какъ горизонтальныхъ, такъ и вертикальныхъ. Чтобы придать большую точность астралабіи, подвижную аллиду снабжаютъ обыкновенно *вернеромъ*. Смол. VERNIER. Астралабію довольно часто употребляютъ для съемки плановъ.

ASTROLOGIE. АСТРОЛОГИЯ, ЗВѢЗДОГАДАНІЕ.

Мнимое искусство предсказывать будущее, и въ особенности судьбу челоѣка, по теченію небесныхъ свѣтилъ. Астрологія, одно изъ нѣстныхъ созданий ума челоѣческаго, получило свое начало, какъ полагають, въ Халдѣ, перешла потомъ въ Египетъ, опшуда въ Грецію и наконецъ въ Римъ. Европскаіи заимствовали ее у Арабовъ. Еще въ началѣ прошедшаго столѣтія были люди, которые вѣрили предсказаніямъ *Астрологовъ*, помѣщаемымъ обыкновенно въ календаряхъ. — Наименованіе *Астрологія* употреблялось Греками въ смыслѣ *Астрономіи*.

ASTROLOGUE. АСТРОЛОГЪ, ЗВѢЗДОГАДАТЕЛЬ. Смол. выше. — У Грековъ, астрономы назывались *астрологами*.

ASTRONOMIE. АСТРОНОМИЯ, ЗВѢЗДОУЧЕНІЕ.

Опытъ граческ. *astère, звезда* и *nomos, законъ*; собственно — *Звѣздозаконіе*. Наука занимающаяся законами движенія небесныхъ тѣлъ. По предмету своему, Астрономія составляетъ важнѣйшую отрасль прикладнаго Анализа.

Астрономію обыкновенно раздѣляютъ на три части.

1) *Астрономія сферическая (Astronomie sphérique)* объясняетъ небесныя явленія въ томъ предположеніи, что земля занимаетъ центръ *небесной сферы*, на изшпренней поверхности которой, по видимому, находятся небесныя тѣла. Для объясненія сихъ явленій, преимущественно употребляется *сферическая Тригонометрія*. И такъ, къ сферической Астрономіи принадлежитъ ученіе о суточномъ движеніи неба, о видимомъ движеніи планетъ, о восхожденіи и захожденіи свѣтилъ, о положеніи ихъ относительно горизонта, экватора и эклиптики, объ истинномъ, среднемъ и звѣздномъ времени, о параллаксѣ, о преломленіи, о предвзрѣніи равноденствій (*précession des équinoxes*), о колебаніи земной оси (*tiltation*), объ аберраціи (*aberration*) и. п. п.

2) *Астрономія теоретическая (Astronomie théorique)* предлагаетъ способы для перехода отъ видимыхъ движеній къ истиннымъ. Ея изслѣдованіямъ подлежатъ: вращеніе земли около оси, а также и обращеніе ея около солнца; эллиптическое движеніе планетъ и кометъ по законамъ Кеплера; отношенія и собственныя величины и разстоянія небесныхъ тѣлъ; превращеніе геоцентрическихъ мѣстъ сихъ послѣднихъ въ гелиоцентрическія, и на-оборотъ; опредѣленіе элементовъ планетныхъ и кометныхъ орбитъ, вычисленіе солнечныхъ и лунныхъ затмѣній, закрытій звѣздъ, прохожденій нижнихъ планетъ предъ солнцемъ и п. п.

3) *Астрономія физическая (Astronomie physique)*, подвергая внимательному изслѣдованію законъ всеобщаго тяготѣнія, выводитъ изъ него, какъ необходимое слѣдствіе, наблюдаемыя нами движенія

небесныхъ тѣлъ. Физическая Астрономія есть созданіе 17-го вѣка; собственно говоря, она есть *сама* Ниспрокопчиво-освѣщающій. Смыслъ иже *Исторіи Астрономіи*. Предметы, разсматриваемые Физическою Астрономіею, суть: законъ всеобщаго тяготѣнія, теорія эллиптическаго движенія, основанная на началѣ Механики; теорія возмущеній небесныхъ тѣлъ; либрація луны; видъ земли; задача о прѣмъ падѣніи; теорія луны и другихъ спутниковъ; теорія предвѣренія равноденствій и эклиптики земной оси; о приливѣ и отливахъ, объ неизмѣнности (*stabilité*) солнечной системы и др. и.

Такое раздѣленіе Астрономіи, сдѣланное *Кеплеромъ*, и послѣ него вѣсны пришлое, заключаетъ въ себѣ всю теорію сей науки; а приложеніе ея къ наблюденіямъ, къ спосредствію и подтвержденію многоразличныхъ спредовъ, употребленныхъ астрономами, и къ самымъ вычисленіямъ, составляетъ еще четвертую отрасль, извѣстную подъ названіемъ *Практической Астрономіи* (*Astronomie pratique*), къ которой можно также отнести собственно *Наблюдательную Астрономію* (*Astronomie d'observation*), занимающуюся опредѣленіемъ времени прохожденія небесныхъ свѣтилъ чрезъ дѣйствительныя мѣста поверхности небесной сферы, также видимыхъ діаметровъ свѣтилъ, а иногда (въ особенности же при наблюденіи кометъ) на ружныхъ ихъ видоизмѣненіяхъ и степеняхъ ихъ освѣщенія.

Многія науки, какъ то: *Математическая Географія*, *Геодезія*, *Гномоника*, *Хронологія* и описаніе *Оптики* основаны на началахъ астрономическаго знанія.

ASTRONOMIE NAUTIQUE. Мореходная Астрономія, занимающаяся ршеніемъ задачъ, необходимыхъ для мореплавателей, какъ то. опредѣленіемъ времени, долготы и широты въ морѣ, курса корабля и проч. *Монетомъ* издалъ подъ симъ заглавіемъ книгу, коей второе изданіе напечатано въ 1751 году.

ASTRONOMIE COMPARATIVE или **COMPARATIVE.** Сравнительная Астрономія, занимающаяся разскапываніемъ нѣхъ явленій, которыя бы представлялись общающимися другяихъ планетъ, допуская что сія послѣдняя дѣйствительно обитаемы. *Лавуазьеръ* занимался подобными изслѣдованіями въ своей *Astronomie humaine*.

Представляемъ нѣмнѣе читателямъ самое краткое историческое обзореніе успѣховъ Астрономіи отъ ея начала до нашихъ временъ. Желающіе ближе ознакомиться съ исторіею сей науки, найдутъ надлежащія подробности въ сочиненіяхъ:

Histoire de l'Astronomie, par Bailly, 1775 — 1782, 4 тома in-4°.

Histoire de l'Astronomie par Delambre; (ancienne 2 тома, du moyen âge 1 томъ, moderne 2 тома in-4°).

Histoire de l'Astronomie du XVIII siècle par Delambre.

Histoire des Mathematiques, par Montucla; 4 тома in-4°.

Histoire des Mathematiques, par Bossut; 2 г. in 8°

Исторія Астрономіи. Начало Астрономіи, болѣе другихъ наукъ, сокрыто отъ насъ отдаленностію времени. Иудейскій историкъ *Флавій Иосифъ* относитъ первыя ея начала къ временамъ *Адамовымъ*, и утверждаетъ, что помощіи *Сивы* оказали въ ней значительные успѣхи. Въ Ветхомъ Заветѣ находимъ многія мѣста, показывающія, что издрѣвле уже имѣли нѣкоторые познанія о небесныхъ тѣлахъ; такъ, *Иеремія*, въ девятой главѣ книги *Іова* читаемъ: *Глаголю падѣды, и сѣпелъ, и арктурѣ, и сокращенію ѿижаа*. Въ пророчествахъ *Ісаіа* находимъ также мѣста, подтверждающія сказанное нами. Тотъ же историкъ приписываетъ *Аврааму* и *Моисею* свѣдѣнія въ Звѣздознаніи. Не будемъ разбирать, до какой степени можно положиться на свѣдѣтельство *Іосифа* относительно знаній въ Астрономіи, пріобрѣтенныхъ Иудейскимъ народомъ; во всякомъ случаѣ, несомнѣнно, что Іудеи могли имѣть свѣдѣнія самаго ограниченныя и несовершенныя. И такъ, перейдемъ къ *Астрономіи Китайской*, которая представляется въ видѣ болѣе удовлетворительной. Сей народъ, основываясь на свѣдѣтельствѣ нѣкоторыхъ своихъ цесарей, утверждаетъ, что уже при Императорѣ *Но*, въ 2660-лѣтн до Р. Х. знали у нихъ движеніе небесныхъ тѣлъ. При немъ же Императоръ установилъ Гражданскій годъ въ 366½ дней. Учрежденіе знаменитаго *Математическаго Триунала*, существующаго и теперь въ Кипаѣ, относилъ къ временамъ еще отдаленнѣйшимъ, и полагаютъ, что онъ былъ основанъ за 2700 лѣтъ до Р. Х. Императоромъ

Габта. Древнейшим свидетелем о союзности земных и небесных наблюдений над объектами неба находим у Китайцев; но даже заметить, что многие писатели подвергают сомнению возможность этих наблюдений. Собственно говоря, Астрономия у них является в виде науки не прежде 722 года до Р. Х. Конфуций, в сочинении *Чу-Чжу*, приводит предания о земных и небесных событиях этой эпохи по 480 году до Р. Х.; предания одно из них были новаторскими новаторскими астрономии. За 66 лет до Р. Х. *Ли-Инь* написал целый трактат об Астрономии, из которого впрочем видно, что эта наука была в то время в лучшем состоянии в Александрии, нежели в Китае. В 200 году до Р. Х. *Лу-Гань* и *Цю-Гань* первые упоминали о периселенических лунных; они знали, что год исленно длится 555 дней 6 часов. Впрочем, как Астрономия была известна в Востоке, но нельзя не допустить, чтобы она не проникла и в Китай. В XIII столетии Китайцы заимствовали у Моголов лучшие астрономические способы Арабов, и ввели в употребление более точные инструменты. Но эти нововведения не подвинули вперед их Астрономию в теоретическом отношении, а только увеличили число наблюдений. Наконец, в начале XVII столетия, когда Астрономия была в большом упадке в Китае, Иезуитские Миссионеры, прибывшие в этот край, привезли Астрономию Европейцев, и она по повелению Китайских Императоров, была введена в целом Государств.

Астрономия у Индейцев. Многие ученые считают Индию колыбелью всех наук, и преимущественно Астрономии. Другие же утверждают, что Арабы передали Астрономию Индейцам около середины IX века до Р. Х. Наконец, есть писатели, которые предполагают, что Астрономия получила свое начало в Индии в то время, когда *Пань вор*, странствуя по сей стране, распространил в ней многообразные сведения, и между прочими начал Звездознание. Индейцы узнали с большою точностью определять звездное время солнца и луны, имели верное понятие о различии солнечного тропического и аномалистического года, знали описание некоторых равноденствий, имели таблицы планет, могли высчитать вперед лунные затмения; и

были также известны уравнения центра солнечной орбиты и два главных уравнения луны, также круг или 19 солнечных годов, составляющих 253 лунных и прот.

Халдеи, по свидетельству *Симплиция*, египетского перипатетика, жившего в V в. до Р. Х., занимались Астрономиею в самой глубокой древности, и, во времена Александра Великого, имели длинный ряд наблюдений, объемлющий 1905 года. Тот же египетский перипатетик имел изобретение различных периодов, и между прочими периода из 688½ дней, именованного *Сарос*. Древнейшие наблюдения Халдеев, о которых упоминается в Астрономии, относятся к 713 и 720 годам до Р. Х. Эти наблюдения, употребленные Птолемеями, были произведены над тремя лунными затмениями.

О состоянии древней Астрономии Египтяне дошли до пяти веков до нашей эры; Древние, что эта наука была в Египте в хорошем состоянии еще за 17 или 18 веков до Р. Х. К сожалению, не осталось никаких письменных памятников, которые могли бы передать нам их наблюдения. Невинные свидетели утверждают, что они узнали с точностью определять направление полуденной линии. Из некоторых водян, и между прочими *Дендерот*, привозимый в наше время во Францию, доказывают, что в начале Египетские Астрономы были довольно обширны, что они имели правильное понятие о строении нашей солнечной системы, и знали предварительные равноденствия. Древность Дендерского зодиака неизвестна положительным образом; однако же ученые, основываясь на догадках, что зодиаки предшествовали относительное положение светила для того времени, когда была сделана, относят его к XI или XIII веку до Р. Х. Должно также заметить, что египтяне единогласно приписывают Египтянам разделение года на 12 месяцев, из которых каждый содержал в себе 30 дней; впоследствии они же заметили, что к 360 дням надлежало прибавить 5 доминирующих дней и, по исчислении чепырех лет, еще один восточный день. Разделение месяца на недели принадлежало также Египтянам. В позднейшие времена Астрономия пришла у них почти к совершенному упадку.

По свидетельству некоторых древних писателей, *Персия* занималась также Астрономией, и считала время солнечными обращениями. Можно также полагать съ большими правдоподобием, что *Финикиане* знали по крайней мере некоторые практические сведения въ этой науке, какъ известно, они предпринимали дальние путешествія по Средиземному морю, для чего необходимо было знать теченіе свѣтлыхъ.

Астрономія Грековъ все показываетъ что Греки заимствовали свою философію у Азіатскихъ и Азіатскихъ народовъ. *Фалесъ Милетскій*, который, по возвращеніи изъ Египта, основалъ Іонійскую школу, и первый распространилъ въ Греціи (около 600 лѣтъ до Р. Х.) нѣсколько положительныхъ свѣдѣній въ Астрономіи, былъ, какъ многіе утверждаютъ, родомъ изъ Финикій. Онъ объяснилъ Грекамъ причину неравенства дня и ночи, показалъ имъ способъ предсказывать затмѣнія; опредѣлилъ теченіе солнца отъ одного солнцестоянія до другаго. Онъ также предлагалъ доказаніе на ошѣ круглаго вида земли. Ученикъ его *Анаксимандръ* подтвердилъ теорію своего наставника о сферическомъ видѣ земли, о взаимномъ свѣтѣ луны отъ солнца и проч. Ему приписываютъ изобрѣтеніе небесныхъ глобусовъ, географическихъ картъ и солнечныхъ часовъ. Преемникомъ Анаксимандра былъ *Анаксименъ*, а послѣ него послѣдлаго, *Анаксаторъ*.

Между тѣмъ какъ сіи философы прославились своими трудами въ Греціи, знаменитая школа, основанная въ Италіи *Пифагоромъ*, занималась съ большими успѣхами Астрономіею. Пифагоръ, родившійся въ Самосѣ около 540 лѣтъ до Р. Х., былъ ученикъ Фалеса. При содѣйствіи учениковъ своей школы, Пифагоръ доказалъ очевиднымъ образомъ круглый видъ земли. Ему же приписываютъ первую мысль о неподвижности солнца, и о движеніи земли и планетъ около сего свѣтила. Думая, что опасаясь сдѣлаться посмѣшнымъ своимъ современникамъ, а можетъ быть даже подвергнувшись преслѣдованіямъ соотечественниковъ обнаруживъ мысль, совершенно противоположную тогдашнимъ понятіямъ, онъ сообщалъ ее за тайну только своимъ ученикамъ. Мы не можемъ войти въ нѣ въ какія подробности относительно дру- гихъ Греческихъ астрономовъ; ограничимся помянутомъ самимъ примѣчательныхъ: *Демо-*

критъ, *Филолай изъ Хротонны*, *Метонъ* (433 г. до Р. Х.) изобрѣтатель такъ называемаго *золотого числа*, *Евктемонъ*, *Евдокій* (род. за 421 г. до Р. Х.), *Каллимахъ* (358 л. до Р. Х.), *Платонъ*, *Аристотель*, *Аристархъ* (281 г. до Р. Х.), *Фратосенъ*, *Гиппархъ* (240 л. до Р. Х.), знаменитѣйшій астрономъ въ древности, представившійся открытіями: предвѣренія равноудаленій, эксцентрицизма эклиптики и лунной орбиты и проч.; *Позидоніусъ* (80 л. до Р. Х.), *Аврама*, *Сизигій*, изобрѣтатель исправленія Ринскаго календаря, и наконецъ *Птолемей* (140 л. по Р. Х.).

Астрономія начинала приходить въ упадокъ въ Александрійской школѣ, когда Птолемей, собравъ все извѣстное до него, превратилъ сію науку въ эмпирическій видъ, и обогатилъ ее новыми трудами. И теперь еще упоминаютъ о *Птолемеевой системѣ*, которая, хотя и согласуется съ видными явленіями, но во все времена подвергалась сильнымъ возраженіямъ, и наконецъ разрушена въ основаніи знаменитымъ *Коперникомъ*; Смол. PTOLEMEË (SYSTÈME DE). Птолемей снискалъ себѣ славу преимущественно сочиненіемъ своихъ *Альмагестъ* (См. ALMAGESTE), которое заключаетъ въ себѣ множество наблюденій и теорій прежнихъ астрономовъ, и обогащено собственными его трудами. Онъ также писалъ объ Тригонометріи, и о рѣшеніи сферическихъ треугольниковъ, чѣмъ оказалъ неоспоримую услугу Астрономіи. Птолемей усовершенствовалъ теорію луны и солнца, также теорію планетъ, для которыхъ онъ составилъ таблицы, заключающія въ себѣ ихъ движенія, разстоянія отъ земли и проч. Птолемей написалъ также *Географію* и еще нѣкоторые трактаты, нѣмѣ важные.

Послѣ Птолемея, Астрономія у Грековъ начала переходить въ упадокъ. Хотя въ Александрійской школѣ продолжали заниматься науками, но не прибавили къ нимъ никакого, сколько нибудь примѣчательнаго открытія. Между многими забытыми полкованами Гиппарха и Птолемея, можно отличить только одного, философа *Веоны* (400 л. по Р. Х.), который составилъ утѣные комментаріи на первыя одиннадцать книгъ *Альмагеста*.

У *Римлянъ*, Астрономія, какъ и другія науки, была въ большомъ пренебреженіи. Когда Іудій

Цесарь предпринимав исправляти Римскій календарь, но, на сей конецъ, принужденъ былъ вызвать изъ Александріи Греческаго астронома *Социгена*. Мы находимъ у нѣхъ одного только астронома, *Менелая*, жившаго въ царствованіи Траяна (98 л. по Р. X.). Онъ опредѣлялъ долготу нѣкоторыхъ звѣздъ попередиство соединеній ихъ съ луною. Объ немъ упоминаетъ Птолемей въ своемъ *Альmageстѣ*.

Нельзя опредѣлить положительными образомъ времени, въ которое Астрономія вошла въ Грецію. Можно только предполагать съ большою вѣроятностію, что вообще наука исчезла послѣ того, какъ Аравитяне сожгли знаменитую *Александрийскую* бібліотеку, что случилось въ 481 году, въ царствованіи *Омара*, втораго Халифа. Протѣкало безъ выхвата, и Аравитяне, заняты войнами и усмиреньемъ бунтовъ, не могли досуга заниматься науками. Напослѣдокъ съ водвореньемъ тишины, они обратились къ занятіямъ утѣшительнымъ. Астрономія была у нихъ любимою наукою; они обогащали ее пріятнѣтельными открытіями. Халифы ихъ поощряли покровительствовали наукамъ, и даже многие изъ нихъ были сами отличные астрономы. Изъ числа послѣднихъ назовемъ *Алиансура*, заслужившаго на престолѣ въ 754 году по Р. X. *Аль-Рашида* (786) и *Аль-Мамуни* (813); по повелѣнію сего послѣдняго были переведены съ Греческаго на Арабскій языкъ многія книги, а между прочимъ *Птолемея* *Альmageстѣ*. Въ IX столѣтіи особенно пріятнѣтельными астрономы: *Алфрасанусъ* (830), *Табетъ-бекъ-Корра* (860) и *Албатеніусъ* (879). Первый изъ нихъ написалъ прелестныя объ Астрономіи, о солнечныхъ часахъ и объ астралабѣ; онъ также славился особеннымъ искусствомъ вычислять, почему и былъ прованъ *Сѣттикомъ*. Табетъ-бекъ-Корра наблюдалъ наклонность эклиптики; и нашелъ $23^{\circ}53'30''$; онъ опредѣлялъ также звѣздный годъ, и найденное имъ время почти не разнилося отъ найденнаго новѣйшими астрономами. Албатеніусъ произвелъ множество наблюденій въ Антиохіи и Аракѣ. Онъ опредѣлялъ съ большою точностію экцентриситетъ солнечной орбиты, также величину тропическаго солнечнаго года, и составилъ новыя таблицы планетъ, которыя принесли суще- ственную пользу многимъ астрономамъ. Кромѣ

военнообязанныхъ астрономовъ, находимъ у Аравитянъ и немалое число другихъ, обогащавшихъ науку своими трудами; между ними особенно примѣ- тельны: *Абуль-Вефа* (987), *Мотъ-Юнисъ* (1004), *Арсизель* (1030), *Альазаръ*, *Алсеберъ*, *Алхазенъ* зорилъ *Альмагонъ*, *Абуль-Хасанъ* (около 1200 года) и многіе другіе. Число усовершенствовъ въ снѣженіи вліяніи Астрономіи Аравитянъ на науку, сдѣлать только приیاتъ въ соображеніи необ- стоятельствъ, что многія наименованія употребленныя донынѣ у насъ, заимствованы изъ Астро- номіи Аравитянъ; таковы напримѣръ: *звѣзды, модулъ, нитъ, алмада, алдебаранъ* и проч.

Число ниспущеніевъ, бывшихъ въ употре- бленіи у древнихъ астрономовъ, весьма ограни- ченно. Для измѣренія времени они употребляли *водные часы* (См. CLÉPSYDRE), *гномоны* (См. GNOMON) и *солнечные часы* (См. CADRAN). Угловая разстоянія они измѣряли посредствомъ *астралабѣ*, *армилярной сферѣ* *Эратостена*, *Птолемея* *параллактическихъ линіей*; *Аристарховъ* *циркуль* служилъ имъ для измѣренія вѣднихъ діаметровъ луны и солнца. Краткое опи- саніе сихъ ниспущеніевъ, весьма несовершен- ныхъ въ сравненіи съ нашими, читатель найдетъ въ *Histoire des Mathématiques par Bossut*.

Отъ 800 года до 13-го столѣтія Европа была погружена въ глубокое неимѣстество, и въ этотъ промежутокъ времени одни Аравитяне продолжа- ли упражняться въ наукахъ. Императоръ *Фри- дрихъ II* вызвалъ такъ сказанъ науки изъ забве- нія, объявивъ себя ихъ покровителемъ. Онъ воз- ставилъ Университетъ въ Неаполѣ, и учредилъ новый въ Вѣнѣ въ 1250 году; по его повелѣнію были переведены съ Арабскаго языка многія ме- дицинскія и философскія книги, а также *Птолемея* *Альmageстѣ*. Эту эпоху можно считатьъ эпохою возрожденія Астрономіи въ Европѣ.

Сакро-Боско, умершій въ 1256 году, первый сложилъ себѣ извѣстность въ Астрономіи. По повелѣнію *Алфонса X*, Короля Кастильскаго, прозваннаго *Мудрымъ*, были составлены въ 1252 году астрономическія таблицы, названныя *Алфонсовыми* (*Tables Alphonsines*).

Въ XV столѣтіи издѣлился для Астрономіи *Пурбагійусъ*, *Регіомонтанусъ* отличнѣйшій на- блюдатель и *Валлерусъ* его ученикъ.

XVI столѣтіе ознаменовано въ астрономіи открытіемъ истинной солнечной системы *Коперника* *См. COPERNICUS (SYSTEME DE)*, изданнымъ въ сѣвѣ преломленіи труда нѣкогда знаменитымъ По *revolutionibus orbium coelestium*, опубликованный въ 1543 году. Въ то же время появились астрономы: *Петръ Ливіи, Раймундо, Оротис Фети, Галлеи Фридрихъ, Питеръ Кирдери, Ратхусъ, Невей* и многіе другіе. Въ XVI же вѣкѣ *Вальсманнъ, Амандраъ Кеселъ, Каселъриусъ, Фридрихъ* и др. работали надъ работами, имевшими много фактически-наблюдательнаго характера. Они присоединили къ своимъ трудамъ *Ратхуса* и *Виргуса*, изъ которыхъ первый былъ отличный астрономъ, а второй, искусный механикъ своего времени. Наконецъ, явился въ концѣ этого же столѣтія знаменитый *Тило-Брау* (умершій въ 1603 году), первый изъ вѣка бывшихъ наблюдателей. Точности и многотисленности своихъ наблюдений онъ открылъ новое поле Астрономіи, и приуготовилъ наисовершеннѣе законы вращательнаго движенія, приведши въ извѣстность *Нютона* къ закону всеобщаго тяготѣнія. Исправленіе Юлианскаго календаря *Папою Григоріемъ XIII*, было произведено также въ XVI столѣтіи, именно въ 1582 году.

XVII столѣтіе предъ нами открывается своимъ открытіемъ въ Астрономіи. Первая его половина ознаменована трудами *Кеплера* (родившійся въ 1571, а умершій въ 1631 г.), который открылъ истинные законы движенія планетъ, чѣмъ самымъ приобрѣлъ себѣ званіе первобытнаго астронома. *См. KEPLER (LOIS DE)*. Въ первой же половинѣ XVII вѣка открытыя полемичныя труды для Астрономіи *Байера, Иезуитъ Клавій, Николай Мюллеръ, Петръ* изобрѣтатель логарифмовъ, *Генрихъ Бриггъ, Юстусъ Виргусъ, Диксгофъ, Краттеръ (Crabtree)* и многіе другіе. *Галлей*, родившійся во Флоренціи въ 1642 году, приобрѣлъ знаменитость открытіемъ Юпитеровыхъ спутниковъ, законъ тяготѣнія планетъ Луны и солнечныхъ пятенъ. — Приведемъ еще нѣкоторые открытія и наблюденія, ознаменовавшія XVII столѣтіе: теорія маятника и приспособленіе его къ часамъ — *Гукъ*; случайное изобрѣтеніе зрительныхъ трубокъ *Голландскимъ плетельщикомъ, усовершенствованнымъ изобрѣтеніемъ Галлеи, Кеплера, Гукера, Гукера, Гукера, Гукера*, открытіе зако-

новъ преломленія лучей *Стевлемъ* первое наблюденіе прохождения Меркурия и Венеры предъ солнцемъ — *Гассенди* и *Дюрреръ* открытіе кометы и Сатурновыя спутники — *Гукъ* и *Кассини*; первое наблюденіе кометы Юпитера — *Гукъ*; открытіе планетъ около иныхъ звездъ; открытіе зрительныхъ трубокъ по нѣмъ изобрѣтенію ихъ изобрѣтателя — *Гукера*; открытіе движенія лучей и ихъ скорости — *Рембоуръ*; изобрѣтеніе *Наблюдательнаго Математика* (*Observatione Mathematica*, 3 тома въ-4to, 1728) — *Вальсманнъ*, однимъ изъ знаменитѣйшихъ астрономовъ — наблюдателей. Этого труда заключаютъ въ себѣ огромный итогъ 23 лѣтъ наблюдений съ криволинейными кривыми около трехъ тысячъ звездъ. *Фламстедъ* родился въ 1646 году, а умеръ въ 1743 г.

Въ концѣ XVII вѣка ознаменованъ наводомъ извѣстными по открытію общаго начала небесныхъ движеній. *Нютонъ*, отецъ глубокаго, единственнаго гения, суждено было обогатить современную науку знаніемъ человѣческихъ великихъ законовъ всеобщаго тяготѣнія. Безсмертный трудъ его: *Philosophia naturalis principia mathematica* содержитъ въ себѣ доиспытанно оное начало и следствія, простѣйшаго изъ нихъ. Слово ATTRACTIO NEUTONIANNE, KEPLER (LOIS DE). Первую мысль объ всеобщемъ тяготѣніи, по свидѣтельству *Целлертона*, Нютонъ возникъ еще въ 1666 году; нѣсколько лѣтъ послѣ, онъ подвергъ ее глубокому изслѣдованію, по поводу которыхъ предпринялъ трудъ *Philosophia* и проч., изданный въ первый разъ въ 1687 году. *См. PRINCIPIA PHILOSOPHIAE NATURALIS — MATHEMATICA*.

Въ то же столѣтіе примѣтныя труды *Гассенди, Декартъ, Терриелла, Вирриамъ, Озутъ (Азотъ), Робертъ, Паскаль, Пикердъ, Кассини, Гукъ, Рокъ, Гукъ, Браунъ, Бардъ* и множество другихъ.

Въ второй половинѣ XVIII столѣтія особенно способствовали успѣхамъ Астрономіи: изобрѣтеніе употребленія прохожденія Венеры предъ солнцемъ, для опредѣленія параллакса въ нѣкоторыхъ онъ также извѣстенъ открытіемъ перидической кометы, извѣстнаго въ нѣкоторыхъ; *Брадлей, Лаблакъ (de la Caille), Боуверъ Николай, де-Жель, Тоуль Байеръ* и другіе. Примѣчательнѣйшія открытія и обогащенія Астрономіи въ XVIII вѣкѣ: изобрѣтеніе ахроматическихъ дивизионныхъ трубокъ — *Джонсъ* (*См. ACHROMATIQUE*);

улучшение вертикальных часовых — *Шарлеман* и *Гарриелом*; усовершенствование пружинных часовъ, или, собственно, изображение *хронометровъ* — Английскимъ художникомъ *Гарриелом*; изображение зеркальнаго октана — *Гидлем*, а по изысканію некоторыхъ — *Лукомъ* и *Ноттономъ*, открытіе aberrаций и колебанія земной оси (нутиция) — *Брадлемъ*; движение солнечной системы въ пространствѣ; опредѣленіе паралакса солнца по прохожденію Венеры пракъ сямъ свѣтлостъ; открытіе Урана и наблюденіе многихъ тысячъ туманныхъ пятенъ или звездъ — *Гершелемъ*. Поименуемъ поименомъ некоторыхъ анализаторъ и наблюдателей, обогатившихъ изъ XVIII столѣтія этого астрономическаго знанія: *Жюль Вермилли*, *Доминикъ* и *Яковъ Квиста*, *Ротторъ*, *Макхоренъ*, *Кришаръ*, *Джонъ Бернулли*, *Рейеръ*, *д'Аламбертъ*, *Валли*, *Деламбръ*, *Мехенъ* (Mechain), *Босковичъ*, *Кондорсетъ*, *Маскеленъ*, *Борда*, *Гахъ*, *Гершель*, *Ламандъ*, *Биллеръ*, *Лавранжъ*, *Лапласъ*, *Лежандръ* и много другіе.

Въ началѣ XIX столѣтія открыты четыре новыя планеты: Церера *Пиацци* (1801 года), Паллада и Веста *Олберсомъ* (первая 1802, а вторая 1807 г.) и Юнона *Гардингомъ* (1804 года). Списки двойныхъ звездъ, надъ составленіемъ которыхъ трудятся, на Мысѣ Доброй Надежды — *Джонъ Гершель*, а въ Дерптѣ — нашъ Астрономъ Академикъ *Штруве*, общающіе большую жатву для новѣйшей Астрономіи. Мы упомянемъ о трудахъ геометровъ и астрономовъ настоящаго столѣтія: одно поименованіе ихъ открытій и усовершенствованій далеко бы перешло пределы нашего Лекціона.

Книги по Астрономіи:

- Потона*. Philosophiae naturalis principia mathematica.
Лапласъ: Mécanique céleste (5 том.) и Exposition du système du monde.
Лавранжъ: Mécanique analytique (2 тома).
Ла Ланда. Astronomie (3 тома).
Вюла: Traité élémentaire d'Astronomie (3 тома).
Деламбра: Astronomie théorique et pratique (5 т.).
Шуберта: Traité d'Astronomie théorique (3 тома).
Брадлемъ: Vorlesungen über die Astronomie.
Литрова, Theoretische und practische Astronomie (3 тома) и Vorlesungen über Astronomie (2 тома).

На Русскомъ языкѣ

Бюффе-Астрономіи, или Звѣздословія Г. де ля-Ландъ пер. *Мил. Галакина*; 1789 года. Теорія и практика вычисленія, 2 т. 1807 года.

Соч. *Пиацци*, 1801 г., 1-е изд. 1808 года.

Руководство къ изученію Астрономіи, соч. *Перетонкова*, 2-е изд. 1831 г.

Руководство къ изученію Астрономіи, соч. *Симонова*, 1832 г.

Астрономическія лекціи *Литрова*, пер. *Экстер. Акад. Турганова*; 2 тома, 1835—1837 г.

ASTRONOMIQUE. АСТРОНОМИЧЕСКИЙ, принадлежащій Астрономіи или относящійся къ сей наукѣ. *Calendrier, annes astronomique; календарь, годъ астрономическій. Observations, tables astronomiques; астрономическія наблюденія, таблицы.*

ASTRONOMIQUEZ. (вѣстоуе). Шестидесятые буквы, которыми некоторыя писатели называли астрономическими, по причинѣ частаго ихъ употребленія въ Астрономіи. См. SEXAGESIMAL.

ASYMÉTRIE. НЕСОРАЗМѢРНОСТЬ, НЕСОДВѢСТВО, АСИМЕТРІЯ. Слово противуположное

симметріи. См. SYMÉTRIE. — Иногда подъ асиметріею разумютъ въ математикѣ несоизмѣримость, иррациональность. См. IRRATIONNEL.

ASYMPTOTE. (Геом.) АССИМПТОТА. Отъ греческ. *α, не, γιν. сѣ* и *πύτω, падаю*; собственно: *несопадающая*. Асимптотой вѣстъ *линія*, которая, бывъ продолжена неопредѣленно, приближается къ кривой линіи, или къ некоторой ея части такъ, что разстояніе между обѣими линіями дѣлается наконецъ менѣе всякой данной величины, хотя оно и не можетъ быть совершенно уничтожено.¹ Замѣтимъ, что линія, параллельная асимптотѣ, хотя и приближается непрестанно къ кривой, однако же не можетъ быть названа асимптотой, ибо разстояніе ея отъ кривой не можетъ быть уменьшено по произволію.

Асимптоты бывають *прямолинейныя* и *криволинейныя*; но, болѣею частью, прямолинейной приспосабливается наименованіе *асимптоты*; криволинейную же преимущественно называютъ *асимптотическою кривою*.

Чертежи 7 и 17 (листъ I) представляютъ чертежи асимптотъ. На чертежѣ 7 линіи *AF* и *AG* изображаютъ асимптоты частей *CB* и *CD* *персидской гиперболы* *Змѣевиднаго гиперболы* (черт. 17) *касаясь* асимптотическую линію *AC*.

Чертежи конхонд по прочтении, весьма удовлетворительными образом раскрывают свойство асимптоты, по которому они, приближаясь неопредѣленно къ кривой линии, никогда не достигаютъ сей последней. Смол. CONCHOIDE.

Прямолинейную асимптоту можно также назвать касательною къ кривой, въ точкѣ безконечно удаленной отъ начала координатъ. Основываясь на этомъ опредѣленіи, весьма легко найти уравненіе асимптоты данной кривой. Действительно, пусть $y = f(x)$ уравненіе кривой линии; уравненіе ея касательной въ точкѣ, опредѣляемой координатами x и y , будетъ

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x) \text{ или } Y = \frac{dy}{dx}X + y - x \frac{dy}{dx}.$$

Чтобы отъ касательной перейти къ асимптотѣ, слѣдуетъ только сдѣлать одно изъ слѣдующихъ предположеній: 1) x и $y = \pm \infty$; 2) $x = \pm \infty$, а $y = \text{конечному числу}$; 3) $y = \pm \infty$, а $x = \text{конечному числу}$; сими предположеніями выражаетъ, что точка касанія находится на безконечно удаленномъ отъ начала координатъ.

Напримѣръ, для гиперболы, опредѣляемой уравненіемъ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, находимъ

$$Y = \pm \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot X + \frac{ab}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Полагая $x = \infty$, найдемъ

$$\pm \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \pm \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}} = \pm \frac{b}{a} \text{ и } \pm \frac{ab}{\sqrt{x^2 - a^2}} = 0;$$

слѣдовательно, уравненіе асимптоты разсматриваемой нами гиперболы, будетъ

$$Y = \pm \frac{b}{a} X,$$

или, что все равно,

$$Y = + \frac{b}{a} X \text{ и } Y = - \frac{b}{a} X;$$

эти уравненія показываютъ, что гипербола имѣетъ двѣ асимптоты.

Можно также опредѣлять асимптоты слѣдующимъ образомъ:

Пусть будетъ

$$Y = AX + B$$

уравненіе асимптоты непараллельной осямъ x . Ордината y кривой, соотвѣствующая абсциссѣ x , для весьма большихъ величинъ сей абсциссы, бу-

детъ весьма мало разниться отъ ординаты Y асимптоты, такъ что можно написать

$$y = Ax + B \pm \varepsilon,$$

разумѣя подъ ε количество, уничтожающееся вмѣстѣ съ $\frac{1}{x}$. И такъ, полагая $x = \infty$, найдемъ

$$\text{пред. } \left(\frac{y}{x}\right) = \text{пред. } \left\{A + \frac{B \pm \varepsilon}{x}\right\} = A;$$

$$\text{пред. } (y - Ax) = \text{пред. } (B \pm \varepsilon) = B.$$

Слѣдовательно, для опредѣленія постоянной количества A , споможъ только въ уравненіи кривой положить $\frac{y}{x} = s$ или $y = sx$, и выкажи предѣлъ, къ которому стремился s для безконечно большихъ значеній x .

Величина B опредѣлится, когда въ уравненіи кривой, примемъ $y - Ax = t$ или $y = Ax + t$.

Перемѣнимъ x на y , и на-оборотъ, и разсуждая точно такимъ образомъ какъ выше, найдемъ, что асимптоты непараллельны осямъ x .

Напримѣръ, уравненіе разсматриванной нами гиперболы, чрезъ подстановленіе sx на мѣсто y , доставляетъ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{s^2 x^2}{b^2} = 1, \text{ или } s^2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{x^2};$$

полагая $x = \infty$, найдемъ

$$s^2 = \frac{b^2}{a^2} \text{ или } s = \pm \frac{b}{a} = A.$$

Полагая, въ томъ же уравненіи, $y = Ax + t = \pm \frac{b}{a}x + t$, получимъ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{\left(\pm \frac{b}{a}x + t\right)^2}{b^2} = 1 \text{ или } t = \pm \frac{b}{a}(\sqrt{x^2 - a^2} - x);$$

полагая $x = \infty$, найдемъ

$$t = 0 = B.$$

Слѣдовательно, уравненіе асимптоты предположенной гиперболы будетъ, какъ и выше, $Y = \pm \frac{b}{a} X$.

Для упражненія, предлагаемъ нѣсколько уравненій кривыхъ, имѣющихъ асимптоты:

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

$$y^3(x^2 + y^2) = r^4$$

$$y^2 = \cos\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$x^3 + y^3 + \sin\left(\frac{y}{a}\right) = 0$$

$$y = \log x.$$

Смол. также Cissoide, LOGARITHMIQUE, CIRCONSCRITE (HYPERBOLE), FOLIUM DE DECARTES и проч.

Примеръ *асимптотической кривой*, рассмотримъ въ кривой шестого порядка, определенной уравненіемъ

$$y = x^2 + \frac{1}{x}.$$

Очевидно, что по мѣрѣ увеличенія абсциссы x въ положительную или отрицательную сторону, членъ $\frac{1}{x}$ будетъ неопредѣленно уменьшаться, а x^2 увеличиваться, такъ что ордината y будетъ приближаться болѣе и болѣе къ значенію x^2 , котораго никогда не достигнетъ; и такъ, разсматриваемая нами кривая имѣетъ асимптотическую параболу, определяемую уравненіемъ $y = x^2$. Для весьма малыхъ положительныхъ или отрицательныхъ значеній абсциссы x случится промѣное: численная величина дроби $\frac{1}{x}$ неопредѣленно возрастетъ, а x^2 , напротивъ того, уменьшится, такъ что ордината y будетъ приближаться къ равенству съ $\frac{1}{x}$; слѣдовательно, *равносторонняя гипербола*, отнесенная къ своимъ асимптотамъ, будетъ также асимптотическою предложенной кривой. На чертѣ 22 (листъ 1) предложенная кривая означена буквами a, b, a', b' ; параболы, буквою p , а гипербола, буквою q . Парабола служитъ асимптотой вѣтвямъ $a, a, a \dots$ и $a', a', a' \dots$, а гипербола вѣтвямъ $b, b, b \dots$ и $b', b', b' \dots$. Сверхъ того, кривая имѣетъ прямолинейную асимптоту, именно ось YY' .

Легко распространить сказанное нами, на опредѣленіе асимптотическихъ кривыхъ вообще. Во всякомъ случаѣ такое разсужденіе приводится къ нахожденію наибольшихъ членовъ въ предложенномъ уравненіи. —

Нѣкоторыя поверхности имѣютъ свои *асимптотическія поверхности*. Уравненія ихъ послѣднихъ бываютъ проще первыхъ.

Напримеръ, *гиперболоидъ съ одною полою*, опредѣляемый уравненіемъ

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

имѣетъ асимптотическую *коническую поверхность*, коей уравненіе есть

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Дѣйствительно, если изъ урав. (2) выведемъ z' , а изъ (1) величину z , и опредѣлимъ ихъ разность, то найдемъ

$$\begin{aligned} z' - z &= c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} - c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1} \\ &= c \left\{ \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}} + \text{пр.} \right\} \\ &= \frac{c}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}} + \text{проч.} \end{aligned}$$

Но эта разность неопредѣленно уменьшается съ увеличеніемъ переменныхъ x и y ; слѣдовательно, разсматриваемыя двѣ поверхности обнимаются болѣе и болѣе по мѣрѣ ихъ удаленія отъ начала координатъ; откуда можемъ заключить, что коническая поверхность будетъ асимптотическою гиперболоида съ одною полою.

Кривыя поверхности имѣютъ иногда прямолинейныя и криволинейныя асимптоты, а также и *асимптотическія плоскости*.

POINT ASYMPTOTIQUE. Асимптотическою точкою называется такая точка, около которой кривая обращается, и, неопредѣленно приближаясь къ ней, никогда ее не достигаетъ. Для примѣровъ асимптотическихъ точекъ См. LOXODROME, SPIRALE LOGARITHMIQUE.

ASYMPTOTIQUE. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ, относящійся къ асимптотѣ. *Essai asymptotique, асимптотическая площадь, пространство.* Площадь заключающаяся между кривою линіею и ея асимптотой. Сія площадь бываетъ иногда конечною, иногда же бесконечною. *Courbe, surface, plan, point asymptotique.* Смол. выше.

ATHOODE (MACHINE D'). Смол. ATWOOD.

ATMOSPHERE. (Физ.) АТМОСФЕРА. Земля, круглая планета и солнце окружены жидкостію тонкою, прозрачною и упругою, которую называютъ ихъ *атмосферою*. Но не должно полагать чтобы одна и та же жидкость окружала сказанныя тѣла: каждая планета равна и солнцу, имѣетъ свою особенную атмосферу, которая простирается на разстоянія, болѣе или менѣе значительныя отъ поверхности сихъ тѣлъ. Намъ сомнѣнія, что должно быть такое разстояніе отъ поверхности, на которомъ присутствіе атмосферы дѣлается почти неощущательнымъ; но трудно опредѣлить его съ точностію.

Вся атмосферическая сила отъ земной поверхности до предѣловъ атмосферы измѣряется въ томъ же ртутномъ столбѣ въ барометрѣ; но подобное измѣреніе, по причинѣ измѣняющейся плотности воздуха по мѣрѣ того какъ подымаемся на различныхъ высотахъ, не можетъ служить нѣсколько для опредѣленія предѣловъ земной атмосферы.

Намъ атмосфера подвержена движеніямъ, болѣе или менѣе значительнымъ, которыя называются *ветрами*. Причинъ такихъ движеній болѣею частью случайныхъ; но въ числѣ ихъ есть также и постоянныя, именно, вращательное движеніе земли и теплота солнца. Отъ сихъ двухъ причинъ происходятъ атмосферическія теченія, наблюдаемыя подъ проливками, и которыя известны подъ наименованіемъ *нассатики въ тропикахъ* (*vents alizés*). Опредѣленіе сихъ періодическихъ теченій представляетъ силу настоящего анализа. Что касается до *водоносныхъ лавинъ*, видныхъ иногда въ атмосферѣ, то подробности о сѣхъ предметѣ не могутъ войти въ область нашего Лекціона.

Оптическія свойства атмосферы, Смол. BAROMÉTRIQUE (FORMULE).

АТМОСФЕРИЧЕСКАЯ, АТМОСФЕРИЧЕСКИЙ, АТМОСФЕРНЫЙ, ВОЗДУШНЫЙ. *Pression atmosphérique, atmosphérique pression.*

АТОМЕ. (Физ.) **АТОМЪ.** Мельчайшая неделимая частица вещества.

SYSTÈME ATOMISTIQUE. Атомистическая система. Последователи этой системы допускаютъ, что вещество составлено изъ весьма малыхъ *частичъ* (*molecules*), состоящихъ однихъ отъ другихъ въ некоторыхъ разстояніяхъ. Сии частички и взаимныя ихъ разстоянія полагаются столь малыми, что въ самомъ незначительномъ объемѣ можетъ помѣститься весьма большое число подобныхъ частичекъ. Сверхъ того, каждая частичка, несмотря на свою малость, состоятъ еще изъ отдѣльныхъ частей, которыя называются *атомами*. Атомы одной и той же частички, содержащія между собою на разстояніяхъ притягательныя и отталкивающія взаимодѣйствія; такая же связь существуетъ и между частичками вещества. Въ естественномъ состояніи тѣла, равнодѣйствующая всѣхъ силъ, которыми подверженъ каждый атомъ, равна нулю; но какъ

скоро какая либо посторонняя сила начнетъ дѣйствовать на тѣло, то некоторые его части сжимаются, и отсюда происходятъ измѣненія во взаимныхъ разстояніяхъ частичекъ. Отъ сей перемены въ разстояніяхъ, самыя притягательныя и отталкивающія силы подвергнутся измѣненіямъ, воспрепятствующимъ дальнѣйшему сжатию тѣла; ибо, какъ бы велика ни была сила давленія, приложенная къ его поверхности, частички или атомы ни въ какомъ случаѣ не могутъ прищипы въ соприкосновеніи между собою по той причинѣ, что отталкивающая сила весьма быстро увеличивается съ уменьшеніемъ ихъ разстояній.

Какъ притягательныя такъ и отталкивающія силы увеличиваются по мѣрѣ уменьшенія разстояній; но отталкивающія быстрае первыхъ. Та и другая, при чувствительномъ разстояніи, дѣлаются обратно пропорціональными квадрату разстояній. Смол. MOLECULE.

Частички и атомы тѣла своимъ соприкосненіемъ производятъ звукъ, теплоту и свѣтъ. Если только одніе частички приведены въ соприкосновенное движеніе, то происходитъ *звукъ*; Смол. ACOUSTIQUE. При совокупныхъ соприкосненіяхъ частичекъ и атомовъ, обнаруживается *свѣтъ и теплота* Смол. LUMIÈRE, CHALEUR. Частичная соприкосненія передаются нашему слуху атмосферическимъ воздухомъ; *атомическія* же дѣйствуютъ на наши чувства чрезъ посредство зѣбра. Смол. ÉTHER. Зѣбрь есть единственное вещество, состоящее изъ однихъ только атомовъ. Впрочемъ, почти всегда соприкосненія частичекъ и атомовъ происходятъ *вмѣстѣ*, почему звукъ бываетъ всегда сопровождается большимъ или меньшимъ освобожденіемъ тепла.

ATTIRER. (Мех.) **ПРЯТАГИВАТЬ.** См. ATTRACTION. *Corps attiré vers deux centres fixes; тѣло притягиваемое къ двумъ неподвижнымъ центрамъ.* Смол. CENTRALES (FORCES).

ATTOUCHEMENT. (Геом.) **СОПРЯКАСАНИЕ, КАСАНІЕ.** *Point d'atouchement, точка сопрякасания*, въ которой кривая линія касается прямой, или другой кривой линіи. Смол. CONTACT.

ATTRACTIF. (Мех.) **ПРЯТАГАТЕЛЬНЫЙ,** измѣняющій свойство притягивать. *Force attractive, pouvoir attractif, притягательная сила.*

АТТРАКЦИОН. (Мек.) **ПРЯТЯЖЕНІЕ.** Стремленіе замѣченное въ тѣлахъ, или въ непроницаемыхъ частицахъ, къ взаимному ихъ приближенію. Притяженіе должно быть измѣряемо степенью приближенія взаимно-притягивающихся тѣлъ, а также ихъ массами. *Нютонъ*, основываясь на этомъ, вывелъ законы *всеобщаго тяготѣнія*. Что касается до причины притяженія, то философы не согласны между собою въ этомъ отношеніи. Хотя *Нютонъ* не объявлялъ положительнымъ образомъ своего мнѣнія по сему предмету, однако же нѣкоторые ученики его, принимали притяженіе за свойство вещества. И такъ, по ихъ воззрѣнію, вещественная частица, но существу своему, одарена свойствомъ притягивать другія частицы. Последователей этого мнѣнія называютъ *аттракціонерами* (*attractionnaires*). Но, по мнѣнію наиболѣе утвердившемуся, взаимное стремленіе тѣлъ приближаться одни къ другимъ, проявляется въ некоторой рѣдчайшей жидкости, называемой *эфиръ*, наполняющей вселенную. Конечно, мы не можемъ объяснить, какими образомъ чрезъ посредство этой жидкости проявляется тяготѣніе одного тѣла къ другому; но, съ другой стороны, еще труднѣе вообразить, чтобы два тѣла, между которыми нѣтъ никакого посредства, могли притягивать другъ друга. По чему одно изъ этихъ тѣлъ признается присутствиемъ другого? И такъ, хотя въ насъощенъ составомъ нашихъ знаній, намъ и невозможно объяснить, какими образомъ жидкость, наполняющая пространство, производитъ явленіе притяженія, но тѣмъ не менѣе нѣтъ не доказана и невозможность объясненія, основаннаго на существованіи *эфира*. Последнее мнѣніе должно быть предпочтено мнѣнію *аттракціонеровъ*, ибо оно, по крайней мѣрѣ, не противорѣчитъ нашему разумію, между тѣмъ какъ понятіе *аттракціонеровъ* о притяженіи, не въ состояніи выдержать внимательнаго разсмотрѣнія.

Хотя законъ тяготѣнія, какъ мы видѣли выше, открытъ *Ньютономъ*, но первая мысль объ этой общей силѣ относилась къ временамъ гораздо отдаленнѣйшимъ. *Анаксигоръ* (500 лѣтъ до Р. Х.), *Демокритъ*, *Эпикуръ* уже допускали стремленіе вещества къ общему центру. *Платархъ* говоритъ о семъ предметѣ довольно удовлетворительно; онъ объясняетъ, какими образомъ каж-

дый міръ имѣетъ свой центръ, азовъ земли, моря, и заключаетъ въ себя силу, удерживающую все тѣло около сего центра.

Допричѣмъ нѣтъ ли же понятія о всеобщемъ притяженіи, и притягивала круглый мѣсяцъ небесныхъ тѣлъ стремленію ихъ, частицы къ взаимному приближенію. *Тигло-Бранс* допускаетъ, также центральную силу въ солнцѣ, удерживающую планеты въ ихъ орбитахъ, хотя подобное дѣйствіе и трудно было согласить съ его системою. *Иоганнъ Кеплеръ* о планетныхъ неравенствахъ не только не опредѣлялъ ихъ. Онъ былъ убежденъ во всеобщности и взаимности тяготѣнія. Въ предисловіи къ *Календарію на движеніи Марса* Кеплеръ говоритъ, что земля притягиваетъ луну, и обратно, и что еслибы онѣ не имѣли вращательнаго движенія, то начали бы приближаться одна къ другой, и соединились бы въ общій ихъ центръ тяжести. Въ другомъ мѣстѣ онъ приписываетъ дѣйствію солнца неравенства луны, а дѣйствію сей последней, притяженію и отталкиванію моря; также, сравниваетъ притяженіе солнца на планеты съ магнитнымъ полюсомъ.

Галилей, *Баконъ*, *Ферматъ*, *Робертъ* имѣли о притяженіи болѣе или менѣе вѣрные понятія. Но никто, до *Ньютона*, не былъ такъ близокъ къ точному понятію объ этомъ общенъ началѣ какъ Англійскій математикъ *Робертъ Гукъ*. Вотъ слова Гоука: *)

„1°. Всѣ небесныя тѣла нѣсколько изгибаются притяженіемъ или тяготѣніемъ около собственныхъ своихъ центровъ, но еще взаимно притягиваются въ своей сферѣ дѣятельности.

„2°. Всѣ тѣла, имѣющія простое прямолинейное движеніе, продолжали бы двигаться по прямой линіи, еслибы посторонняя сила не совращала ихъ отъ сего направленія, и не заставляла ихъ описывать кругъ, эллипсъ или другую, сложнѣйшую кривую.

„3°. Притяженіе бываетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ притягивающее тѣло ближе.“

Что касается до закона, по которому имѣется притяженіе съ разстояніемъ, то *Гукъ* сознавался, что онъ не нашелъ его. Впоследствии *Нютонъ* открылъ этотъ законъ. См. ниже; также въ статьѣ: *Астрономія*, *Исторія Астрономіи*.

*) An attempt to prove the motion of the Earth. Lond. 1674, in-4^o.

ATTRACTION NEWTONIENNE или **ATTRACTION, RESANTOUR, GRAVITATION UNIVERSELLE. ЗАКОНЪ ВСЕОБЩАГО ТЯГОТНІЯ**, открытый *Ньютономъ*. Такъ, или частицы штъ, находящаяся одна отъ другихъ въ чувствительныхъ разстояніяхъ, стремятся взаимно приблизиться. Стремленіе, являемое частицею приближившись къ другой частицѣ, являється *массою сей послѣдней, раздѣленной на квадраты ихъ взаимнаго разстоянія*. Въ этомъ собственно и состоитъ законъ всеобщаго тяготѣнія. Великій физикъ, открывшій его, принявъ за міру приращенія земли на луну, спленивъ взаимнаго ихъ приближенія; Смот. предыдущую статью, также **FORCE**. Чисобы объяснати это нашимъ чинамъ, положимъ что земля находится въ *T* (черт. 23, листъ I), а луна въ *L*; если бы земля не притягивала луны (мы употребляемъ слово притягивати, резумируя только явленіе, а не причину), то сія послѣдняя, по своей недействительности, двигалась бы по направленію *LN*, сохраняя первоначальную скорость, сообщенную ей въ *L* (См. **INÉRTIE**), и пришла бы, напрямѣръ, въ точку *N* по истеченіи времени θ . Но такъ какъ земля притягиваетъ луну, то если бы сія послѣдняя не имѣла движенія по *LN*, она бы приближалась къ землѣ по прямой линіи *LT*, и перешла бы, напрямѣръ, по истеченіи времени θ , проспранство *LM*. Но луна, будучи побуждаема дѣйствіемъ земли, и сверхъ того, имѣя уже движеніе, которое, по жерціи своей упорствуетъ сохранять, не перейдетъ ни въ *M* ни въ *N*, а въ слѣдствіе закона сложныхъ движеній (См. **PARALLELOGRAMME DES VITESSES**), изберетъ средній путь, и, въ то же время θ , опишетъ діагональ *LL'* параллелограмма *LML'N*. Достигнувъ точки *L'*, и если бы земля вдругъ перестала на нее дѣйствовать, она продолжала бы свое движеніе по направленію *L'N'*, сносиавляющія продолженіе линіи *LL'*; но такъ какъ земля не перестаетъ изъяснати дѣйствіе на луну, то сія послѣдняя, въ точкѣ *L'*, уклоняется отъ прежняго направленія, и перейдетъ проспранство *L'L''*, и такъ далѣе. Такъ какъ изображенное нами на чертѣ повпоряется по теченію каждаго безконечно малаго времени θ , то послѣдовательныя положенія луны, образуютъ непрерывную кривую или путь ея. Положимъ, что бѣзъ дѣйствія земли, луна находилась бы въ

точкѣ *P* по истеченіи времени *t*; но, въ слѣдствіе приращенія земли, луна дѣйствительно находится въ точкѣ *Q* кривой, описываемой ею. Последнее описаніе удвоеннаго проспранства *PQ* къ квадрату времени *t*, изображаетъ ускорительное дѣйствіе земли на луну въ точкѣ *L*. Смот. **FORCE**. Чисобы получить движущее дѣйствіе, надобно помножить ускорительное дѣйствіе на массу луны.

Такимъ образомъ Ньютономъ нашелъ законъ приращенія земли на луну; онъ усмотрѣлъ также, что пому же самому закону подвержены взаимныя дѣйствія солнца, планетъ и ихъ спутниковъ; по законъ всеобщаго тяготѣнія, въ томъ видѣ, въ какомъ онъ изложенъ въ началѣ этой статьи, Нютонъ вывелъ, руководствуясь однимъ наведеніемъ.

Приращеніе, въ слѣдствіе замѣчаемыхъ нами явленій, можетъ быть раздѣлено на два рода.

1) Приращеніе, изъясняющее свое дѣйствіе на разстояніяхъ чувствительныхъ. Приращенію такого рода видныя примѣры въ силѣ тяжести, въ магнитныхъ и электрическихъ приращеніяхъ.

2) *Притяженіе частное* (*attraction moléculaire* или *attraction de cohésion*), обнаруживающее свое дѣйствіе на разстояніяхъ весьма малыхъ. Примѣры частнаго приращенія усматриваемъ въ *волокнистыхъ лѣнникахъ* и *химическихъ соединеніяхъ*. Смот. **CAPILLAIRE (ACTION), MOLECULE**.

Законы приращенія перваго рода опредѣляются принятымъ въ соображеніе спленивъ взаимнаго приближенія притягивающихся штъ; что касается до частнаго приращенія, но невозможно опредѣлени законы ихъ взаимодействія, ибо частицы штъ не могутъ быть нами наблюдаемы. Одно только и извѣстно намъ въ этомъ отношеніи: разныя явленія, согласуясь въ своихъ показаніяхъ, обнаруживаютъ, что это дѣйствіе дѣлается чувствительнымъ только на разстояніяхъ, не подлежащихъ нашимъ чувствамъ по своей малости.

ATTRACTION D'UN CORPS SPHÉRIQUE. ПРИТЯЖЕНІЕ СФЕРИЧЕСКАГО ТѢЛА.

Положимъ, что имѣемъ тѣло, ограниченное двумя однородными шаровыми поверхностями, или, что все равно, мустой шаръ, и желаемъ опредѣлени приращеніе этого тѣла на матеріальную точку, анури или внѣ его находящуюся. Пусть бу-

дент C (черт. 24 и 25 листа I) общий центр сферических поверхностей, A приближаемая точка. Очевидно, что приближение на нее будет происходить по направлению линии AC , по причине симметрического вида притягивающего шара. И так, чтобы вывести полное притяжение на точку A , стоит только разложить разнанаправленный пустой шар на бесконечно малые элементы, и найти выражение притягательного действия по направлению CA одного из сих элементов на точку A ; потом, взяв сумму всех элементарных притяжений посредством правил интегрального исчисления, найдем полное притяжение пустого шара на точку A .

Пусть будет m какая нибудь точка шара; изобразим чрез r расстояние Am и чрез ϑ угол mCA , заключающийся между двумя прямыми Am и CA ; сверх того, проведем произвольную линию CB , и назовем ω угол, составленный плоскостями BCA с плоскостью mCA . Положение точки m будет совершенно определено посредством радиуса вектора r и двух углов ϑ и ω .

Элементы объема, выраженный посредством сих трех координат, и соответствующий элемент m , будет $r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\omega$. Смот. TRANSFORMATION DES COORDONNÉES; помножив сей элемент на плоскость ρ шара, получим элемент массы; если, сверх того, изобразим чрез a расстояние mA , и чрез f величину притяжения на единицу расстояния, и относящуюся к единичной массе, то получим выражение:

$$\frac{\rho f r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\omega}{a^2}$$

в следствие изложенного выше закона притяжения. Она величина изображает силу, направленную по линии Am ; чтобы получить ее составляющую по направлению AC , стоит только умножить ее на косинус угла CAm ; приняв $CA = a$, найдем

$$\cos(CAm) = \frac{a - r \cos \vartheta}{a},$$

и, следовательно, притяжение элемента m на точку A по направлению линии CA , будет

$$\frac{\rho f r^2 (a - r \cos \vartheta) \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\omega}{a^2},$$

а полное притяжение выразится тройным интегралом

$$\rho f \iiint \frac{r^2 (a - r \cos \vartheta) \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\omega}{a^2},$$

предполагая шар однородным. Чтобы распространить этот интеграл на все продолжение шара, надобно взять его между надлежащих предельных, именно: 1) между предельми l и l' относительно перпендикуляра r , где под l и l' разумеются радиусы внутренней и наружной сферической поверхности; 2) между 0 и π относительно угла ϑ ; и 3) между 0 и 2π в рассуждении ω .

Мы не будем останавливаться на этом интегрировании; замечать только, что перпендикуляр r , входящая под интегральный знак, может быть исключена посредством уравнения $a^2 = a'^2 - 2ar \cos \vartheta + r^2$, доставляемого прямоугольником AmA ; или, еще удобнее будет исключить угол ϑ , и тогда, предель для r будут $\pm(a-r)$ и $a+r$; знак $+$ относится к тому случаю, когда $a > r$, а знак $-$, когда $a < r$.

Произведя двойное интегрирование, первое, относительно ω , второе, в рассуждении r , найдем

$$\frac{2\pi \rho f}{a^2} \int r \, dr \, (\pm r),$$

где знак $+$ соответствует случаю $a > r$, а знак $-$ тому, когда $a < r$.

Но замечим, что когда точка A находится в пустом шаре (черт. 26), то a будет всегда меньше r ; следовательно в таком случае предыдущий интеграл, обратится в нуль; откуда заключаем, что притяжение пустого однородного шара, илиющего собой равную толщину, на точку находящуюся в его пустоте, равняется нулю. То же самое можно сказать и о каком нибудь шаре, внутри пустого шара находящегося, ибо такое шари можно рассматривать составленным из совокупности бесчисленных материальных точек, из которых каждая, в следствие сказанного, будет находиться в равновесии.

Если точка A вне притягивающего шара (черт. 24), то $a > r$, и следовательно, взяв интеграл между предельми l и l' , найдем

$$\frac{2\pi \rho f}{a^2} \int_l^{l'} r \, dr \, (r+r) = \frac{4\pi \rho f}{a^2} (l'^2 - l^2).$$

Возм выражение притягательной силы на точку A . Изобразим чрез M массу пустого шара, найдем

$$M = \frac{4\pi \rho}{3} (l'^3 - l^3),$$

и следовательно, самое притяжение выразится чрез

$$\frac{Mf}{a^2},$$

которое ничем не различимъ отъ притяженія массы M , сосредоточенной въ центръ C . Отсюда можемъ заключить, что *притяженіе однороднаго сферическаго тѣла, на вѣнчикѣ, точкѣ, одинаково съ тѣмъ, которое получалось бы сосредоточивъ всю массу тѣла въ его центръ*. Впрочемъ; замѣнимъ, что это предположеніе справедливо и въ томъ случаѣ, когда сферическое тѣло не однородное, а состоитъ изъ однородныхъ сферическихкихъ слоевъ, однородныхъ, въ смысле, когда центръ C совпадаетъ, по крайней мѣрѣ, радиуса r .

Изъ сказаннаго легко можно вывести законъ измѣненія силы тяжести внутри земнаго шара. Дѣйствительно, рассмотримъ однородный шаръ, коего плотность есть ρ , а радиусъ R ; пусть притягиваемое тѣло находится внутри, отъ центра, на разстояніи r отъ его центра. Изъ слѣдующей доказанной ниже теоремы, притяженіе вѣнчика слоевъ на тѣло будетъ равносильно нулю; останется только шаръ, описанный радиусомъ r , и его притяженіе на тѣло опредѣлился выведенною ниже формулою

$$\frac{4\pi\rho f}{3a^2} (R^2 - r^2),$$

въ которой должно положить $l = r$, $l' = 0$, $a = r$; отсюда заключаемъ, что притяженіе шара на тѣло, внутри его находящееся, имѣетъ выраженіемъ

$$\frac{4\pi\rho}{3} r.$$

И такъ, еслибы земля состояла вся изъ однородныхъ слоевъ, то тяжесть внутри ея, была бы прямо пропорціональна разстоянію тѣла отъ центра. Впрочемъ, должно замѣнить, что этотъ законъ справедливъ только въ томъ предположеніи, что земля имѣетъ сферическій видъ, и не принимая притомъ въ соображеніе ея центробѣжной силы.

ATTRACTION DES SPHÉROÏDES. ПРИТЯЖЕНІЕ СФЕРОИДОВЪ. Рѣшеніе многихъ вопросовъ изъ Естественной Философіи зависить отъ опредѣленія притяженія сфероида на точку, находящуюся внутри, или на самой его поверхности, или еще внѣ сего тѣла. Важность сей задачи очевидна въ Небесной Механикѣ. Движеніе центровъ планетъ имѣетъ измѣненіе значительнымъ образомъ отъ уклоненія ихъ отъ вида сферическаго. Осн вращенія планетъ измѣняютъ свое направленіе по той же причинѣ. Явленіе

притяженія и отклоненія основано на опредѣленіи притяженія земнаго сфероида на воды Океана. Но самое важное: приложеніе этой теоріи; безъ сомнѣнія, состоитъ въ: опредѣленіи вида небесныхъ тѣлъ.

Ученіе о притяженіи сфероида есть одно изъ обширнѣйшихъ въ области новѣйшаго Аналіза; предѣлы нашего Лекціона, не позволяютъ намъ, предложить, никакъ подробностей; но, сему, предешу; въ концѣ, начала, одной теоріи въ самомъ краткомъ видѣ.

Изобразимъ, чрезъ x, y, z , притягиваемыя координаты, какой нибудь частицы dm даннаго сфероида. Сія координаты, по своей неизмѣнности, будутъ принадлежать всей частицѣ. Пусть будутъ a, b, c , описываемыя тѣмъ же осей, какъ и x, y, z , координаты притягиваемой точки, которую, для сокращенія рѣчи, будемъ называть M . Пусть r разстояніе M отъ dm , и предположимъ чрезъ $\varphi(r)$ законъ притяженія.

Притяженіе частицы dm на точку M изобразится чрезъ $\varphi(r)dm$; всякая другая частица будетъ притягивать M съ подобнымъ напряженіемъ; вопросъ состоитъ въ опредѣленіи равнодѣйствующей всѣмъ такимъ силамъ. Неудобно: искать прямо сію равнодѣйствующую посредствомъ правила параллелограмма силъ; гораздо лучше искать ея проекціи на прѣхъ неподвижныхъ осей, напрячь на координатныхъ, и потомъ уже, посредствомъ силъ проекцій, опредѣлять самую равнодѣйствующую. Проекціи силы $\varphi(r)dm$ будутъ

$$\varphi(r) \frac{x-a}{r} dm \text{ по оси } x,$$

$$\varphi(r) \frac{y-b}{r} dm \text{ по оси } y,$$

$$\varphi(r) \frac{z-c}{r} dm \text{ по оси } z;$$

слѣдовательно, проекціи равнодѣйствующей опредѣлятся формулами

$$\iiint \varphi(r) \frac{x-a}{r} dm,$$

$$\iiint \varphi(r) \frac{y-b}{r} dm,$$

$$\iiint \varphi(r) \frac{z-c}{r} dm,$$

въ которыхъ интегралы должны были распространены на всѣ частицы сфероида. Чтобы на самомъ дѣлѣ произвеоши означенныя интегрированія, надлежитъ частицу dm , изображающую

элементы ея массы, замѣнить произведеніемъ плотности ρ на дифференціальный элементъ объема, который можно принять равнымъ параллелепипеду $dx dy dz$. И такъ, $dm = \rho dx dy dz$, и следовательно произведенія приближенія будутъ

$$\iiint q(r) \frac{x-a}{r} \rho dx dy dz,$$

$$\iiint q(r) \frac{y-b}{r} \rho dx dy dz,$$

$$\iiint q(r) \frac{z-c}{r} \rho dx dy dz.$$

Въ природѣ, свойство функціи $q(r)$ определяется формулою $q(r) = \frac{k}{r^3}$, въ которой k изображаетъ количество постоянное, называемое коэффициентомъ притяженія. И такъ, въ этомъ случаѣ, найдутся выраженія:

$$(1) \quad \begin{cases} k \iiint \rho \frac{x-a}{r^3} dx dy dz, \\ k \iiint \rho \frac{y-b}{r^3} dx dy dz, \\ k \iiint \rho \frac{z-c}{r^3} dx dy dz. \end{cases}$$

Интегрированіемъ сихъ формулъ, для какихъ ни есть сферидовъ, занимались первосепенные математикки; но усилія ихъ увѣнчались успѣхомъ только для сферидовъ, мало уклоняющихся отъ сферическаго вида, и заключающихъ плотность почти постоянную относительно широты и долготы. Въ этомъ случаѣ, предыдущіе интегралы могутъ быть выражены сходящимися рядами.

Одинъ частный случай притяженія сферидовъ, именно: притяженіе однороднаго эллипсоида, обратилъ на себя особенное вниманіе геометровъ. Задача сія рѣшена теперь со всею надлежащею полнотою. Она приводится къ опредѣленію тройныхъ, вышеприведенныхъ интеграловъ для всѣхъ точекъ даннаго эллипсоида.

Рѣшеніе этой задачи, по своему объему, не можетъ быть изложено въ нашемъ Лексиконѣ; отсылаемъ по сему предмету къ трудамъ: *Лагранжа*: Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques, Mémoires de Berlin 1773; *Лапласа*: Mécanique céleste, томъ 2-ой; *Лемандра*: Mémoires de l'Académie des sciences de Paris для Théorie des fonctions elliptiques, томъ 1-й; скажемъ только, что она представляетъ два случая: первый, когда притягиваемая точка находится внутри эллипсоида, а второй, сложнѣйшій, имѣетъ предметомъ опредѣленіе притяженія эллипсоида на точку, внѣ

этого эллипсоида. Обыкновенно сей послѣдній случай производятъ наперекъ, такъ легко сдѣлать, ошибившись на шестерѣ, предложенной Англійскимъ математикомъ *Йворри* (Ivory). Такъ какъ ни одинъ изъ отечественныхъ математиковъ не писалъ объ этой притягиваемой теоремѣ, то мы предлагаемъ ее здѣсь съ надлежащими подробностями.

Изобразимъ чрезъ α, β, γ полу-оси притягивающаго эллипсоида, предполагаемаго однороднымъ. Притяжимъ къ за положительными координатами точку, уравненіе поверхности эллипсоида будетъ

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

и сверхъ того, имѣемъ условіе

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} > 1,$$

ибо, по предположенію, притягиваемая точка находится внѣ эллипсоида. Надобно интегрировать формулы (1) относительно всѣхъ значений x, y, z , соотвѣствующихъ всѣмъ точкамъ эллипсоида. Разсмотримъ которую нибудь изъ сихъ формулъ, наприимръ послѣднюю

$$k \rho \iiint \frac{z-c}{r^3} dx dy dz.$$

Такъ какъ $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$, то дифференцируя это уравненіе по измѣняемости z , найдемъ $r dz = (z-c) dz$; следовательно, предыдущая формула, которую для простоты изобразимъ чрезъ C , обратится въ

$$C = k \rho \iiint \frac{dz}{r^2} dx dy.$$

Здѣсь интегралъ въ разсужденіи r долженъ быть взятъ отъ величинъ r , соотвѣствующихъ значенію $z = -\gamma \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}}$ до той, которая относится къ значенію $z = +\gamma \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}}$; изобразимъ чрезъ r_1 и r_2 предѣльные величины перемѣнной r , получимъ

$$C = k \rho \iint \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) dx dy.$$

Пусть будетъ теперь другой эллипсоидъ, имѣющій одинъ центръ съ первымъ, одинаковое направленіе главныхъ осей и ту же самую плотность. Изобразимъ чрезъ $\frac{x'^2}{\alpha'^2} + \frac{y'^2}{\beta'^2} + \frac{z'^2}{\gamma'^2} = 1$ уравненіе его поверхности, и будемъ искать при-

выжение этого второго эллипсоида на точку, определенную координатами a', b', c' . Если назовем C' составляющую притяжения, параллельную оси z , то получимъ

$$C' = k\rho \iint \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) dx dy,$$

гдѣ подъ r_1 и r_2 разумеются предѣльные расстоянія точки (a', b', c') отъ поверхности второго эллипсоида.

Теперь постараемся расположить количественно $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ такъ, чтобы каждому расстоянію точки (a, b, c) отъ поверхности первого эллипсоида, соотвѣствовало равное расстояние точки (a', b', c') отъ поверхности второго. Очевидно, что на сей конецъ достаточно будетъ приравнять

$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2} = 1,$$

$$\frac{a'^2}{\alpha'^2} + \frac{b'^2}{\beta'^2} + \frac{c'^2}{\gamma'^2} = 1,$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = (x'-a')^2 + (y'-b')^2 + (z'-c')^2$$

привести къ двумъ первымъ, такъ чтобы претвѣ было необходимымъ слѣдствіемъ первыхъ двухъ; а для этого, сличить только умножившіе члены, заключающіе въ себѣ первыя степени переменныхъ x, y, z, x', y', z' , что приводитъ къ условіямъ

$$ax = a'x', \quad by = b'y', \quad cz = c'z',$$

и слѣдовательно

$$x^2 - x^2 + y^2 - y^2 + z^2 - z^2 = a^2 - a'^2 + b^2 - b'^2 + c^2 - c'^2,$$

Положивъ $\frac{a}{\alpha} = l, \frac{b}{\beta} = m, \frac{c}{\gamma} = n$; будемъ

$$x' = lx, \quad y' = my, \quad z' = nz,$$

почему

$$\begin{aligned} (l^2-1)x^2 + (m^2-1)y^2 + (n^2-1)z^2 \\ = (l^2-1)a'^2 + (m^2-1)b'^2 + (n^2-1)c'^2 = 0, \end{aligned}$$

и также

$$\frac{l^2-1}{l^2} x'^2 + \frac{m^2-1}{m^2} y'^2 + \frac{n^2-1}{n^2} z'^2 = 0.$$

Слѣдовательно

$$l^2 - 1 = \frac{\alpha^2}{a^2}, \quad m^2 - 1 = \frac{\beta^2}{b^2}, \quad n^2 - 1 = \frac{\gamma^2}{c^2}$$

$$l^2 - 1 = \frac{l^2 \alpha^2}{a'^2}, \quad m^2 - 1 = \frac{m^2 \beta^2}{b'^2}, \quad n^2 - 1 = \frac{n^2 \gamma^2}{c'^2}.$$

И такъ

$$\alpha'^2 = l^2 \alpha^2, \quad \beta'^2 = m^2 \beta^2, \quad \gamma'^2 = n^2 \gamma^2,$$

откуда

$$a' = la, \quad b' = mb, \quad c' = nc.$$

Сверхъ того имѣемъ

$$l^2 = \frac{a^2 + \delta}{a'^2}, \quad m^2 = \frac{b^2 + \delta}{b'^2}, \quad n^2 = \frac{c^2 + \delta}{c'^2},$$

почему

$$(2) \begin{cases} a' = \frac{a\alpha}{\sqrt{a^2 + \delta}}, & b' = \frac{b\beta}{\sqrt{b^2 + \delta}}, & c' = \frac{c\gamma}{\sqrt{c^2 + \delta}}; \\ a' = \sqrt{a^2 + \delta}, & b' = \sqrt{b^2 + \delta}, & c' = \sqrt{c^2 + \delta}; \\ a' = \frac{\alpha}{\sqrt{a^2 + \delta}}, & b' = \frac{\beta}{\sqrt{b^2 + \delta}}, & c' = \frac{\gamma}{\sqrt{c^2 + \delta}}; \end{cases}$$

также

$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2} = 1,$$

или наконецъ

$$\frac{a^2}{a^2 + \delta} + \frac{b^2}{b^2 + \delta} + \frac{c^2}{c^2 + \delta} = 1.$$

Вотъ уравненіе претвѣ степени, опредѣляющее величину δ ; легко видѣть, что всѣ три корня этого уравненія вещественны: одинъ изъ нихъ положительный, а другіе два отрицательные. Для нашей задачи должно принять положительный; опредѣливъ величину δ , найдемъ посредствомъ формулъ (2) полу-оси a', b', c' новаго эллипсоида, координаты a', b', c' принадлежащей имъ точки и координаты x', y', z' точки его поверхности, находящейся въ томъ самомъ разстояніи отъ (a', b', c') , въ какомъ (a, b, c) отъ (x, y, z) . Сосражалась съ выведенными выше уравненіями $a'^2 = a^2 + \delta$, $b'^2 = b^2 + \delta$, $c'^2 = c^2 + \delta$, усматриваемъ въ уравненіи, опредѣляющемъ δ , что поверхность новаго эллипсоида проходитъ чрезъ точку (a, b, c) .

Теперь обратимся къ формулѣ, опредѣляющей C' . Такъ какъ мы имѣли выше $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = (x'-a')^2 + (y'-b')^2 + (z'-c')^2$, то очевидно, что можемъ замѣнить въ ней r_1, r_2 величинами r_1 и r_2 ; слѣдовательно

$$C' = k\rho \iint \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) dx dy;$$

но, по причинѣ $x' = \frac{a'}{a}x, y' = \frac{b'}{b}y$, найдемъ

$$C' = \frac{a'\beta}{a\beta} k\rho \iint \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) dx dy = \frac{a'\beta}{a\beta} C,$$

откуда

$$C = \frac{a}{a'} C'.$$

Вспомнивъ теперь, что C' изображаетъ составляющую притяженія, параллельную оси z , на точку (a', b', c') ; но такъ какъ координаты этой точки удовлетворяютъ уравненію $\frac{a'^2}{\alpha'^2} + \frac{b'^2}{\beta'^2} + \frac{c'^2}{\gamma'^2} = 1$, найденному нами выше, то слѣдуетъ, что точка (a', b', c') находится на поверхности перво-

начального эллипсоида, и следовательно, *внутри* второго, что впрочем можно видеть из равенства

$$\frac{a'^2}{a^2} + \frac{b'^2}{b^2} + \frac{c'^2}{c^2} < 1.$$

И такъ c' изображаетъ составляющую притяженія на *внутреннюю* точку, а эпокъ случай, какъ мы уже замѣтили, проще того, когда ищемъ притяженіе на *внѣшнюю* точку. Въ семъ то приведеніи случая притяженія на вѣдную точку, къ притяженію на внутреннюю, состоимъ *теорема Айвори*. Если изобразимъ чрезъ A и B составляющія притяженія параллельныя осямъ x и y первого эллипсоида на точку (a, b, c) , и чрезъ A', B' , то же самое въ отношеніи второго эллипсоида, то, подобно предыдущему, получимъ:

$$A = \frac{\beta y}{\beta^2}, A' \text{ и } B = \frac{\alpha y}{\alpha^2}, B'.$$

ATTRACTION DES MONTAGNES. ПРИТЯЖЕ-

НІЕ ГОРЪ. Такъ какъ всѣ вещественныя частицы притягиваются взаимно въ прямомъ отношеніи массъ и обратномъ квадратовъ ихъ разстояній, то отсюда слѣдуетъ, что двѣ какія нѣ есть массы, при поверхности земли находящіяся, будутъ стремиться къ взаимному приближенію. Но, по малой величинѣ сихъ массъ, это стремленіе вообще для насъ незаметно, что впрочемъ весьма естественно, когда примемъ въ соображеніе, что самое притяженіе земли не такъ значительно; и въ самомъ дѣлѣ мы знаемъ, что ось сего дѣйствія, тѣла переходить только около 16 футовъ въ каждую секунду. Но замѣтимъ, что сказанное намъ о тѣлахъ обыкновенной величины, не должно относиться къ значительнымъ массамъ, каковы напримѣръ горы. И дѣйствительно, наблюдатели замѣтили вліяніе ихъ притяженія на тѣла. При наблюденіи высоты свѣтила по близости большой горы, они усмотрѣли что отвѣсъ, коего наклоненіе, при дѣйствіи одного притяженія земли, должно быть перпендикулярно къ поверхности сползшихъ водъ, уклоняется отъ вертикальнаго направленія притягательнымъ дѣйствіемъ горы. Чтобы удостовериться въ шакомъ уклоненіи, и вѣстѣ съ тѣмъ найти его мѣру, можно поступать слѣдующимъ образомъ. На южной и сѣверной сторонѣ горы, подъ однимъ и тѣмъ же меридіаномъ, наблюдаютъ разстояніе звѣздъ отъ зенита. Если отвѣсъ, отъ притяженія горы,

уклонился отъ вертикальнаго направленія, то звѣзда, при наблюденіи съ южной стороны, будетъ описана нѣсколько сѣвернѣе промежутка лежащаго, а при наблюденіи съ сѣверной стороны, нѣсколько южнѣе; следовательно, разность широтъ двухъ мѣстъ наблюдений, выведенная изъ этихъ образцовъ, будетъ болѣе истинной разности. Но еслибы сѣя послѣдняя была опредѣлена чрезъ непосредственное измѣреніе разстоянія между двумя мѣстами наблюдений, то избытокъ разности широтъ, выведенной чрезъ наблюденія звѣздъ, предъ разностью широтъ, найденной чрезъ непосредственное измѣреніе части меридіана, покажетъ дѣйствіе, произведенное притяженіемъ горы. Половина сего избытка измѣренъ уклоненіе отвѣса отъ вертикальной линіи при каждомъ наблюденіи, если только притяженіе горы съ обѣихъ сторонъ, южной и сѣверной, одинаково.

Бугеръ и Ла Кондаминъ, въ 1738 году, измѣряя при градусѣ меридіана по близости области Кито въ Перу, производили наблюденія съ южной и сѣверной стороны известной горы *Чилиборазо*; они нашли, что отъ притяженія сей горы, отвѣсъ уклоняется отъ вертикальнаго направленія на $7''5$.

Послѣ нихъ известный Англіійскій астрономъ *Маскеллиъ*, снабженный точнѣйшими астрономическими инструментами, былъ отправленъ въ 1774 году Лондонскимъ Королевскимъ Обществомъ въ Шотландію съ цѣлію произвести наблюденія надъ притяженіемъ горъ. Маскеллиъ избралъ гору *Шехаллиенъ* (*Schehallien*), коей высота надъ поверхностію моря равна около 3550 футовъ, и пашель посредствомъ многлхъ, весьма точныхъ наблюденій, что дѣйствіе этой горы на отвѣсъ, производить уклоненіе около 6 секундъ. Подробноскіе сикъ наблюденій помѣщены въ *Philosophical transactions*, 1775 г.

ATTRACTIONNAIRES. АТТРАКЦИОНЕРЫ. Послѣдователи ученія о всеобщемъ тяготѣніи, приписывающе частицамъ вещества свойство притягивать другія частицы. См. **ATTRACTION.**

ATTRIBUER. (Анг.) ПРИПИСЫВАТЬ, ДАВАТЬ, НАЗНАЧАТЬ. *Attribuer à x une val. positive; присписать количеству x значеніе положительное.*

ATTRITION. (Mex.) ТРЕНІЕ. См. **FROTTEMENT.**

ATWOOD (MACHINE, APPAREIL D'). (Физ.) АТ-ВУДОВА МАШИНА, АТВУДОВЪ ПРИБОРЪ.

Скорости свободно падающего тѣла слишкомъ значительны, чтобы можно было вывести законы его движенія непосредственными наблюденіемъ. Машина, изобрѣшенная *Атвудомъ*, представляетъ удобный способъ для уменьшенія сей скорости; не измѣняя въ сущности законовъ паденія тяжелыхъ тѣлъ, мы можемъ, при ея пособіи, доказать на опытахъ истъ общія свойства ихъ движенія.

Машина *Атвудова* состоитъ изъ веревкальной стойки *AB* (черт. 26 листъ I), на которой означены дѣленія, какъ то: футы, дюймы, линии; обыкновенная высота стойки бываетъ около одной сажени. Въ верхней части всего прибора находится неподвижный блокъ *E*, свободно обращающійся около своей оси. Двѣ цилиндрическія гири *m* и *m'*, равнаго вѣса, привѣшиваются къ концамъ крѣпкой нити, которую накладываютъ попомъ на блокъ. Эта нить должна свободно ходитъ по желобу блока, который дѣлается довольно узкимъ. Наконецъ, кружокъ *D*, оснащенный гири *m*. Когда желаетъ привести въ движеніе гирю, то спускаетъ только къ одной изъ нихъ прибавитъ небольшую тяжесть. Дѣленія, означенныя на стойкѣ, покажутъ пространство, перейденное каждою массою, а секундный маятникъ, находящійся при машинѣ, будетъ служить для сравненія времени съ переходными пространствами; изъ этого сравненія выводятся слѣдующій законъ движенія:

1. *Пространство, переходимое гирею, пропорціонально квадрату времени.* Если изобразимъ чрезъ *G* пространство, перейденное гирею въ первую секунду, каково бы оно впрочемъ не было, чрезъ *E* пространство переходимое ею въ продолженіе *T* секундъ времени, то получимъ $E = GT^2$, откуда заключаемъ, что движеніе гирей равноускоренное.

Весьма легко также, посредствомъ *Атвудовой* машины, опредѣлить скорость, приобретаемую тѣломъ по истеченіи извѣстнаго времени. Для сего употребляють подвижное кольцо *C*, которое можно ходитъ по днѣ стойки, и быть утверждено на какой угодно высотѣ. Грузъ, наложенный на гирю *m*, состоитъ изъ пластины *p*, коей длина превосходитъ діаметръ кольца *C*;

такимъ образомъ, когда гиря опускается и пройдетъ сквозь кольцо, пластинка останется на немъ, и массы *m* и *m'* дѣлаются равными между собою; слѣдовательно, дѣйствіе ускорительныхъ силъ, измѣняющихъ движеніе гирей, уравновѣшивается, и движеніе ихъ дѣлается равноирирымъ. Передвигая кольцо *C* въ разныя точки дѣленія стойки *AB*, выведемъ такое слѣдствіе:

2. *Скорости пропорціональны времени, истекшему отъ начала движенія до того момента, когда пластинка отделиться отъ массы m, и останется на кольцѣ.* А чтобы получить скорость по истеченіи *T* секундъ, спускаетъ только помножить время *T*, на удвоенное пространство *G*, описываемое гирею въ первую секунду ея движенія. И такъ, если означимъ чрезъ *V* скорость, приобретаемую гирею по истеченіи *T* секундъ, то найдемъ $V = 2GT$.

Изъ двухъ уравненій $E = GT^2$ и $V = 2GT$ выводимъ $E = \frac{V^2}{4G}$, откуда заключаемъ 3) *то перейденнаго пространства пропорціональны квадратамъ скоростей.*

Впрочемъ, узнавъ изъ опыта, что движеніе гирей равноускоренное, то есть, что пространства пропорціональны квадратамъ времени, ясно, что основанный на добросовѣстномъ спавованіи азимини, ибо, чрезъ дифференцирование пространства $E = GT^2$ относительно времени, находимъ, что скорость $V = 2GT$.

Чтобы вывести аналитически обстоятельство движенія двухъ массъ *m* и *m'* на машинѣ *Атвуда*, мы употребимъ начало *Д'Аламберта*, (Смол. DYNAMIQUE) не потому, чтобы оно было нужно, ибо разсматриваемое нами движеніе такъ просто, что можно прямо видѣть всѣ его обстоятельства, но единственно для того, чтобы показать приложимое начало, которое въ большомъ употребленіи въ *Динамике*. Положимъ что $m > m'$; изобразимъ чрезъ *v* и *v'* скорости массъ *m* и *m'*, соотвѣтствующія времени *t*. Пусть будетъ *g* сила тяжести, которая необходимо должна быть постоянна, ибо, въ противномъ случаѣ, движеніе гирей не было бы равноускореннымъ.

Скорость поперечнаго массе *m*, въ элементъ времени *dt*, будетъ $gdt - dv$, а массе *m'*, $gdt - dv'$; количества движенія, соотвѣтствующія силѣ потеряннаго скорости, выразятся чрезъ $m(gdt - dv)$.

$m'(gdt - dv')$, и, въ слѣдствіе начала д'Аламберта, они должны уравновѣшиваться между собою. Но такъ какъ эти силы дѣйствуютъ чрезъ посредство блока, то, для равновѣсія, они должны быть равны; слѣдовательно

$$m(gdt - dv) = m'(gdt - dv').$$

Сверхъ того, такъ какъ въ разсматриваемомъ нами движеніи, одна масса подымается, между тѣмъ какъ другая опускается, при чемъ переходимыя пространства остаются равными, то $v + v' = 0$, откуда $dv' = -dv$. И такъ

$$m(gdt - dv) = m'(gdt + dv).$$

Изъ этого уравненія выводимъ

$$dv = g \cdot \frac{m - m'}{m + m'} dt,$$

чего интегрируя, предполагая начальную скорость равною нулю, будемъ

$$v = g \cdot \frac{m - m'}{m + m'} t.$$

Пусть будетъ e наизвѣстное разстояніе массы m отъ определенной точки, взятой произвольно на стойкѣ. Такъ какъ $v = \frac{de}{dt}$, то

$$\frac{de}{dt} = g \cdot \frac{m - m'}{m + m'} t;$$

помноживъ на dt и взявъ интегралъ въ томъ предположеніи, что при началѣ движенія $e = 0$, получимъ

$$(2) \quad e = g \cdot \frac{m - m'}{m + m'} t^2.$$

Уравненія (1) и (2) совершенно согласуются съ уравненіями $V = 2GT$ и $E = GT^2$, выведенными изъ опытовъ; сличая ихъ, находимъ $G = g \cdot \frac{m - m'}{m + m'}$. Что касается до сопротивленія воздуха, то оно не вліяетъ чувствительными образомъ на движеніе массъ m и m' въ машинѣ Ашмудовой, когда скорости сихъ послѣднихъ будутъ довольно малы, что зависитъ отъ степени малости отношенія $\frac{m - m'}{m + m'}$. И такъ, если масса m немногимъ превосходитъ массу m' , то наблюдаемое движеніе будетъ почти одинаково съ тѣмъ, которое получалось бы въ безвоздушномъ пространствѣ. Замѣтимъ, что для точности машины, надобно стараться по возможности уменьшитъ треніе, обнаруживающееся при вращеніи блока, а также, для привитія гварскъ, употребляетъ вѣтъ тонкую, дабы вѣсъ ея, при взвѣшеніи длины второй нити съ обѣихъ сторонъ блока, не имѣлъ чувствительнаго вліянія на движеніе массъ m и m' .

AUBES, APES, APERONS. (Гидрав.) **ЛОПАТКИ, КРЫЛЬЯ.** Доски, утверждаемыя на вращающихся колесахъ, приводимаго въ движеніе водою. *Aubes courbes, крылья лопатки. Roues verticales à aubes, вертикальные колеса съ лопатками.*

AUGE, ЖОЛОВА.

AUGET, ЖОЛОВОКЪ. — ЛУЧИКЪ. *Roues à augets* колеса съ лучиками.

AUGMENT или **DÉCRÉMENT.** Уст. слово. (*Авгл.*) **ПРИРАЩЕНІЕ, УВЕЛИЧЕНІЕ.** См. ACCROISSEMENT.

AUGMENTATION, УВЕЛИЧЕНІЕ.

AUGMENTER, УВЕЛИЧИВАТЬ.

AUSTRAL. (Астр.) **ЮЖНЫЙ.** *Pôle, hémisphère austral;* южный полюсъ, южное полушаріе.

AUTOMATE. (Мех.) **АВТОМАТЪ, АНДРОИДЪ, САМОДВИГЪ.** Отъ Греч. *αὐτός, самъ, и αἰνῶν, желать.* Вообще машина, заключающая въ себѣ самой какое либо начало движенія. Въ этомъ смыслѣ часы, паровыя машины, лички съ музыкою и проч. можно назвать автоматами. — Въ болѣе тѣсномъ смыслѣ, *автоматы* называются машина, имѣющая наружный видъ челоука или какого либо животнаго, и подражающая нѣкоторымъ ихъ движеніямъ. Когда автоматъ изображаетъ челоука, и производитъ свойственныя ему дѣйствія, то преимущественно называющагося *андридомъ* (отъ Греч. *ανδρῶς, челоука, и ιδῶς, образъ*).

Изобрѣтеніе автоматовъ должно отнести къ временамъ довольно отдаленнымъ: *Авлогеллій* въ *Антикискихъ ногахъ*, упоминаетъ объ искусственномъ деревянномъ голубѣ, который могъ летать. Этотъ голубъ, если онъ только не выдумка, былъ устроенъ *Алхимомъ*, философомъ Пнагорейской школы, и другомъ Платона, сдѣланъ за 300 лѣтъ до Р.Х. Исторія повѣствуетъ еще о многихъ другихъ автоматахъ, коихъ устройство намъ вовсе неизвѣстно, и даже самая подлинность ихъ болѣе или менѣе сомнительна.

Въ XIII столѣтіи, вѣстшій *Албертъ Великій*, Регенбургскій епископъ, составилъ андроида, который ходилъ по комнатамъ, открывалъ двери и произносилъ нѣсколько словъ. Въ тѣхъ пискахъ практической Механики упоминаютъ еще о многихъ подобныхъ произведеніяхъ, болѣе или менѣе примѣчательныхъ.

Въ прошедшем столѣтїи, Вокасонъ, Французскій механикъ, приобрѣлъ себя особенную славу своими автоматами. Въ 1736 году, онъ окончилъ своего *флейтраверсиста-автомата*, и въ 1738 году показывалъ его въ Парижѣ; многимъ любопытнымъ спелася, чтобы видѣть это произведение. Андрюа, по свидѣтельству Парижской Академіи, которой было поручено разсмотрѣть его, играя на флейтѣ нѣсколько пьесъ, производилъ въ обширномъ смыслѣ нѣ же самыя дѣйствія, какъ искусный музыкантъ, играющій на семъ инструментѣ; подражаніе дѣйствіямъ и средству одушевленной природы было соблюдено Вокасономъ съ неизмѣрною точностію и совершенствомъ.

Въ 1741 году Вокасонъ выставилъ еще двухъ автоматовъ:

1) *Утку*, обыкновенной величины, коей механику подражалъ съ точностію оуправленіямъ живой утки. Она пропыхивала шею, брала личинъ изъ рукъ, гладила его съ ласкостію, при чемъ усмиралась движенье ея горла для того, чтобы личина могла перейти въ желудокъ, въ который она подвергалась нѣкотораго рода зарѣзю, и потомъ извергалась обыкновеннымъ пулемъ, весьма прилично наизмѣнившая въ своемъ видѣ. Сверхъ того, утка-автоматъ полоскалась въ водѣ, плава, хвкала точно такъ, какъ живая утка.

2) Андрюа играющій на флейтѣ, съ тремя опивертлїями, и ударяющій въ пакли по барабану. При устроении сего автомата, Вокасонъ открылъ, что малая флейта изъ всѣхъ духовыхъ инструментовъ, наиболее оупогонительна для груди. Грудные мускулы должны произвеша усыліе, равное машинѣ 68 фунтовъ, когда берется *верхнее си*. Желающіе ознакомиться съ Вокасоновыми автоматами, найдутъ довольно подробное описаніе ихъ механизма въ *Encyclopédie mѣthodique*, отдѣленіе *Mathématiques*, статьи: *Androïde* и *Automate*.

Послѣ Вокасона занимались устройствомъ разнаго рода автоматовъ: *Кемпелей*, сдѣлавшій шахматнаго игрока (въ 1769 году), и устроившій, какъ увѣряють, андрюа, который произносилъ нѣсколько словъ и даже цѣлыя фразы живыми образами, между прочимъ: *Venez avec moi à Paris*; Швейцарецъ *Дронтъ* съ сыномъ, дѣлавъ андрюа,

довъ, которые могли писать, рисовать, играть на фортепїанѣ и проч.

Изъ числа новѣйшихъ автоматовъ, можно упомянуть о вазѣ, поднесенной *Фризардомъ* Бонапарту. Эта ваза отъ прикосновенія къ ней, превращалась въ пальмовое дерево, подъ которымъ сидѣла пашушка, и прла шерсть; близъ нея паслась коза, были птички, хала собачка и проч.

Движущіеся картины, уракограическія машины, искусственныя руки, ноги, говорящія головы и проч. можно также отнести къ автоматамъ. Въ сочиненіи: *Dictionnaire universel de Méthématique et de Physique*, par Saver'en, въ статьѣ *Automate*, упоминается о движущейся картинѣ, составленной членомъ Парижской Академіи, опцомъ *Себастианомъ*; на этой картинѣ разыгрывалась живописная опера въ пяти дѣйствіяхъ маленькими фигурами, которые являлись и уходили. Изъ неподвижныхъ ихъ легко было понимать содержаніе оперы. Длина этой картины была около 16 дюймовъ, высота 13, а глубина съ небольшою одинъ дюймъ.

Въ Русскомъ *Энциклопедическомъ Лексиконѣ* въ статьѣ *Автоматъ*, читателямъ найдутъ нѣкоторыя подробности объ часахъ, которые представляли внутренность Храма Гроба Господня; они были сдѣланы нашимъ художникомъ *Хулибинимъ*, и поднесены имъ Императрицѣ Екатеринѣ II.

AUXILIAIRE. (Анал.) **ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ, ВВОДНЫЙ.** *Quantité auxiliaire; вспомогательное, вводное количество.* Количество вводимое въ исчисленіе съ цѣлю упрощенія его въ какомъ либо отношеніи. *Equation, ligne auxiliaire, вспомогательное уравненіе, вспомогательная линия.* Такъ наприкръ, когда въ однородномъ дифференціальномъ уравненіи $\varphi(x, y) dx + \psi(x, y) dy = 0$, полагаемъ $y = xt$, то x есть вспомогательная величина, вводимая для отдѣленія переменныхъ количествъ.

AV.

AVAL. (Гидрав.) **ПО ТЕЧЕНІЮ, ПО ВОДѢ.**

AVANTAGE, ESPÉRANCE, FORTUNE. ВЫГОДА, ОЖИДАНИЕ. Это слово употребляютъ въ различныхъ значеніяхъ. Вообще, разумѣють подъ *ожиданіемъ* выгоду, зависящую отъ событія недостовернаго, но нѣющаго большую или меньшую вѣроятность.

AVANTAGE, ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE или FORTUNE PHYSIQUE. ФИЗИЧЕСКАЯ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЫГОДА.

Так называется игра ожидаемой выгоды, пожертвованная на вероятность того события, от которого выгода сама зависит. Положим например, что лицо A ожидает известной суммы a , а получение ее зависит от события, коего вероятность есть $\frac{1}{2}$. Математическое ожидание или математическая выгода лица A будет $\frac{1}{2}a$; но если, если бы A захотел продать ожидаемую им сумму, то надлежало бы заплатить за нее только $\frac{1}{2}a$. Эта плата будет безвидною (*équitable*) для обеих сторон.

AVANTAGE MORAL, ESPÉRANCE, FORTUNE MORALE. ПРАВСТВЕННАЯ ВЫГОДА, ВНУТРЕННЕЕ ОЖИДАНИЕ.

Правственная выгода зависит от выгоды математической. Но зависимость свою определять весьма трудно. Для различных лиц, и при различных обстоятельствах, она будет различна. Вообще, правственная выгода человека, коего имущество (*fortune physique*) изобразить чрез x , может выражаться функцией $q(x)$ такого свойства, что она, выйдя из x , будет неперестанно увеличиваться, а ее производная $q'(x)$, неперестанно уменьшаться, или, что все равно, $q'(x) > 0$, и $q''(x) < 0$. Даниил Бернулли принял $q(x) = k \log x + h$, где k и h изображают величинами, независимыми от имущества x . Он называл правственную выгоду *mesure du sort* (мера судьбы), а Ламіаз, *fortune или espérance morale*, или еще *avantage moral*.

Размышляя о нравственной выгоде весьма много во многих вопросах, и надобно полагать, что число приложений сей теории к общественной жизни еще увеличилось со временем; ибо, все окружающее, возбуждает в нас участие в той только степени, в какой действует на наше внутреннее довольство, или, как мы назвали выше, на нашу правственную выгоду.

Придем здесь несколько принятых, ясно доказывающих, как необходимо принимать иногда в соображение правственную выгоду.

Положим, что человек, обладающий имуществом a , желает застраховать часть x сего имущества, платя страховую премию b . Изобразим чрез q вероятность потери части x ; слѣ-

довательно, зная $1 - q = p$, p изобразить вероятность, что сама часть x останется неприкосновенною. И так, в следствие допущенной Даниэлю Бернулли игры правственной выгоды, она будет

$$p(k \log a + h) + q(k \log(a - x) + h)$$

если сказанное лицо не застрахует части x своего имущества; в противном случае, его нравственная выгода выражится чрез

$$k \log(a - b) + h.$$

Теперь надлежит рассмотреть, в каком из двух случаев правственная выгода будет больше.

Естественно полагать, что отдавание на страх должно увеличить правственную выгоду застрахователя; почему и рассмотрим, при каких условиях будет

$$k \log(a - b) + h > p(k \log a + h) + q(k \log(a - x) + h).$$

Это неравенство, в следствие уравнения $p + q = 1$, приводится к следующему:

$$\log(a - b) > p \log a + q \log(a - x),$$

откуда

$$a - b > a^p(a - x)^q,$$

или наконец

$$1 - \frac{b}{a} > \left[a^{p+q-1} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^q \right] = \left(1 - \frac{x}{a} \right)^q;$$

отсюда заключаем

$$b < a \left[1 - \left(1 - \frac{x}{a} \right)^q \right].$$

Так как количества, входящая во вторую часть последнего неравенства, все известны, или предполагаются известными (по наблюдениям), то всегда можно будет узнать, доставляет ли застрахование, по установленной премии b , выгоду застрахователю.

Теория правственной выгоды служила также для доказательства весьма важной истины, именно о невыгодности математически равных игр. Чтобы ограждать доказательство этого предложения от всякого возражения, мы положим, что правственная выгода выражается функцией этического имущества, удовлетворяющего только условиям, о которых было упомянуто в начале этой статьи, а впрочем остается произвольною. Следовательно, изобразив чрез $q(x)$ правственную выгоду, соответствующую этическому имуществу x , необходимо будет $q(x) > 0$, $q'(x) > 0$ и $q''(x) < 0$.

Положим теперь, что человек, обладающий имуществом $a + x$, ставящий в игру сумму x , проиграв другой суммой y ; пусть будет p вероятность выигрыша, и следовательно $1 - p = q$ вероятность проигрыша. Правственная выгода скажущего лица, перед началом игры, будет

$$\varphi(a+x);$$

если же потом человек становится игроком, то его нравственная выгода выразится через

$$p\varphi(a+x+y) + q\varphi(a) = p\varphi(a+x+y) + q\varphi(a+x-x) \\ = \varphi(a+x) + (p-q)\varphi(a+x) + \frac{py^2}{1.2}\varphi''(a+x+y) \\ + \frac{qx^2}{1.2}\varphi''(a+x-x);$$

но, по предположению, игра математически равна; следовательно $p = q$, отъ чего предыдущая формула обратится въ

$$\varphi(a+x) + \frac{py^2}{1.2}\varphi''(a+x+y) + \frac{qx^2}{1.2}\varphi''(a+x-x);$$

последние два члена этого выражения отрицательны, изъ чего заключаемъ, что оно меньше величины $\varphi(a+x)$, а это очевидно приводитъ къ тому следствию, что нравственная выгода человека не играющего, болѣе нравственной выгоды игрока.

Подобнымъ образомъ можно доказывать, что выгоды подвергаться опасностямъ свое имущество по часпикъ, нежели въ цілості. Возьмемъ частный случай. Положимъ, что купецъ, обладающій имуществомъ $a + 2x$, отправляетъ на одномъ кораблѣ часть $2x$ своего имущества; пусть будетъ q вероятность, что корабль погибнетъ. Изобразивъ чрезъ p разность $1 - q$, очевидно, что нравственная выгода купца будетъ

$$p\varphi(a+2x) + q\varphi(a).$$

Предполагая же, что купецъ отправляетъ часть $2x$ своего имущества на двухъ корабляхъ, по ровну, его нравственная выгода будетъ

$$p^2\varphi(a+2x) + 2pq\varphi(a+x) + q^2\varphi(a).$$

Легко доказать, что последнее выраженіе болѣе перваго. Действительно, такъ какъ $p + q = 1$, то имѣемъ

$$p\varphi(a+2x) + q\varphi(a) = (p+q)[p\varphi(a+2x) + q\varphi(a)] \\ = p^2\varphi(a+2x) + 2pq\varphi(a+x) + q^2\varphi(a).$$

Когда уничтожимъ члены $p^2\varphi(a+2x)$ и $q^2\varphi(a)$, общіе выраженіямъ нравственной выгоды въ обоихъ случаяхъ, но останется только доказать, что $2pq\varphi(a+x) > pq\varphi(a+2x) + pq\varphi(a)$, или $2p(a+x) > p(a+2x) + p(a)$, а это очевидно, ибо

последнее неравенство можетъ быть представлено въ видѣ

$$\varphi(a+x) - \varphi(a) > \varphi(a+2x) - \varphi(a+x),$$

которое действительно имѣетъ мѣсто по свойству функціи φ , увеличивающейся менѣе и менѣе по мѣрѣ возрастанія переменной величины.

И такъ, лучше подвергаться опасностямъ свое имущество по часпикъ нежели въ цілості.

AVANTAGEUX (RÉSULTATS LES PLUS). (Иск.

Вѣр.) **НАИВЫГОДНѢЙШІЕ ВЫВОДЫ.** Число бы дать понятіе о томъ, что должно разумѣть подъ наименованіемъ *выгодъ наблюдательныхъ*, положимъ, что желаемъ опредѣлить величину нѣсколькихъ неизвѣстныхъ x, y, z, \dots посредствомъ наблюдений; допустимъ, что сіи неизвѣстныя не могутъ быть намѣрены непосредственно, а опредѣляюся наблюденіями некоторыя ихъ функціи $\varphi_1(x, y, z, \dots), \varphi_2(x, y, z, \dots), \varphi_3(x, y, z, \dots), \dots$, коихъ извѣстныя значенія изобразимъ чрезъ M_1, M_2, M_3, \dots . Если бы наблюденія были въ строгомъ смыслѣ точны, то получили бы

$$\varphi_1(x, y, z, \dots) - M_1 = 0$$

$$\varphi_2(x, y, z, \dots) - M_2 = 0$$

$$\varphi_3(x, y, z, \dots) - M_3 = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

и достаточно бы было имѣть столько подобныхъ уравненій, сколько неизвѣстныхъ x, y, z, \dots для опредѣленія сихъ послѣднихъ. Но такъ какъ наблюденія подвержены погрѣшностямъ, то разности $\varphi_1(x, y, z, \dots) - M_1$ и проч. не будутъ равны нулю, а некоторымъ величинамъ положительнымъ или отрицательнымъ. Сіи-то погрѣшности и называются, очень свойственно, *погрѣшностями наблюденій* (*erreurs de l'observation*).

Изобразимъ чрезъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ эти неизвѣстныя погрѣшности: будемъ

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi_1(x, y, z, \dots) - M_1 = \varepsilon_1 \\ \varphi_2(x, y, z, \dots) - M_2 = \varepsilon_2 \\ \varphi_3(x, y, z, \dots) - M_3 = \varepsilon_3 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Изъ сихъ уравненій надлежало бы опредѣлить значенія количествъ x, y, z, \dots , что невозможно, ибо имѣемъ болѣе неизвѣстныхъ, нежели уравненій.

Прежде всего должно замѣтить, что во всѣхъ приложеніяхъ наивыгоднѣйшаго способа допускаютъ, что функціи $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ линейны, а это действительно можетъ быть предположе-

но, потому что величины x, y, z, \dots могут быть сделаны весьма малыми; в таком случае, функция $\varphi_1(x, y, z, \dots)$ будет весьма близка к значению $A_1 + B_1x + C_1y + D_1z + \dots$, где $A_1, B_1, C_1, D_1, \dots$ соответственно изображают величины функции $\varphi_1(x, y, z, \dots)$ и последовательных ее частных производных $\varphi_1'(x), \varphi_1'(y), \varphi_1'(z), \dots$ для $x=0, y=0, z=0$. То же самое должно разуметь и о функциях $\varphi_2(x, y, z, \dots), \varphi_3(x, y, z, \dots)$. Мы сказали, что количества x, y, z, \dots можно допустить весьма малыми, и это потому, что величины элементов, ими изображаемых, вообще известны по приближению. Остается только уточнить их, прибавляя к ним, в вид поправки, весьма малых количества. Так-то поправки и можно приписать к неизвестным величинам вопроса, которые изображены у нас буквами x, y, z, \dots . См. CARRES (METHODE DES MOINDRES).

И так уравнения (1) приведутся к следующим условиям уравнениям:

$$(2) \begin{cases} A_1 + B_1x + C_1y + D_1z + \dots - M_1 = \varepsilon_1 \\ A_2 + B_2x + C_2y + D_2z + \dots - M_2 = \varepsilon_2 \\ A_3 + B_3x + C_3y + D_3z + \dots - M_3 = \varepsilon_3 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

которые бы легко было разрешить, если бы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ были известны, что на самом деле не имеет места.

Первые геометры, употребившие *условия уравнения* (*équations de condition*), прибавляли к уравн. (2) некоторые соотношения, более или менее выгодные, между погрешностями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$; случалось часто, что вычисляя для одной и той же системы условий уравнений величины x, y, z, \dots разными математиками приводили к различным значениям для сих самых неизвестных. Долго не знали, какие именно соотношения должны были предпочесть другим. Сначала думали, что самая выгодная система величин x, y, z, \dots есть та, для которой наибольшая из погрешностей $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ будет меньше, нежели при всякой другой системе. См. SITUATIONS (METHODE DES). Другие полагали, что невыгоднейшая система соотношествует тому предположению, когда сумма погрешностей $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ есть наименьшая. Но когда анализ вероятностей был приложен к естественным наукам, тогда уви-

дели, что выбор невыгоднейших выводов зависит не только от численных величин погрешностей, но еще и от соотносящихся им вероятностей. Навыгоднейший вывод будет тот, для которого сумма произведений всех погрешностей (принимая их всегда с положительными знаками), помноженных на соответствующую им вероятность, будет наименьшая. Таким образом наблюдатель сравнивает с игроком, который может только проиграть, и старается сделать так, чтобы математическая величина его проигрыша была наименьшая. Такое сравнение оправдывается тем, что погрешности наблюдений, как положительные так и отрицательные, в равной степени должны быть избегаемы, почему они и могут быть приняты за проигрыш в игре; правда, в строгом смысле, в игре принимают в соображение не этическую, а нравственную выгоду (См. AVANTAGE), но, в настоящем случае, где погрешности в материи очевидно не могут иметь влияния на нравственное состояние наблюдателя, должно рассматривать только математическую выгоду.

Но как определить наименьшую величину суммы ошибок, помноженных на соответствующую им вероятность, и как найти вид функции, выражающей вероятность погрешностей? Пределы нашего Лекциона не позволяют нам изложить решение этого вопроса; отсылаем читателей, желающих изучить сию теорию, весьма плодотворную по своим приложениям, к сочинению Лапласа: *Théorie analytique des Probabilités*. Впрочем, мы предложим некоторые подробности по сему предмету в статьях: ÉQUATIONS DE CONDITION, PROBABILITÉ, TABLES ASTRONOMIQUES, MESURES GÉODÉSIQUES, CARRES (METHODE DES MOINDRES).

AX

АХЕ. (Геом.) **Ось.** Так можно назвать в обширном смысле этого слова, всякую прямую линию, проходящую внутри или вне какой либо фигуры или тела.

АХЕ ДИАМÉТРАЛ. Диаметральная ось. Прямая, разделяющая по-полам систему параллельных хорд в некоторых кривых. Вся коническая

сѣченія допускаютъ безчисленное множество диаметральныхъ осей. Если диаметральная ось будетъ перпендикулярна къ хордамъ, то она принимается за *главную ось* (*axe principal*). Очевидно, что главная ось раздѣляетъ кривую на двѣ симметричныя части.

АХЕ D'UNE COURBE или **АХЕ ПРИНЦИПАЛЪ**. См. выше.

АХЕ DE ROTATION или **DE SICOVOLUTION**. Ось вращения. Линія, около которой обращается или плоская кривая линія, или какая нибудь поверхность, образующія своимъ движениемъ, первалъ, поверхность вращения (*surface de révolution*), а вполнѣ, тѣло вращения (*solide de révolution*).

АХЕ D'UN CERCLE. Ось, диаметръ, поперечный къ кругу; прямая, проходящая чрезъ центръ круга, и ограниченная съ обѣихъ сторонъ его окружностію.

АХЕ D'UNE SPHÈRE. Ось, диаметръ, поперечный къ шару.

Подъ словомъ *оси* разумѣютъ также прямую, проведенную изъ вершины какой нѣсть фигуры или такъ изъ средней точки основанія. Напримѣръ: *Axe d'une section conique, d'un cylindre, d'un cône*, и пр. *Оси конической кривой, оси цилиндра, оси конуса* и пр.

АХЕ TRANSVERSE или **LE GRAND АХЕ DE L'ELLIPSE**. Поперечная или большая ось эллипса. См. **ELLIPSE**.

АХЕ TRANSVERSE DE L'HYPÉROLE. Поперечная ось, диаметръ гиперболы. См. **HYPÉROLE**.

АХЕ CONJUGUÉ или **SECOND АХЕ DE L'ELLIPSE, DE L'HYPÉROLE**. Сопряженная или вторая ось эллипса, гиперболы. См. **ELLIPSE, HYPÉROLE**.

АХЕ DE LA PARABOLE. Ось параболы. Неопредѣленная прямая, проходящая чрезъ вершину и фокусъ параболы.

АХЕ DES COORDONNÉES. Координатныя оси, оси координатъ. Такъ называются прямыя, взаимно пересѣкающіяся, къ коимъ относятъ кривыя линіи и поверхности для удобнѣйшаго изслѣдованія ихъ вида и свойствъ. Когда разсматриваютъ плоскую кривую, то проводятъ въ ея плоскости двѣ координатныя оси; одна изъ нихъ называется *осью абсциссъ*, а другая *осью ординатъ*, или, чаще, *осью x-въ* и *осью y-въ*. Кривыя двоякой кривизны и поверхности, относить къ тремъ координатнымъ осямъ. Одну на-

зываютъ *осью абсциссъ* или *x-въ*, другую *горизонтальнымъ ординатъ* или *y-въ*, а третью, *осью вертикальныхъ ординатъ* или *z-въ*. Чаще всего координатныя оси принимаются прямоугольными. См. **COORDONNÉES, ABSCISSE, ORDONNÉE**.

АХЕ DES ABSCISSES. Ось абсциссъ; ось, на которой считаются абсциссы. См. **ABSCISSE**.

АХЕ DES ORDONNÉES. Ось ординатъ; ось, параллельная ординатамъ. См. **ORDONNÉE**.

АХЕ RECTANGULAIRES. Прямоугольныя оси. Оси, пересѣкающіяся подъ прямымъ угломъ.

АХЕ OBLIQUANGLES. Косоугольныя оси.

Оси, пересѣкающіяся не подъ прямымъ угломъ.

АХЕ PRIMITIFS. Первоначальныя оси. Когда, при рѣшеніи какой либо задачи, вводятъ другія координатныя оси, то старыя оси въ отношеніи къ новымъ, называютъ *первоначальными*. Въ томъ же смыслѣ употребляютъ наименованіе *первоначальныхъ координатныхъ плоскостей*.

АХЕ D'UN SOLIDE. Ось тѣла.

АХЕ DIAMÉTRAL D'UN SOLIDE. Диаметральная, поперечная ось тѣла. Ось, проходящая чрезъ центръ тѣла.

АХЕ PRINCIPAL D'UN SOLIDE. Главная ось тѣла. Главная ось главнаго сѣченія тѣла. См. **SECTION PRINCIPALE**. Напримѣръ, главная ось эллипсоида, определяемаго уравненіемъ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, суть оси координатъ. — Иногда подъ

главною осью разумѣютъ опредѣленную часть ея направленія; такъ въ приведенномъ сѣчѣнн эллипсоида, линіи *2a*, *2b*, *2c* можно назвать главными осями.

АХЕ (Мех.) **ОСЬ**. Въ теоретической Механикѣ *осью* называется прямая линія, около которой тѣло дѣйствительно вращается, или только можетъ вращаться. Въ прикладной же Механикѣ подъ *осью*, *валомъ*, *веретѣномъ* (*axe, cylindre, arbre, essieu*), разумѣютъ прямую жердь, деревянную или металлическую, обыкновенно проходящую чрезъ центръ какого нибудь тѣла, и около которой происходитъ вращательное движеніе сего послѣдняго. Въ этомъ смыслѣ говоримъ: *ось маятника, колеса, плота* и проч.

L'АХЕ D'OSCILLATION D'UN PENDULE. Ось качанія въ отвѣсъ; прямая линія, параллель-

ная горизонталь, проходящая чрез точку, около которой она совершает свои качания.

AXES PRINCIPAUX или **AXES PRINCIPAUX**. Главными или постоянными осями. Так называются в Механике оси, около которых, при вращательном движении твердого тела, не подверженному никакому постороннему действию, центробежными силами всех частиц взаимно уничтожаются. См. **INERTIE (MOMENTS D')**.

AXES INSTANTANÉES DE ROTATION. Мгновенные оси вращений. Движение твердого тела в самом общем случае, составлено: 1) из поступательного движения, одинакового для всех его точек, и равного движению центра тяжести и 2) из вращения около оси, проходящей чрез сей центр, но, по положению своему, измещающейся в каждое мгновение, так, что тело обращается около этой оси только в продолжении времени бесконечно малого. Сего-то прямую и называют *мгновенною осью вращения*. — Если в твердом теле находится неподвижная точка, то движение его будет вращательное около оси, проходящей чрез неподвижную точку, и измещающейся в своем направлении. И эта прямая также называется мгновенною осью вращения, ибо она, действительно служит осью вращения только одно мгновение. Впрочем, когда тело свободно, то, собственно говоря, существует бесконечное число мгновенных осей; каждая из них, которая проходит чрез центр тяжести, и о которой мы упоминали выше, наиболее способна к определению вращательного движения.

Можно принимать, что движение твердого тела состоит из его вращения около оси, проходящей чрез произвольную точку, и поступательного движения, одинакового, как по скорости так и по направлению, для всех точек тела, и равного движению той точки, чрез которую ось проведена. См. **MOUVEMENTS (COMPOSITION DES)**. Сии два движения, поступательное и вращательное, совокупляются и не представляют никакого количественства одно другому. Каждое из них происходит отдельно, независимо друг от друга, и твердое тело в каждое мгновение принимает то положение, которое бы оно имело, если бы сии два движения происходили одно послѣ другого.

Вся мгновенная ось имеет одно и то же направление для определенного мгновения; но одна из них особенно примечательна: им называется ось, параллельная которой происходит вращательное движение. Принимая в соображение эту ось, мы весьма ясно представляемъ себѣ самое общее движение, какое можетъ имѣть твердое тело. Такое движение состоитъ изъ вращательнаго около некоторой оси, и движения поступательнаго или скользненія по той же оси. Если бы послѣднее прекратилось въ извѣстное мгновение, то *мгновенная ось вращения* приняла бы названіе *оси вращения* (*axe spontané de rotation*).

Однакоже замѣтимъ, что поступательное движение вообще не уничтожается, и следовательно, чаще всего, не будетъ внезапной осью, а будетъ только мгновенная ось, беспрестанно измѣняющаяся по своему положенію. Движение твердого тела будетъ состоять изъ вращения около перемѣняющейся прямой и поступательнаго перемѣняющагося движения около той же прямой. — Впрочемъ, чаще употребляютъ названіе внезапной оси вращения въ другомъ смыслѣ. Положимъ, что на твердое тело дѣйствуютъ какія нѣсть силы, и что дѣйствіе ихъ вдругъ прекращается; ось, около которой тело начнетъ вращаться въ первое мгновение послѣ прекращенія дѣйствія силъ, будетъ та, которую вообще называютъ *спонтанною осью вращения*. Для дальнѣйшихъ подробностей о семъ важномъ предметѣ, См. **ROTATION (MOUVEMENT DE)**.

AXE SPONTANÉ DE ROTATION. См. выше.

AXE D'UN COUPLE. Ось пары силъ. **AXE CENTRAL DES COUPLES**; центральная ось пары. Линія перпендикулярная къ плоскости равнодѣйствующей пары. См. **COUPLE**.

AXE DANS LE TAMBOUR, ESSIEU DANS LE TOUR (*axis in peritrochio*), или, употребительнѣе *tour, treuil, eam.* Одна изъ простыхъ машинъ. См. **TOUR, CABESTAN**.

AXE. (Астр.) **ОСЬ**. Прямая линія, проходящая чрезъ центръ тяжести земли или другихъ небесныхъ телъ, и около которой происходятъ ихъ вращательное движение.

AXE DE L'HORIZON, DE L'ÉQUATEUR. Ось горизонта, ось экватора. Прямая, проходящая чрезъ центръ каждого изъ сихъ круговъ, и перпендикулярная къ ихъ плоскости.

АХЕ D'UN CADRAN SOLAIRE. (Том.) Ось квадрата, ось солнечных часов. Протягивается на квадрант, указывающий часть для своей тени. См. CADRAN.

АХЕ (Опти.) **ОСЬ.** *Axe optique* или *axe visuel*; оптическая, зрительная ось. Лучъ проходящій чрезъ центръ глаза, и падающій перпендикулярно на глазъ.

АХЕ D'UNE LENTILLE. Ось оптического стекла. См. LENTILLE.

АХИФУЖЕ (Мех.) **ЦЕНТРОБЕЖНЫЙ** (собственно осебъежный). *Force aifuge*, центробежная сила; См. CENTRIFUGE, FORCE.

АКСИОМЕ. АКСИОМА, САМОНСТЕНА. Предложение само собою очевидное. Напримеръ: *двѣ точки, порознь равныя третьей, равны между собою; между двумя точками нельзя провести болѣе одной прямой линіи*, и проч.

Аксиома, при разсужденіи истины, есть то самое, что первоначально идетъ въ отношеніи къ

сложнымъ. Она есть такого рода истина, которую невозможно разложить на другія, простѣйшія, и самая вразумительная для насъ.

АХ

AZIMUT или **AZIMUTH.** (Астр.) **АЗИМУТЪ.**

Азимутъ есть уголъ, составляемый вертикальнымъ кругомъ свѣтла съ меридіаномъ мѣста наблюденія. — *Земнымъ азимутомъ* (*azimut terrestre*) какого либо предмета при мѣстѣ наблюденія, называется плоскій уголъ, заключающійся между полуденною линіею и лучемъ зрѣнія, направленнымъ на тошъ предметъ. Для опредѣленія азимутомъ употребляютъ угломерные инструменты, составленные изъ двухъ круговъ, одного горизонтальнаго, а другаго вертикальнаго. См. THEODOLITE.

AZIMUTAL. АЗИМУТАЛЬНЫЙ. Принадлежащій или относящійся къ азимуту. *Cadran azimuthal* или *analematicque*. *Аналемматическій квадрантъ.* См. CADRAN ANALEMMATIQUE.

В.

В.

В.

BABBAGE (MACHINE A CALCULER DE). БАББЕДЖЕВА СЧЕТНАЯ, ЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАШИНА. Въ слыхали объ удивительной счетной машинѣ, устроенной въ наше время Англійскимъ математикомъ *Баббеджемъ*; за недоспавшимъ свидѣній объ ея устроеніи, мы помстившимъ здѣсь въ переводѣ письмо Г-на Баббеджа къ Г-ну *Стассарту* (*de Stassart*), Президенту Брюссельской Королевской Академіи Наукъ, чипанное въ общемъ заведеніи 7 и 8 Мая 1835 года. Замѣтимъ, что Г. Баббеджъ говорилъ въ своемъ письмѣ объ *второй*, новой счетной своей машинѣ. Вотъ его слова:

„Я самъ удивляюсь могуществу (*puissance*) составленной мною машинѣ; за годъ передъ симъ, я не повѣрялъ бы возможности такого результата. Эта машинка можетъ производить дѣйствія надъ сѣмъ переменными (числами, которыя могутъ измѣняться); каждое число можетъ состоять изъ 25 цифръ. Если изобразить чрезъ v_1, v_2, \dots, v_n

какія угодно числа, гдѣ n менѣе сѣмъ, и предположимъ, что имѣемъ какую ни есть функцію $f(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$, которая составляется посредствомъ сложения, вычитанія, умноженія, дѣленія, извлеченія корней и возвышенія въ степени, то машинка опредѣлитъ численную величину этой функціи. Она произведетъ подстановкамъ сей величины на мѣсто v , или иной переменной, и вычислитъ новую функцію относительно v_1 . При пособіи этой машинки почти всѣ уравненія въ конечныхъ разностяхъ могутъ быть приведены въ таблицы. Положимъ, что посредствомъ наблюденій получили до тысячи величинъ a, b, c, d , и желаемъ вычислить ихъ по формулѣ *)

$$p = \sqrt{\frac{a+b}{cd}};$$

сперва приготавливаемъ машинку къ вычисленію этой формулы, и располагаютъ первый рядъ величинъ a, b, c, d ; потомъ машинка вычислитъ ихъ.

*) Это мѣсто намъ кажется невразумительнымъ.

нанециаются и уравнивать нулю; наконец, заставить колокольчик, и шить самым простым способом, что надобно расположить второй ряд восточных. Когда, между какими или есть числом последовательных коэффициентов ряда, существующее отношение, выражающееся, как сказано было выше, то машина вычисляет их, и определяет последовательно члены того ряда; после этого, можно будет расположить машину так, что она даст сумму ряда для каких угодно значений переменного количества.

Г. Баббедж, окончивая письмо, извещает, что он уже успел преодолеть самые большие трудности изобретения, и что чертежи машины будут окончаны через несколько месяцев. За недостатком дальнейших извещаний, им не знаем, в какой степени успех увенчал предначертания Г-на Баббеджа.

VACUUMÉTRIE. (Геом.) **ВАКУЛАМЕТРИЯ**; искусство измерять приспущенные и неприспущенные высоты и расстояния посредством воздуха.

VAGUETTES или **BATONS DE NEPER** (ossa Neperi). **НЕПЕРОВЫ ПАЛОЧКИ.** Арифметический прибор, изобретенный *Непером*, и посредством которого можно довольно скоро производить умножения и деления над большими числами.

Чертеж 6 (лист II) изображает прибор Неперовых палочек. Дощечки *a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k*, все одинаковые; они делаются из дерева, металла, картонной бумаги и. т. п. Каждая из них разделяется на девять квадратов, а каждый из сих последних, за исключением верхнего, подразделяется своею диагональю на два треугольника. В квадратах пишут числа, заключающиеся в обыкновенной таблице умножения так, чтобы единицы находились в треугольнике с правой стороны, а десятки в другом треугольнике. Сверх того, на пластинке единицы *a*, назначаются просто в середину квадратов числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а на пластинке *b*, пишется нуль с правой стороны.

Неперов прибор употребляется следующим образом: положим что желаем умножить 9769 на 7; располагаем палочки так, чтобы вершины числа изображали множимое, как показано на чертеже 7 (лист II). Потом рассмотрим горизонтальный ряд, соответствующий множи-

телю 7 в палочке *a*, и произведем над числами этого ряда следующие действия: начнем с правой стороны, и вынем сверху (8); потом, складывая пример 6 и 2, заключающийся в первом ромбе; сумму их (8) приписываем с левой стороны к (8) и получаем (88); далее, складываем числа 4 и 9 второго ромба, и от суммы их 18, выним (5) с левой стороны 88-х, а 1 удерживаем в машине, чтобы сложить ее с числами следующего ромба; таким образом выним (388), и продолжаем: $1+4+3=8$; приписываем (8) с левой стороны числа (388), и находим (8388). Наконец, прибавляем цифру (6), заключающуюся в последнем треугольнике, получаем для искомого произведения число 68388. Еслибы множитель заключал в себя более одной цифры, то следовало бы с каждою из них поступать точно так, как сейчас было показано, и потом сложить все частные произведения как в обыкновенном умножении.

Для деления, размещаем палочки так, чтобы вершины числа изображали делителя. С левой стороны, как и при умножении, ставим пластинку единицы *a*. Положим, например, что желаем разделить 6385 на 84; располагаем палочки, как показано на чертеже 8 (лист II). Потом, опускаем, ниже, который из горизонтальных рядов дает сумму, ближайшую к той части делимого, в которой должно искать, сколько раз заключается делитель. В настоящем случае эта часть = 638, потому что в 63 делитель 84 не заключается. Таким образом находим сумму 588, соответствующую цифре 7 в пластинке *a*; и так, выним с частного (7), потом вычитаем 5880 из 6385 и получаем 505; ближайшая к сему последнему числу сумма в горизонтальных рядах есть 504, соответствующая цифре (6); приписываем эту цифру к 7 с правой стороны, и получаем (76); вычитаем 504 из 505, и находим в остатке (1). Следовательно, частное, происходящее от деления 6385 на 84, будет 76, а остаток 1.

Заметьте, что при действиях над большими числами, должно иметь по несколько одинаковых палочек. Впрочем Неперов прибор, равно как и некоторые другие, более любопытны, нежели полезны на практике.

BAGUETTES LOGARITHMIQUES. Смол. LOGARITHMIQUES.

BAGUETTE DIVINATOIRE или **DIVINE** или еще **VERGE D'AARON.** ГАДАТЕЛЬНЫЙ, ВОДНЕННЫЙ ЖЕЗЪ. Такъ называется сучекъ, обыкновенно изъ орешника, перегнуемый въ дугу, который, по увѣренію шарлатановъ, имѣетъ свойство открывать своими движеніями подземные ключи, присущіе золоту, серебру, также юровъ, убійцъ и проч. Вращательное движеніе жезла, который держатъ около концевъ обѣихъ руками, легко объясняется, допуская почти неправоуныя движенія пальцевъ, производимыя мнѣніемъ гадальщика.

BAISEMENT. Уст. слово. (Геом.) **СОПРИКАСАНІЕ.** См. CONTACT, OSCULATION.

BAISER. (Геом.) не употр. **ОБХВАТЫВАТЬ, СОПРИКАСАТЬСЯ.** Когда двѣ кривыя линіи касаются одна другой, и бываютъ вогнутой въ одну и ту же сторону, то одна изъ нихъ будетъ *обхватывать* другую. Но ежели одна изъ сихъ кривыхъ обращена вогнутою стороною въ возвышенную сторону, а другая выпуклою въ ту же самую сторону, то кривыя будутъ просто *касаться* одна другой. Впрочемъ, вмѣсто слова *baisement*, преимущественно употребляютъ *osculation* (*соприкасание*). Смол. CONTACT.

BALANCE. (Мех.) **ВѢСЫ.** Машина, служащая для взвѣшиванія тѣлъ. Вѣсы относятся къ рычагу (Смол. LEVIER), и поэтому бываютъ различныхъ родовъ.

BALANCE ORDINAIRE. Обыкновенныя вѣсы состоятъ изъ *коромысла* (*fléau*) *AB* (чертежъ 9, листъ II), на оконечностяхъ котораго привѣшены чашки (*bassins*) *E* и *F*; въ одну изъ нихъ кладется взвѣшиваемое тѣло, а въ другую гирьки опредѣленнаго вѣса (развѣсы). Коромысло должно свободно обращаться около оси, проходящей сквозь *обоймичу* (*chasse*) *CD*; сверхъ того, стрѣлка *ab*, утвержденная перпендикулярно къ коромыслу на его серединѣ, показывается своимъ направлениемъ, будетъ ли коромысло горизонтально. Для вѣрности вѣсовъ необходимо, чтобы плечи, то есть части *CA* и *CB*, имѣли одинакій вѣсъ и длину, и чтобы коромысло по возможности свободно обращалось около своей оси *C*. Ко-

гда послѣднее условіе выполнено, то вѣсы называются *чувствительными* (*sensible*).

При взвѣшиваніи тѣлъ, слѣдуетъ прибавлять или отнимать развѣсовъ до тѣхъ поръ, пока стрѣлка *ab* не приметъ вертикальнаго положенія; когда достигли этого, то можемъ положиться на вѣрность взвѣшиванія, если вѣсы имѣютъ тѣ достоинства, о которыхъ мы говорили. Впрочемъ и посредствомъ невѣрныхъ вѣсовъ, когда невѣрность происходитъ только отъ несовершенства коромысла, можно опредѣлить истинный вѣсъ тѣла. Дѣйствительно, положимъ, что взвѣшивая тѣло *X* въ чашкѣ *E*, привѣсили его въ равновѣсіе грузомъ *P*; слѣдовательно, изобразимъ разстояніе *CA* чрезъ *p*, а *CB* чрезъ *q*, получимъ, по закону равновѣсія рычага,

$$pX = qP.$$

Переложимъ тѣло *X* въ чашку *F*, и приведемъ его въ равновѣсіе грузомъ *Q*, положившимъ въ чашку *E*, найдемъ

$$qX = pQ.$$

Перемноживъ сія двѣ уравненія между собою и раздѣливъ на *pq*, получимъ, по извлеченіи квадратнаго корня,

$$X = \sqrt{PQ}.$$

И такъ, истинный вѣсъ тѣла *X* есть средняе геометрическое между двумя найденными вѣсами. Напримеръ, если бы при первомъ взвѣшиваніи нашли 100 золотниковъ, а при второмъ 81 зол., то истинный вѣсъ тѣла былъ бы $\sqrt{100 \cdot 81} = 90$ зол.

Можно найти вѣсъ тѣла посредствомъ невѣрныхъ вѣсовъ еще проще: положимъ, что данное для взвѣшиванія тѣло *X*, привели какъ можно точнее въ равновѣсіе какою нибудь грузомъ *P*; вынимаемъ тѣло *X* изъ чашки, въ которую оно было положено, напримеръ изъ *F*, а на мѣсто его, въ ту же чашку *F*, кладемъ развѣсы до нѣхъ поръ, пока не приведемъ въ равновѣсіе груза *P*. Очевидно, что совокупность развѣсовъ покажетъ истинный вѣсъ взвѣшиваемаго тѣла *X*, отъ какой бы причины не происходила невѣрность вѣсовъ.

BALANCE ROMAINE или просто **LA ROMAINE.** Римскіе вѣсы, на которыхъ взвѣшиваются тѣла посредствомъ постояннаго груза, передвигаемаго по длинѣ коромысла. Они называются *Римскими*, потому что были въ большомъ употребленіи у Римлянъ.

Чертежъ 10 (листъ II) представлялъ Римскіе вѣсы. Они состоятъ изъ коромысла *AB*, об-

ращающегося около оси в обойнице CD , которую раздѣлится ея на два неравных плеча CA и CB . Къ короткому плечу CA привѣшивается чашка E или крюкъ для прицѣпленія взвѣшиваемого тѣла, а по длинному плечу CB ходитъ на кольцѣ постоянный грузъ P , уравновѣшивающій вѣсъ тѣла.

Для взвѣшивания тѣлъ посредствомъ Римскихъ вѣсовъ, слѣдуетъ раздѣлить надлежащимъ образомъ коромысло; на сей конецъ передвигающій постоянный грузъ P до тѣхъ норъ, пока весь приборъ не придетъ въ равновѣсіе, то есть, пока коромысло не приметъ горизонтальнаго положенія. Очевидно, что въ точкѣ, гдѣ будетъ тогда находиться подвижной грузъ, надобно означить нуль дѣленія, ибо въ этой точкѣ нѣтъ никакого тѣла въ чашкѣ. Пусть будетъ K эта точка. Положивъ теперь что въ чашку E , или къ крючку, привѣсивъ грузъ равный P , весьма естественно принимать сей послѣдній за единицу вѣса (напримѣръ, одинъ фунтъ); равновѣсіе нарушится, и для возобновленія его, надобно будетъ удалить подвижную гарю отъ точки опоры C ; для опредѣленія же степени сего удаленія, означимъ AC чрезъ p , и переносимъ вѣсъ P въ точку C ; отсюда произойдетъ пара Pp ; чтобы уничтожить ее, мы должны приложить, по другую сторону опорной точки C , пару силъ равную и противоположную, что должно быть выполнено однимъ только перенесеніемъ подвижнаго груза P . Для этого, передвинемъ подвижной грузъ P изъ K въ I такъ, чтобы $KI = p$; въ этой точкѣ I означимъ 1 дѣленія. Очевидно, что для получения другихъ точекъ дѣленія, надлежитъ означить 2 на разстояніи $2KI = 2p$ отъ K , или отъ нулевой точки для двойнаго вѣса $2p$; 3, на разстояніи $3p$, для тройнаго вѣса $3P$; и проч.

Дробныя части вѣса получаютъ точно такія образцы: вѣсъ $\frac{1}{2}P$ будетъ соотвѣтствовать разстоянію $\frac{1}{2}p$ отъ точки K ; $\frac{1}{3}P$, разстоянію $\frac{1}{3}p$ отъ той же точки, и такъ далѣе.

Ресон. Безменъ и Везенъ или Контарь. Вѣсы, въ которыхъ точка опоры измѣняетъ свое положеніе. Безменъ въ большомъ употребленіи въ Россіи, также въ Даніи и Швеціи, почему Французы и называютъ его *peson Danois*, *peson Suédois*.

Безменъ состоитъ изъ коромысла AB (черт. 11, листъ II); къ концу B прицѣплена масса M , а

въ A привѣшивается чашка E , или крюкъ, на которой надѣваются взвѣшиваемое тѣло; по длинѣ коромысла ходитъ кольцо, дѣлаемое изъ проволоки, струны или бичевки, которое держитъ на ручку CD , и двигается до тѣхъ норъ, пока безменъ не придетъ въ равновѣсіе, то есть, пока коромысло его не получитъ положенія горизонтальнаго. Точки или точки дѣленія на коромыслѣ безмена опредѣляются слѣдующимъ образомъ: приложивъ массу M , рычагъ AB и чашку E или крюкъ за одинъ вѣсъ P , сосредоточенный въ центръ тяжести G всего безмена; вѣснѣ центръ соотвѣтствующій о дѣленія; пусть будетъ Q вѣсъ тѣла, который долженъ опредѣлить, p разстояніе AC , кольца отъ точки A , а q разстояніе того же кольца отъ центра тяжести G безмена, то есть, длина CG . По условію равновѣсія рычага найдемъ

$$qP = pQ;$$

но если изобразимъ извѣстное разстояніе AG чрезъ a , то будетъ имѣть $p + q = a$; слѣдовательно получимъ

$$p = \frac{aP}{P+Q};$$

и такъ, по извѣстнымъ P и a , легко найти на коромыслѣ точки дѣленія, соотвѣтствующія разнымъ вѣсамъ, которые изображены у насъ буквою Q .

Хотя безменъ, по своему устройству, и довольно удобенъ, но, болѣе другаго рода вѣсовъ, подверженъ неувѣрности, и, при недобросовѣстности продавца, весьма способенъ служить орудіемъ обмана.

Есть много другихъ приборовъ для взвѣшивания; бесполезно приводить ихъ. Мы упомянемъ только объ *Робервальевыхъ вѣсахъ*, представляющихъ довольно примѣчательный случай.

BALANCE DE ROBEURVAL. Робервальевы вѣсы. Такъ называется изображенный Робервальемъ особеннаго рода рычагъ, на который уравновѣживаются два равные груза, хотя, по видимому, плечи рычаговъ, или соотвѣтствующихъ, не равны между собою. Чертежъ 12 (листъ II) изображаетъ эту машину. Извѣстнаго вида паралеллограммъ, составленный изъ четырехъ линейскъ AB , CD , AC , BD , обращается около неподвижныхъ осей въ точкахъ a и b стойки LK . Перпендикулярно къ линейкамъ AC и BD , въ точкахъ f и l

приравнены полоски fk и lm , различной длины. Къ концамъ k и m привѣсившимся грузы P и Q ; если эти два груза равны между собою, то, на Робертовскихъ вѣскахъ, они уравновѣшиваются, несмотря на то, что расстоянія ихъ отъ подпорныхъ точекъ a и b различны. Это самое, съ перваго взгляда, кажущееся противорѣчащее началу *равновѣсія на рычагѣ*; но если внимательно разсмотримъ условія равновѣсія на сей машинѣ, то увидимъ, что сей кажущійся парадоксъ объясняется весьма удовлетворительными образозъ.

Дѣйствительно, положимъ что въ точкѣ f , (черт. 15 листъ II), по направленію AC , приложены двѣ силы, равныя P , и противоположныя. Получимъ одну силу P , дѣйствующую по направленію fc и пару силъ $(P, -P)$, коей плечо равно fk . Но, по свойствамъ пары (См. COUPLE), $(P, -P)$ можно будетъ замѣнить другою парю $(P', -P')$, находящеюся въ плоскости параллелограмма $ABCD$, и приложенною къ точкамъ A и C такъ, что плечо ея равно длинѣ AC ; направленіе же силъ P' и $-P'$, можно будетъ предположить какими, какъ показано на чертѣжѣ. Пара $(P', -P')$, находясь въ плоскостъ положенія, очевидно уничтожившаяся неподвижносію точекъ a и b , къ которымъ направляются ея составляющія силы; и такъ, останется только одна сила P , приложенная къ точкѣ f по направленію fc ; точку приложенія этой силы можно перенести въ A .

Точно такія образозъ докажемъ, что силу Q , приложенную въ m , можно замѣнить тою же силою Q , но приленною въ B по направленію BD . И такъ останутся двѣ силы P и Q , приложенныя къ концамъ A и B рычага, косяго плечи aA и aB равны между собою; следовательно, если самыя силы P и Q равны, то онѣ будутъ находиться въ равновѣсіи. Для дальнѣйшихъ подробностей отсылаемъ читателей къ сочиненію: *Éléments de Statique par Poinsot* или къ Русскому переводу этой книги.

ВАЛАНСЪ ГИДРОСТАТИКЕ. Гидростатическія вѣсы. Вѣсы, устроенныя такъ, чтобы можно было взвѣшивать тѣла и въ водѣ. Для этого спускаютъ только въ нижней части одной чашки обыкновенныхъ вѣсовъ прѣдѣлатъ небольшой крючокъ; этимъ крючкомъ зацѣпляютъ, посредствомъ веревки или тонкой шелковой нити, тѣло, которое желаютъ взвѣсить въ водѣ. — Нѣкоторые фи-

зики называютъ гидростатическими вѣсами янструментъ, который преимущественно извѣстенъ подъ наименованіемъ *ареометра*. Смол. ARÉOMÈTRE.

Посредствомъ гидростатическихъ вѣсовъ определяютъ: 1) *объемъ твердаго тѣла*, 2) *плотность воды и другихъ жидкостей*, 3) *плотность твердаго тѣла* и 4) *количество составныхъ частей какой либо механической силы*.

Всѣ сія опредѣленія основаны на Архимедовомъ началѣ Гидростатики, въ сдѣланные котораго тѣла, погруженныя въ воду, теряютъ изъ своего вѣса, вѣсъ вытѣсненной воды.

Для опредѣленія объема твердаго тѣла, прицѣпляютъ сіе послѣднее къ крючку, и взвѣшиваютъ сперва въ воздухѣ (или, почите, въ пустотѣ), потомъ опускаютъ его въ сосудъ, наполненный водою; такъ какъ тѣло пошерпелъ изъ своего вѣса, вѣсъ вытѣсненной воды, то равновѣсіе нарушится; для возстановленія равновѣсія, надобно будетъ положить надламачій вѣсъ въ чашку, подъ которою приняемо тѣло. Этимъ прибавочный вѣсъ, выраженный посредствомъ вѣса кубическаго дюйма воды, покажетъ объемъ взвѣшиваемаго тѣла въ кубическихъ дюймахъ. Очевидно, что если объемъ тѣла будетъ извѣстенъ заблаговременно, то показаніе сей-часъ дѣйствіе послужитъ къ опредѣленію *плотности* воды. — Если вѣсто воды возмемъ другую жидкость, то такія же точно образозъ можемъ найти ея *плотность*.

Чтобы опредѣлить плотность твердаго тѣла, взвѣшивая его сперва въ воздухѣ, потомъ въ водѣ; такія образозъ получаютъ два различныя вѣса, и потомъ узнаютъ, сколько тѣло пошерпало въ водѣ изъ своего вѣса. Раздѣливъ найденный вѣсъ тѣла въ воздухѣ, на пошерпанный въ водѣ, получимъ относительный вѣсъ тѣла, или его *плотность*. Очевидно впрочемъ, что для употребленія сего способа, надобно чтобы тѣло было тяжелѣе воды, и припомъ, чтобы оно не разлагалось и не расплывалось въ водѣ. Если же тѣло будетъ легче воды, то, при его взвѣшиваніи въ водѣ, прибавляютъ къ нему другое тяжелое тѣло, котораго, какъ вѣсъ въ воздухѣ, такъ и пошерпелъ вѣса въ водѣ, предварительно опредѣлены. Вычтя изъ общей пошерпелъ въ водѣ пошерпелъ тяжелаго тѣла, и раздѣливъ на сію раз-

носить весь данного штиля в воздух, получить его плотность. Когда штиль растворяется в воде, то определяются сперва его плотности относительно такой жидкости, из которой оно не может растворяться; сверх того, предполагается, что плотность второй жидкости относительно воды известна. Перемножив между собою числа, выражающие сии две плотности, получим искомую плотность штиля, растворяющегося в воде.

Легко будет понять теоремы, какими образом определяются количества составных веществ в механической смеси; действительно, пусть будет S смесь, состоящая из веществ A и B . Изобразим чрез p весь смесь, чрез x весь вещества A , входящая в нее; $p-x$ будет весь вещества B . Предположим, что весь p смеси S теряет в воде c из своего веса; что весь p вещества A теряет a , и наконец весь p вещества B , теряет b . Для определения x последуем следующему образку: из предположенного легко заключим, что весь x вещества A теряет в воде из своего веса $\frac{ax}{p}$, ибо эта величина определяется четвертым членом пропорции $p:x :: \frac{ax}{p}$; точно таким образом увидим, что весь $p-x$ вещества B теряет в воде из своего веса $\frac{b(p-x)}{p}$. И так, смесь S потеряет в воде из своего веса $\frac{ax}{p} + \frac{b(p-x)}{p}$; но, непосредственным изысканием находим, что сие потеря равно c ; следовательно

$$\frac{ax}{p} + \frac{b(p-x)}{p} = c,$$

откуда

$$x = p \left(\frac{c-b}{a-b} \right) \text{ и } p-x = p \left(\frac{a-c}{a-b} \right).$$

По поводу сей задачи, мы должны упомянуть об одном случае, который приводит *Витрувий*. Он рассказывает, что Гieronъ, Царь Сиракузский заказал для себя золотую корону, и велел выдать на эту работу кусок чистого золота, определенного веса. Когда корона была готова, то нашли, что весь ее взвесь; однакоже подозревали еще художника в шельме, что он удержал часть золота, и подмешал серебра. *Архимеду* было поручено открыть подлог, не повредив отличную работу короля. Архимедъ предложил решение сего вопроса на томъ са-

момъ основаніи, на которомъ оно показано у насъ выше. *Витрувій* рассказываетъ, что Сиракузскій математикъ, находясь однажды въ купальнѣ, и думая о предложенной ему Гieronомъ задачѣ, замечъ ее решение, и такъ былъ обрадованъ снѣ открытіемъ, что прямо изъ купальни побѣжалъ по улицамъ города, громко восклицая: *эйрѣка, эйрѣка* (намель! намель!).

Чтобы сдѣлать приложеніе изъденныхъ выше формулъ, положимъ, что весь короны былъ 20 фунтовъ, и что, при изысканіи въ водѣ, она потеряла $1\frac{15}{17}$ фунт. Но, по описанію известно, что 20 фунт. золота теряютъ въ водѣ изъ своего веса $1\frac{1}{2}$ ф. а 20 ф. серебра, $1\frac{1}{2}$ ф. И такъ, въ состоящемъ случаѣ

$$p = 20, c = 1\frac{15}{17}, b = 1\frac{1}{2}, a = 1\frac{1}{2};$$

следовательно

$$x = 20 \left(\frac{1\frac{15}{17} - 1\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}} \right) = 13\frac{1}{2} \text{ фунт.}$$

$$p-x = 20 \left(\frac{1\frac{1}{2} - 1\frac{15}{17}}{1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}} \right) = 6\frac{1}{2} \text{ фунт.}$$

то есть, корона состояла изъ $13\frac{1}{2}$ ф. золота и $6\frac{1}{2}$ ф. серебра, такъ что золото и серебро входили въ смесь въ отношеніи двухъ къ единицѣ. Смол. ALLIAGE (RÈGLE D').

BALANCE ÉLECTRIQUE или BALANCE DE TORSION. Электрическіе вѣсы, крутильными вѣсы. Приборъ, изобрѣтенный *Кулономъ*, и преимущественно употребленный для измѣренія весьма малыхъ электрическихъ силъ притягательныхъ и отталкивающихъ. Электрическіе вѣсы вообще состоятъ изъ металлической нити, весьма тонкой, прикрепленной однимъ концомъ къ неподвижной точкѣ; другой конецъ привязывается къ центру тяжести тонкой спиральки, или италы, которая, при вертикальномъ положеніи нити, должна сохранять направленіе горизонтальное. Къ оконечностямъ спиральки приделываются два небольшие шарика, свинцовые, бузиновые и проч. смотря по тому, измѣряемъ ли мы обыкновенное или электрическое притяженіе. Изъ точки, гдѣ вертикальная металлическая нить встрѣчается горизонтальную плоскость, и подъ самою спиральною, описываемъ окружность, и раздѣляемъ ее на градусы. Очевидно, что при такомъ устройствѣ, легко будетъ читать на окружности число градусовъ, передеденныхъ шариками. Въ естественномъ состояніи металлической нити, спиралька

будетъ имѣть извѣстное равновѣсное положеніе; но если, посредствомъ какой либо силы, отклонить одинъ шарикъ отъ его первоначальнаго положенія, то онъ вѣнскрупушится, и большая или меньшая величина угла отклоненія будетъ зависеть отъ величины приложенной силы, действующей на шарикъ. Опыты Кулонба доказали, что сила крученія пропорціональна углу отклоненія смѣрзакъ отъ начальнаго ея положенія. И такъ, если принять прямой уголъ за единицу, и изобразить чрезъ λ силу крученія, соответствующую сему углу, то, для какого нъ есть угла θ , сила крученія выразится чрезъ $\lambda\theta$.

Приборъ Кулонба, употребленный физиками для доказательства законовъ электрическихъ притяженій, служилъ также для опредѣленія средней плотности земнаго шара. Для подробностей по сему двумъ предметамъ, отсылаемъ читателя къ *Журналу Политехнической Школы* и курсамъ Физики. Скажемъ только, что Ангійскій физикъ *Кавендишъ* (*Cavendish*), употребивъ шкото рода приборъ для опредѣленія средней плотности земнаго шара, нашелъ, что плотность его равна плотности воды, взятой пять разъ съ множеніемъ.

BALANCE. (Астр.) **ВѢСЫ.** Седьмой знакъ зодіака. Смол. ZODIAQUE.

BALANCE. (Комм.) **БАЛАНСЪ, СВОДЪ.**

BALANCEMENT. (Мех.) **КАЧАНІЕ, КОЛЕБАНІЕ.** Смол. OSCILLATION.

BALANCER то же что **CONTREBALANCER** (См.).

BALANCIER. (Мех.) **МАЯТНИКЪ, ОТВѢСЪ.** Такъ называется свислый снарядъ, коюго колебательное движеніе служилъ къ замедленію или къ уравненію движенія остальныхъ частей машины, къ коюрой онъ принадлежалъ. Смол. PENDULE.

BALISTE и **BALLISTE.** (Мех.) **БАЛИСТА** и **БАЛЛИСТА.** Военное орудіе, бывшее въ употребленіи у древнихъ, и посредствомъ коюраго бросали на значительныя разстоянія большія тяжести, какъ то: камни, куски раскаленнаго желѣза, тяжелыя копья и проч.

BALISTIQUE и **BALLISTIQUE.** (Мех.) **БАЛИСТИКА** и **БАЛЛИСТИКА** (отъ Греческ. *ballo*, бросая). Теоретическія и практическія изслѣдованія законовъ движенія брошенныхъ тѣлъ, преимущественно артиллерійскихъ снарядовъ.

Въ этой наукѣ мы предложимъ сперва нѣкоторыя историческія показанія о Баллистикѣ, потомъ изложимъ вкратцѣ аналитическое рѣшеніе баллистической задачи, и окончимъ краткимъ указаніемъ на результаты нѣкоторыхъ опытовъ, произведенныхъ надъ сопротивленіемъ воздуха и скоростію выходящихъ снарядовъ.

Первымъ, занимавшимся теоретическимъ изслѣдованіемъ о Баллистикѣ, былъ Италіанскій математикъ *Tartaglia* (*Tartaglia*); въ сочиненіи *Della nova Scientia*, изданномъ имъ въ 1537 году, онъ показываетъ ошибочность мнѣнія, общаго между тогдашними артиллеристами, будто бы нуть снаряда сослѣдуетъ изъ трехъ частей; онъ полагалъ, что при вылетѣ изъ орудія, снарядъ описываетъ прямую линію, потомъ кривую, и наконецъ упадетъ по вертикальному направленію. *Tartaglia* нашелъ, что всѣ траекторіи есть непрерывная кривая, и что углу возвышенія въ 45° , соответствуетъ наибольшая дальность полѣта. Впрочемъ, начла, на которыхъ онъ основывалъ свои выводы, были ошибочны. Испытанію теорію Баллистики наука одолжена знаменитому *Галлилею*, коюрый, принявъ за основаніе открытыя имъ законы паденія тяжелыхъ тѣлъ, доказалъ строгіемъ образомъ, что въ безвоздушномъ пространствѣ снарядъ описываетъ параболу. Послѣ *Галлилея*, *Торичелли*, *Мерсенъ*, *Колладо*, *Андерсонъ*, *Блонделъ* и нѣкоторые другіе производили многочисленныя опыты съ цѣлю приложить на самомъ дѣлѣ параболическую теорію къ движенію снарядовъ. На сей конецъ были составлены различныя таблицы, болѣе или менѣе удобныя. Но, около того самаго времени, первоначальные математикъ, разсматривая баллистическую задачу со стороны теоріи, убѣдились, что для точнаго ея рѣшенія, необходимо принимать въ расчетъ сопротивленіе воздуха. Нѣкоторые изъ нихъ, и между прочими *Иванъ Бернулли* (*Actes de Leipzig*, 1719), предложили аналитическія рѣшенія сего вопроса. Вслѣдствіи занимались имъ *Эйлеръ*, *Лаибертъ*, *Безу*, *Лагранжъ*, *Лемандръ* и другіе. На основаніи теоретическихъ изслѣдованій математиковъ, произвели многочисленныя опыты *Робинсъ* (*Robins new principles of gunnery*, 1742), *Арсенъ*, *Гумптонъ*, *Пронъ*, *Гробертъ* (*Grobert*) и другіе. Совокупность сихъ трудовъ представляла нѣтъ возможность составить таблицы, хотя еще не совершенныя,

по весьма достаточным по своей точности во многих случаях.

Перейдем теперь к аналитическому решению баллистической задачи. Рассмотрим сперва движение материальной точки, брошенной из O (черт. 14, лист II) по направлению OA в безвоздушном пространстве. Очевидно, что движущаяся точка не выйдет из вертикальной плоскости, проходящей через прямую OA ; приложим эту плоскость за координатную, и положим, что ось OX горизонтальная, а OY вертикальная, и направимся в противоположную сторону тяжести. Пусть будет M положение точки по истечении времени t , $OP = x$, $PM = y$; изобразим через g постоянную силу тяжести, через a начальную скорость движущейся точки, и через α угол, составляемый направлением сей скорости с осью OX . Уравнения движения будутъ [(Смол. CURVILIGNE (MOUVEMENT))]

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g;$$

интегрируя ихъ два раза и определяя постоянные величины, получимъ

$$(1) \quad x = a \cos \alpha \cdot t, \quad y = a \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2;$$

если изъ сихъ двухъ уравнений исключить время t , то найдемъ уравнение траекторіи

$$(2) \quad y = \tan \alpha \cdot x - \frac{g x^2}{2 a^2 \cos^2 \alpha}.$$

Итакъ, въ рассматриваемомъ нами случаѣ, кривая, описываемая точкою, будетъ *парабола*, имѣющая ось вертикальную, а вершину свою въ точкѣ B , гдѣ $\frac{dy}{dx} = 0$. Изъ формулъ (1) и (2) очень легко вывести слѣдующее:

1) *Высота полѣта* (*hauteur du jet*), то есть высота $CB = \frac{a^2}{2g} \sin^2 \alpha$.

2) *Дальность полѣта* (*amplitude du jet, portée*), то есть разстояніе $OD = \frac{a^2}{g} \sin 2\alpha$; чтобы сіе разстояніе, при определенной начальной скорости a , было наибольшее, сподобитъ только положить $\sin 2\alpha = 1$, откуда $\alpha = 45^\circ$.

3) Скорость v движущейся точки, выраженная въ функціи времени t , определяется формулою

$$v^2 = a^2 - 2ag \sin \alpha \cdot t + g^2 t^2,$$

которую легко получить, наблюдая что

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}.$$

4) Время T перехода движущейся точки изъ O въ D определяется уравненіемъ

$$T = \frac{2}{g} \cdot \sin \alpha.$$

5) Скорости при точкахъ K и L , находящихся на одной и той же горизонтальной линіи, разны между собою; и такъ, движущееся тѣло, достигнувъ точки D , будетъ имѣть начальную скорость a .

Замѣтимъ, что еслибы вмѣсто матеріальной точки разсматривали тѣло определенной величины, то приведенные нами законы должны бы были относиться къ движению его центра тяжести.

Изъ числа задачъ, представляющихся въ Баллистикѣ, предложимъ рѣшеніе слѣдующей: По данной начальной скорости a , найти углы возвышенія α , подѣ которыми снарядъ попадетъ въ в-предленную цѣль. Пусть будутъ k и l абсциссы и ординаты данной цѣли; принявъ $z = \tan \alpha$ за неизвѣстную, и подставлявъ въ уравн. (2) k и l на мѣсто x и y , найдемъ

$$z = \frac{2k}{a^2} \pm \frac{1}{a^2} \sqrt{4k^2 - 4kl - k^2},$$

гдѣ, для простоты, $h = \frac{g}{2a^2}$.

Дваючися значеніе величины z показываетъ, 1) что когда $4h^2 > 4kl + k^2$, то въ данную цѣль можно попасть подѣ двумя различными углами возвышенія орудія. 2) Когда $4h^2 = 4kl + k^2$, то существуетъ только одинъ уголъ возвышенія, удовлетворяющій условію; наконецъ 3) когда $4h^2 < 4kl + k^2$, то въ такомъ случаѣ задача не допускаетъ никакого рѣшенія.

Параболическая теорія весьма удовлетворительна по своей простотѣ, и она можетъ быть приложена къ движению снарядовъ въ воздухѣ, когда скорость ихъ не слишкомъ значительна, какъ, напримѣръ, при мѣшательномъ движеніи бомбъ. Но при большихъ скоростяхъ, сопровожденіе воздуха имѣетъ такое вліяніе, на абсолютныя движенія, что видъ траекторіи совершенно измѣняется. Въбѣдѣ въ иѣкоторыхъ подробностяхъ по предмету рѣшенія этой общей задачи.

Изъ начала сохраненія движенія центра тяжести (Смол. DYNAMIQUE) слѣдуетъ, что движеніе центра тяжести снаряда будетъ одинаково съ тѣмъ, которое бы имѣла тяжѣлая точка, получившая определенную по величинѣ и направле-

нию начальную скорость, и къ которой бы, сверхъ того, приложили параллельно самимъ себѣ силы, рождающіяся отъ сопротивленія и тренія воздуха, изъясняемого на поверхность движущагося снаряда. И такъ, удержавъ прежнія наименованія различныхъ буквъ, и изобразивъ чрезъ s дугу OM , (чертежъ 15 Листъ II), описываемую центромъ тяжести снаряда во время t , а чрезъ R движущую силу, происходящую отъ сопротивленія воздуха, общая баллистическая задача приведетъ къ опредѣленію обстоятельствъ движенія материальной точки, подверженной дѣйствию тяжести, и переменной силы R ; если, сверхъ того, предположимъ снарядъ сферическимъ и однороднымъ, или, по крайней мѣрѣ, состоящимъ изъ однородныхъ концентрическихъ слоевъ, то сила R будетъ всегда заключаться въ вертикальной плоскости, проходящей чрезъ направление начальной скорости, а следовательно вся траекторія будетъ также находиться въ этой самой плоскости, которую примемъ за координатную.

Для составленія уравненій движенія, разложимъ силу R , дѣйствующую по направлению касательной въ сторону MT , на двѣ составляющія, параллельныя координатнымъ осямъ. Косинусы угловъ, заключающихся между частію MT касательной и положительными полуосями OX , OY будутъ $-\frac{dx}{ds}$ и $-\frac{dy}{ds}$; следовательно, составляющія движущей силы R выразятся чрезъ $-R\frac{dx}{ds}$ и $-R\frac{dy}{ds}$; если, сверхъ того, изобразимъ чрезъ m массу снаряда, то получимъ слѣдующія уравненія:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -R \frac{dx}{ds}, & m \frac{d^2y}{dt^2} &= -mg - R \frac{dy}{ds} \\ \text{или} & & & \\ \frac{d^2x}{ds^2} &= -\frac{R}{m} \frac{dx}{ds}, & \frac{d^2y}{ds^2} &= -g - \frac{R}{m} \frac{dy}{ds}. \end{aligned}$$

Сообразно съ общепринятымъ предположеніемъ, сопротивленіе воздуха пропорціонально квадрату скорости центра тяжести снаряда, поверхности сего послѣдняго и плотности воздуха; Смот. *RÉSISTANCE DES FLUIDES*. Следовательно, изобразимъ чрезъ v и ω , скорость центра тяжести и поверхность снаряда, чрезъ ρ плотность воздуха, найдемъ

$$R = 2\rho\omega v^2,$$

разумѣя подъ λ постоянный коэффициентъ.

Когда примемъ снарядъ сферическимъ, то получимъ

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho, \quad \omega = \pi r^2;$$

следовательно

$$\frac{R}{m} = \frac{\mu\rho}{2Dr} v^2;$$

здесь μ изображаетъ постоянный коэффициентъ $\frac{1}{2}\lambda$, опредѣленный изъ опытовъ. И такъ, наблюдая что $v = \frac{ds}{dt}$, предыдущія уравненія движенія примутъ видъ

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} \frac{dx}{ds} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} \frac{dy}{ds} + g = 0 \end{cases}$$

въ которыхъ, для краткости, предположимъ $\frac{\mu\rho}{2Dr} = c$. Величину c мы будемъ принимать за постоянную, ибо плотность воздуха весьма мало измѣнится на всѣхъ протяженіяхъ кривой, описываемой снарядомъ.

Интегралъ перваго изъ уравн. (3) будетъ

$$(4) \quad \frac{dx}{dt} = a \cos \alpha e^{-cs}.$$

Для интегрированія втораго, полагаемъ $\frac{dy}{dt} = p \frac{dx}{dt}$, гдѣ p изображаетъ новую переменную. Подставляя эту величину во второе изъ уравн. (3), получимъ, въ слѣдствіе перваго изъ нихъ

$$\frac{dx}{dt} \frac{dp}{dt} = -g;$$

раздѣляя это послѣднее на квадратъ уравн. (4), найдемъ

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{g}{a^2 \cos^2 \alpha} e^{2cs}.$$

Если примемъ γ и μ за функціи переменной x , то будетъ

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{dp}{ds} \frac{ds}{dx},$$

и следовательно

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{2h \cos^2 \alpha} e^{2cs},$$

разумѣя, какъ и выше, подъ h величину $\frac{a^2}{2g}$. Для интегрированія сего уравненія замѣтимъ, что

$$dx \sqrt{1+p^2} = ds;$$

перемноживъ почленно послѣднія два уравненія, получимъ формулу

$$\sqrt{1+p^2} \cdot dp = -\frac{1}{2h \cos^2 \alpha} e^{2cs} ds,$$

каей интегралъ будетъ

$$(5) \quad p\sqrt{1+p^2} + \log(p + \sqrt{1+p^2}) = C - \frac{1}{2ch \cos^2 \alpha} e^{2cx},$$

гдѣ C изображаетъ постоянное количество, определенное изъ условия, что при $s = 0$, $p = \tan \alpha$; следовательно

$$C = \frac{1}{2ch \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} + \log(\tan \alpha + \sqrt{1 + \tan^2 \alpha})$$

Но изъ найденныхъ нами уравненій легко вывести $dx = -2h \cos^2 \alpha \cdot e^{-2cx} dp$, $dy = p dx$, $gd^2 = -dx dp$; чрезъ исключеніе же показательнаго выраженія e^{2cx} посредствомъ уравненія (5), найдемъ слѣдующія формулы:

$$(6) \quad \begin{cases} dx = \frac{dp}{p\sqrt{1+p^2} + \log(p + \sqrt{1+p^2}) - C} \\ dy = \frac{p dp}{p\sqrt{1+p^2} + \log(p + \sqrt{1+p^2}) - C} \\ \sqrt{cg} \cdot dl = - \frac{dp}{[C - p\sqrt{1+p^2} - \log(p + \sqrt{1+p^2})]^{\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

Выраженія сія не могутъ быть интегрированы въ конечномъ видѣ, но можно будетъ определить x и y въ функціи времени t , для каждаго частнаго значенія сего послѣдняго, употребляя на сей конецъ извѣстные приемы интегрированія по приближенію. Что касается до скорости v , то по причинѣ

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2},$$

получимъ

$$cv^2 = \frac{g(1+p^2)}{C - p\sqrt{1+p^2} - \log(p + \sqrt{1+p^2})}.$$

Выведенныя нами формулы заключаютъ въ себѣ рѣшеніе баллистической задачи въ томъ предположеніи, что сопротивленіе воздуха пропорціонально квадрату скорости; правда, многосложность численныхъ выкладокъ, преобладающихъ изложенною теоріею, а еще болѣе независимость точныхъ законовъ сопротивленія жидкостей, заставляютъ желать новыхъ усилій какъ отъ анализировъ, такъ и со стороны наблюдателей.

Мы не будемъ останавливаться на подробностяхъ приведеннаго рѣшенія; напомнимъ только нѣкоторые слѣдствія, происходящія изъ разбора выведенныхъ нами формулъ.

1) Траекторія $OMBDE$, состоящая изъ частей $BMON$ и BDE , мѣющихся каждая своею асимптотой: асимптотическая часть $BMON$ есть прямая KL ,

составляющая съ осью x уголъ β , обращающій въ нуль общій знаменатель формулы (6), и следовательно, удовлетворяющій уравненію

$$C - \tan \beta \sqrt{1 + \tan^2 \beta} - \log(\tan \beta + \sqrt{1 + \tan^2 \beta}) = 0.$$

Что касается до части BDE траекторіи, то направленіе болѣе и болѣе приближается къ вертикальному, по она вѣдетъ асимптотическую вертикальную линію LFG .

2) Дальность полѣта OD не равна, какъ въ параболической теоріи, удвоенной абсциссѣ OC , соответствующей высотѣ полѣта BC . Разнымъ образомъ, уголъ α , соответствующій наибольшей дальности полѣта, не будетъ равняться 45° , но углу менѣшему, зависящему отъ начальной скорости c .

При маломъ углѣ возвышенія орудія, формулы (6) могутъ быть легко интегрированы. Дѣйствительно, если положить уголъ α довольно малымъ, то снѣрядъ, при полѣтѣ своемъ, не достигнетъ значительной высоты, и следовательно p будетъ весьма малою величиною; опускаясь по этой причинѣ p^2 , получимъ приближительно

$$ds = dv, \quad s = x,$$

и слѣдовательно, выведенное выше точное уравненіе

$$\frac{dp}{ds} = - \frac{1}{2h \cos^2 \alpha} e^{2cx}$$

обращенна въ

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{1}{2h \cos^2 \alpha} e^{2cx};$$

интегрируя это уравненіе два раза сразу при условіи, что когда $x = 0$, то $y = 0$, а $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$, найдемъ

$$y = x \tan \alpha - \frac{1}{8c^2 h \cos^2 \alpha} (e^{2cx} - 2cx - 1).$$

Вотъ уравненіе искомой траекторіи; для опредѣленія времени въ функціи x , замѣчаемъ, что $gd^2 = -dx dp$, и въ слѣдствіе приведенной сей-часъ величины для $\frac{dp}{dx}$, получаемъ формулу

$$8 \frac{dx^2}{ds^2} = \frac{1}{2h \cos^2 \alpha} e^{2cx};$$

каей интегралъ будетъ

$$t = \frac{1}{c \sqrt{2gh \cdot \cos \alpha}} (e^{cx} - 1).$$

Если бы въ найденномъ уравненіи траекторіи разложили показательное количество e^{2cx} въ рядъ, и положили потомъ $c = 0$, то получили бы уравненіе параболы. Очевидно, что предположеніе $c = 0$, соответствующее ному случаю, когда не принимаемъ въ расчетъ сопротивленія воздуха.

Пределы нашего Лексикона не позволяют нам даже упомянуть про опыты, которые были производимы для усовершенствования Баллистики. Приводимъ здесь результаты некоторыхъ изъ нихъ единственно для того, чтобы дать нашимъ читателямъ notions о родѣ испытаний, относящихся къ этой наукѣ.

Гуттонъ, производившій опыты надъ сопротивленіемъ воздуха, нашелъ, что аэра сила, укорачивающая движеніе снаряда, не выражается со всею строгостію произведеніемъ lrv^2 , какъ мы предполагали выше. Относительно поверхности w опыты показали, что при скоростяхъ отъ 300 до 2000 футовъ въ секунду, сопротивление возрастаетъ нѣсколько болѣе, нежели поверхности, или что всё равно, чѣмъ квадраты диаметровъ, употребляемыхъ снарядовъ. Впрочемъ, разность отношенія сопротивленій и отношенія квадратовъ диаметровъ снарядовъ незначительна въ большей части случаевъ, что можно, безъ чувствительной погрѣшности, приниматьъ пропорціональнымъ поверхности.

При разныхъ поверхностяхъ, но при скоростяхъ различныхъ, *Гуттонъ* вывелъ посредствомъ многочисленныхъ опытовъ, что сопротивление не совсемъ пропорціонально квадрату скорости, какъ обыкновенно предполагается. При малыхъ скоростяхъ снаряда, эта пропорціональность почти справедлива, но при увеличеніи ихъ, самое сопротивление увеличивается быстрое, нежели квадраты скоростей. Наблюдатели, въ разные времена, предлагали эмпирическія формулы, въ которыхъ, вѣрно квадрата скорости, вводили для степени нѣсколько большую двухъ, или другія функции той же скорости.

Относительно скоростей ядеръ, опыты показали, что при равной длинѣ орудій, онѣ почти пропорціональны квадратнымъ корнямъ изъ вѣса пороха, употребляемаго на зарядъ. При одинаковыхъ зарядахъ и диаметрахъ ядеръ, скорости обратно пропорціональны квадратнымъ корнямъ изъ вѣсовъ сихъ самыхъ ядеръ, когда стрѣляютъ изъ одного и того же орудія. Хотя съ увеличеніемъ заряда скорости ядеръ и увеличиваются, однакоже только до нѣкотораго предела, что зависить отъ длины орудія. Замѣшимъ также, что болѣе или менѣе зазоръ имѣетъ еще болѣе вліяніе на начальную скорость снаряда:

чѣмъ больше будетъ зазоръ, тѣмъ болѣе потеря произойдетъ въ скорости ядра.

Въ разсужденіи дальности полета опыты показали, что онъ увеличивается гораздо медленнѣе, нежели начальная скорость, и почти какъ корни квадратные изъ сихъ послѣднихъ.

По предмету теоріи и практики Баллистики, мы посылаемъ читателей къ различнымъ разсужденіямъ *Мопертюи, Эйлера, Лагранжа, Пуассона* и проч., помещеннымъ въ разныхъ мѣстахъ, а также къ сочиненіямъ:

Bombardier français par Belidor.

Nouveaux principes d'Artillerie, avec des remarques d'Euler; traduit et publié en Français par M. Lombard 1785.

Voyage en Grande-Bretagne par Ch. Dupin.

Теорія и практика Морской Артиллеріи, соч. *Сиръ-Говарда-Дугласа*. Съ Англ. перев. на Франц. языкъ съ примѣчаніями *А. Ф. Е. Шарпантье*; Русскій переводъ съ Франц. напечатанъ въ 1830 году.

Теорія Баллистики, составленная Экстр. Профессоромъ Анкудовичемъ, Санктпетербургъ 1836.

BALLISTIQUE (PENDULE). БАЛЛИСТИЧЕСКІЙ

МАЛТНИКЪ, ОТВѢСЪ. Приборъ, употребляемый для опредѣленія скорости снарядовъ, вылетающихъ изъ орудій. Онъ состоитъ изъ толстаго куска дерева, копировъ, для увеличенія вѣса, оковываютъ желѣзомъ; весь приборъ свободно обращается около прочной желѣзной оси. Для дѣланія опытовъ, стрѣляютъ на весьма близкомъ разстояніи въ деревянную часть отвѣса: снарядъ, углубясь въ дерево, приведетъ малтникъ въ колебательное движеніе, и первая, то есть наибольшая дуга качанія, опредѣлится наблюденіемъ. Сверхъ того, такъ какъ размѣры, и всѣ, относящееся къ употребляемому баллистическому малтнику, а равно и вѣсъ снаряда извѣстны, то легко будетъ, по законамъ Механики, опредѣлить начальную скорость снаряда.

Изобрѣтеніе баллистическаго малтника (1742 года) принадлежитъ Англичанину *Робинсу*. Но онъ, при опытахъ своихъ, употреблялъ только ружейныя пули. Впослѣдствіи *Гуттонъ*, по порученію Лондонскаго Королевскаго Общества, производилъ въ Бульвартѣ опыты надъ снарядами большаго размѣра. Результаты сихъ трудовъ,

начатых въ 1776 году и продолжавшихся до 1786 года, помѣщены въ *Philosophical Transactions*, и въ книгѣ подъ заглавіемъ *Novvelles expériences d'Artillerie par Hulton*, Paris 1802, publié par Villantroy.

Для опредѣленія скорости снарядовъ были придуманы еще другія средства, между которыми укажемъ на остроумный способъ *Mammi*. Числалени найдутъ описаніе этого способа въ книгѣ: *Теорія Баллистики*, составленная *Анку-доиселли*.

BALLON, ВОЗДУШНЫЙ ШАРЪ. С. AEROSTAT.
BANQUE, БАНКЪ. — БАНКІРСТВО.

BARICENTRIQUE (CALCUL). БАРИЦЕНТРИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. Остроумный способъ приложения Анализа къ Геометріи, придуманный *Möbius* (Мёбиусъ), и доставившій уже изобрѣтателю нѣсколько любопытныхъ результатовъ, особенно въ отношеніи теоріи коническихъ сѣченій. Хотя этотъ способъ и основанъ на разсматриваніи центра тяжести, какъ самое его явленіе показываетъ, однако же начала его вовсе независимы отъ Механики, ибо центръ тяжести принимается въ немъ въ геометрическомъ значеніи, то есть, за точку *среднихъ разстояній*. См. CENTRE DES DISTANCES MOYENNES.

До открытія высшаго анализа не было еще общихъ способовъ для нахожденія криволинейныхъ площадей, поверхностей тѣлъ вращенія и ихъ объемовъ; поэтому, въ частныхъ случаяхъ, прибѣгали къ особымъ приѣмамъ, которые часто заимствованы изъ Механики. Такимъ образомъ произошли такъ называемый *Центробарическій способъ* (Смолт. CENTROBARIQUE), изобрѣтенный Нанпомъ *) и усовершенствованный впоследствии Іезуитомъ Гюльденомъ **). *Такжесть* (Taqet), и въ новѣйшія времена *Карно* (Carnot) и *Люилле* (L'huillier) также занимались сими предметами, и старались ввести въ Геометрію ученіе о центръ тяжести. — Мы постараемся въ слѣдующемъ краткомъ изложеніи дать хотя общее понятіе о Барическомъ Ичисленіи.

Представимъ себѣ двѣ точки *A* и *B*, на которыя дѣйствуютъ параллельныя между собою

силы, направлѣныя въ тяжести *a* и *b*. Центра тяжести *P* этой системы будемъ находить между *A* и *B*, если *a* и *b* дѣйствуютъ въ одну сторону, и сверхъ того $\frac{AP}{PB} = \frac{b}{a}$. Проведемъ чрезъ *A* и *B* двѣ произвольныя параллельныя линіи, и изобразимъ плоскость, проходящую чрезъ *P*, и пересѣкающую сіи двѣ линіи въ *A'* и *B'*; получимъ $\frac{AP}{PB} = \frac{A'A}{B'B}$ *) , и слѣдовательно, приложивъ *a* и *b* за отзѣченными члена, пропорціональными тажесть, дѣйствующимъ въ точкахъ *A* и *B*, найдемъ

$$aA'A + bB'B = 0.$$

Всякая другая плоскость, не проходящая чрезъ *P*, не будетъ имѣть свойства, выражаемаго этимъ уравненіемъ; дѣйствительно, положимъ что иная плоскость пересѣкаетъ двѣ вышеупомянутыя параллельныя линіи въ точкахъ *A''* и *B''*; проведемъ чрезъ *P* прямую, параллельную линіи *A''B''*, пересѣкающую параллельныя *A'A* и *B'B* въ точкахъ *A'* и *B'*, получимъ $aA'A + bB'B = 0$; съ другой стороны, если чрезъ *P*, параллельно *A'A* и *B'B*, проведемъ линію, пересѣкающую *A''B''* въ *P'*, то будетъ $A'A'' = B'B'' = PP'$, а слѣдовательно $aA'A'' + bB'B'' = (a+b)PP'$; сложивъ это уравненіе съ предыдущимъ, найдемъ $aA'A + bB'B = (a+b)PP'$.

Если *a* и *b* имѣютъ разные знаки, то центръ тяжести *P* будетъ находиться не между *A* и *B*, а на продолженіи линіи *AB* за точкою *A* или *B*, смотря по тому, которое изъ двухъ тѣселъ *a*, *b* будетъ больше. Проведемъ чрезъ *P* плоскость, пересѣкающую параллельныя *A'A* и *B'B*, мы будемъ имѣть, какъ выше, $aA'A + bB'B = 0$, гдѣ опять принимается въ соображеніе порядокъ буквъ; для всякой же другой плоскости, пересѣкающей сіи линіи, но не проходящей чрезъ *P*, будетъ $aA'A'' + bB'B'' = (a+b)PP'$. Если, въ послѣднемъ случаѣ, *a* и *b* равны между собою и имѣютъ противоположные знаки, то $a + b = 0$, и тогда казалось бы, что и $aA'A'' + bB'B'' = 0$; но это слѣдствіе очевидно не можетъ имѣть мѣста для всякой плоскости, по предположенію пересѣкающей параллельныя линіи *A'A*, *B'B*. И дѣйствительно, такъ какъ центръ тяжести *P*, въ настоящемъ случаѣ,

*) *Pappi Alexandrini math. collectiones*, въ концѣ предисловія къ 7-ой книгѣ смолт. изданіе 1588 г. (Ризани) и 1660 (Вопон.); также *Montucla*, Т. II, стр. 329, 330.

**) *De centro gravitatis* lib. II, III, IV.

*) Здѣсь надлежитъ замѣтить, что по знаменитому Г. Мёбиусу, противоположность назой линіи *AB* означается чрезъ *BA*, такъ что $AB + BA = 0$. И такъ, здѣсь нельзя было написать $\frac{AP}{PB} = \frac{A'A}{B'B}$ ибо отношеніе $\frac{AP}{PB}$ положительное, а $\frac{A'A}{B'B}$ отрицательное.

находится в бесконечном разстоянии от A и B , но и сама величина PP'' является бесконечною, если только не предположить, что текущая плоскость параллельна линии AB . Из этого усматривается, что произведение $(a+b)PP''$ обращается в $0 \times \infty$, или, что всё равно, в $\frac{0}{0}$. И так, в разсматриваемом нами случае, собственно выходить $aAA'' + bBB'' = \frac{0}{0}$, но если, величину неопределенной; и только в этом предположении, что PP'' не $= \infty$, имеем $aAA'' + bBB'' = 0$.

За сию аксиому предлагается себе следующую задачу: Три линии AA' , BB' , CC' , параллельны между собою, проводят чрез три данныя точки A , B , C или в самой плоскости ABC , или вне этой плоскости; требуется провести плоскості сии три параллельныя так, чтобы было $aAA' + bBB' + cCC' = 0$, где A' , B' , C' означают точки пересечения параллельных с плоскостію, а a , b , c три числа, находящіяся между собою в данномъ отношеніи.

Для рѣшенія этого вопроса, соединяемъ прямою линію двѣ точки изъ трехъ данныхъ точекъ, напримеръ A и B , и раздѣляемъ прямую AB въ P такъ, чтобы $\frac{BP}{PA} = \frac{a}{b}$, то есть, чтобы P былъ центромъ тяжести между A и B съ относительными коэффициентами a , b . Проводимъ попомъ PC , и раздѣляемъ эту линію въ точку Q такъ, чтобы $\frac{CQ}{QP} = \frac{a+b}{c}$; тогда Q будетъ центромъ тяжести между P и C съ относительными коэффициентами $a+b$ и c . Всякая плоскость, проходящая чрезъ Q , удовлетворитъ условію задачи. Для доказательства, проведемъ чрезъ P линію PP' , параллельную AA' , BB' и CC' . Положимъ, что кака-либо плоскость, проходящая чрезъ точку Q , пересѣкаетъ сии четыре параллельныя въ A' , B' , C' , P' ; найдемъ по предыдущему $aAA' + bBB' = (a+b)PP'$ и $(a+b)PP' + cCC' = 0$; следовательно $aAA' + bBB' + cCC' = 0$. Что касается до всякой другой плоскости, не проходящей чрезъ Q , то легко удостовѣриться, что она не удовлетворитъ требованію задачи; и въ самомъ дѣлѣ, пусть иная плоскость пересѣчетъ четыре параллельныя въ точкахъ A'' , B'' , C'' , P'' , а проходящую чрезъ Q плоскость параллельную, въ точкахъ A' , B' , C' , P' ; получимъ $aAA'' + bBB'' = (a+b)PP''$ и $(a+b)PP'' + cCC'' = (a+b+c)QQ'$, и следовательно

$aAA'' + bBB'' + cCC'' = (a+b+c)QQ'$, гдѣ величина $(a+b+c)QQ'$ не обращается въ нуль.

Продолжая точно такъ же образомъ, легко доказать слѣдующую общую теорему: Если дано известное число точекъ A , B , C , ..., N съ относительными коэффициентами a , b , ..., n , коихъ сумма не $= 0$, то всегда можно будетъ найти одну (но не болѣе) точку S такого свойства, что если чрезъ данныя точки и чрезъ S (центра тяжести системы) проведутся въ какомъ либо направленіи линіи, параллельныя между собою, и пересѣкающія въ точкахъ A' , B' , C' , ..., N' , S' произвольно взятой плоскости, то всегда будетъ $aAA' + bBB' + cCC' + \dots + nNN' = (a+b+c+\dots+n)SS'$; если же плоскость проходитъ чрезъ самую точку S , то $aAA' + bBB' + cCC' + \dots + nNN' = 0$.

Изъ сказаннаго нами о началахъ Баріцентрическаго Ичисленія видно, что дѣйствительно въ изслѣдованіяхъ Г. Мэбюса механическое понятіе о центръ тяжести вовсе усилано, и что, по смыслу сего ичисленія, можно эту точку, въ геометрическомъ значеніи, опредѣлить слѣдующимъ образомъ: Въ системѣ точекъ A , B , ..., N , съ относительными коэффициентами a , b , ..., n , центръ тяжести называется точка, чрезъ которую проходятъ всѣ плоскости, отсѣкающія отъ параллельныхъ, проведенныхъ чрезъ тѣ же точки A , B , ..., N , такія части AA' , BB' , ..., NN' , что сумма $aAA' + bBB' + \dots + nNN' = 0$.

Основныя формулы баріцентрическаго ичисленія. Всѣ формулы, относящіяся къ этому способу, могутъ быть подведены подъ три слѣдующія:

- I. $aA + bB + cC + dD + \dots = (a+b+c+d+\dots)S$
- II. $aA + bB + cC + \dots = fF + gG + \dots$
- III. $aA + bB + cC + \dots = 0$.

Уравненіе I выражаетъ, что S есть центръ тяжести точекъ A , B , C , D , ... съ относительными коэффициентами a , b , c , d , ...

Уравненіе II показываетъ, что точки A , B , C , ... съ коэффициентами a , b , c , ... имѣютъ тотъ же центръ тяжести какъ и точки F , G , ... съ коэффициентами f , g , ... предположая что суммы коэффициентовъ по ту и по другую сторону знака равенства равны между собою, то есть что $a+b+\dots=f+g+\dots$. Здѣсь впрочемъ надле-

жить замѣнили, что если бы суммы коэффиціентовъ двухъ системъ, имѣющихъ одинъ и тотъ же центръ тяжести, были не равны, то для возстановленія равенства и для изображенія посредствомъ уравненія шестидесяти центровъ тяжести, стоило бы только каждый коэффиціентъ одной системы, умножить на сумму коэффиціентовъ другой.

Наконецъ, уравненіе III, имѣющее мѣсто только въ томъ предположеніи, что сумма $a + b + c + \dots = 0$, выражаетъ, что система точекъ A, B, C, \dots съ коэффиціентами a, b, c, \dots не имѣетъ центра тяжести.

Къ сему уравненію можно примѣнить только слѣдующія два алгебраическія дѣйствія:

а) Равенство не нарушится, когда къ обѣимъ частямъ уравненія будутъ приложены, или вычтены изъ нихъ равныя величины, которые впрочемъ должны быть не числа, а точки или совокупности точекъ съ ихъ коэффиціентами.

б) Равными образомъ дозволяется съ обѣихъ сторонъ умножать и дѣлить на равныя величины; но въ такомъ случаѣ множитель или дѣлитель долженъ быть не точка, а число.

Оспается еще замѣнить, что для упрощенія выше приведенныхъ формулъ, Г. Мёбиусъ употребляетъ знакъ \equiv , когда требуется изобразить, что какая либо известная точка есть центръ тяжести данной системы, или что двѣ системы имѣютъ одинъ и тотъ же центръ тяжести, не принимая въ соображеніе равенства суммъ коэффиціентовъ по ту и по другую сторону знака равенства. И такъ вѣсто уравненія I, можно употребить формулу

$$aA + bB + cC + \dots \equiv S,$$

а вѣсто уравненія II, хотя бы и не было $a + b + c + \dots = f + g + \dots$, писать

$$aA + bB + cC + \dots \equiv fF + gG + \dots$$

Въ этомъ заключающаея аналитическая часть Барценцприческаго Ичисленія; для приложенія сего способа къ изслѣдованіямъ геометрическимъ, Г. Мёбиусъ показываетъ сперва какимъ образомъ барценцприческія выраженія служатъ условными уравненіями известныхъ свойствъ геометрическихъ фигуръ, а потомъ въ семи главахъ перваго отдѣла своей книги (Гл. 3—9) показываетъ приложеніе своего ичисленія къ началамъ Ана-

литической Геометріи. Второй отдѣлъ итѣтъ предметомъ такъ называемое *сродство фигуръ* и пропекающія оны этого сродства особаго рода геометрическія задачи; а третій, приложеніе Барценцприческаго Ичисленія къ нахожденію многихъ новыхъ свойствъ коническихъ сѣченій. Сія-то два отдѣла, въ особенностяхъ второй, показываютъ полуду Барценцприческаго способа. Ученіе Эйлера о сродствѣ кривыхъ линій (Introduct. in Anal. inf. Том. II Глав. XVII) предсѣдено здѣсь въ видѣ, болѣе общенъ.

Предѣлы нашего Лексикона не позволяютъ намъ входить въ дальнѣйшія подробности объ этомъ предметѣ. Желающіе ближе ознакомиться съ способомъ Г. Мёбиуса, могутъ изучить его въ изданной имъ книгѣ подъ заглавіемъ: *Der barycentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie, dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und die Entwicklung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte angewendet* von August Ferdinand Möbius, Prof. der Astronomie zu Leipzig. Mit vier Kupfertafeln. Leipzig bei Barth 1827 in 8°. Изъ которыхъ приложенія Барценцприческаго Ичисленія можно также найти въ Crelle's Journal B. V стр. 102, 397 въ статьяхъ Гг. Мёбиуса и Мандинга.

BARLONG. (Геом. и Арх.) ПРОДОЛГОВАТЫЙ ПРЯМОУГОЛЬНИКЪ, ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛОГРАММЪ. — *Nombres barlongs* или *antélongiores, продолговатыя числа*. Такъ называется произведеніе двухъ цѣлыхъ чиселъ, коихъ разность равна единицѣ. Таковы числа $1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 3 = 6$, $3 \cdot 4 = 12$ и п. п. Очевидно, что *продолговатое число* равно удвоенному *треугольному*.

BARLONGUE. (Разр. камн.) ПЕРЕКРЕСТНЫЙ СВОДЪ.

BAROMÈTRE. (Физ.) БАРОМЕТРЪ. Инструментъ показывающій давленіе въ определенной точкѣ атмосферы. Барометръ состоитъ изъ стеклянной трубки, длиною не менѣе 31 англійскаго дюйма, и имѣющей въ диаметръ около 3 линій; шрубка съ одного конца запаяна герметически, а съ другого, наполняютъ ее чистую ртутью, и, закрывъ отверстіе пальцемъ, опускаютъ ее; тогда ртуть въ шрубкѣ нѣсколько повышится,

я остановился, вообще, на высоте, мало раз-
 снующей отъ 30 дюймовъ, считая сію высоту
 отъ уровня ртути въ чашечкѣ. Изъ законовъ
 Гидростатики извѣстно, что сей столбецъ рту-
 ти будетъ уравновѣшивать столбецъ атмосфе-
 рнаго воздуха, производящій давленіе на свобод-
 ную поверхность ртути въ чашечкѣ; следова-
 тельно, по степени возвышенія или пониженія
 ртути въ трубкѣ, можно будетъ судить о сте-
 пени увеличенія или уменьшенія упругости ат-
 мосферы. Для точнѣйшаго наблюденія высоты
 столба ртути, помѣщаясь съ боку трубки
 шкалу, на которой назначены дюймы и линіи:
 часто къ сей шкалѣ прикладывается копѣй, для
 опредѣленія частой линіи. Нуль дѣленій очевид-
 но долженъ находиться при уровнѣ ртути; но
 такъ какъ сей уровень нѣсколько измѣняется съ
 высотой ртутнаго столба, то придуманы сред-
 ства для приведенія его къ нулю дѣленія. На
 сей конецъ употребляются или подвижныя шка-
 лы, или, посредствомъ винтика, поднимающіе и
 опускающіе чашечку, чрезъ что возмѣняется или
 становится самый уровень.

Для дальнѣйшихъ подробностей о Баромет-
 рѣхъ, описываетъ читатель къ всѣмъ курсамъ
 физики, въ которыхъ они найдутъ описанія раз-
 ныхъ устройствъ такого рода снарядовъ. Ска-
 жемъ только, что нашъ Академикъ *А. Кундбергъ*
 значительно усовершенствовалъ обыкновенный
 барометръ. Описание сего новаго барометра по-
 мѣщено въ *Annalen der Physik und Chemie von Poggen-
 dorf*, Bd. XXVI.

Открытие барометровъ собственно должно
 отнести къ 1644 году, когда знаменитый физикъ
Торричелли первый произвелъ опытъ, описанный
 нами въ началѣ этой статьи, и доказалъ тѣмъ
 самымъ высоту атмосферы воздуха.

BAROMETRIQUE (FORMULE). БАРОМЕТРИ- ЧЕСКАЯ ФОРМУЛА.

Самое примѣчательное
 употребленіе барометра безъ сомнѣнія состоитъ
 въ измѣреніи посредствомъ сего инструмента
 вертикальныхъ высотъ, какъ то горъ и проч.
 Практическая польза этого предмета побуждаетъ
 насъ привести здѣсь *барометрическую формулу*
 со всѣми подробностями принадлежащими къ ней.

Пусть будетъ *ABC* (черт. 16 Листъ II) за-
 нятая съ верхняго конца стеклянная трубка,
 въ которую, какъ сказано было въ предыдущей

статьѣ, называется ртуть. Положимъ, что въ
 большемъ колѣнѣ *AB* ртуть поднимается до вы-
 соты *i*, а въ меньшемъ до *l*, такъ что давленіе
 атмосфернаго воздуха въ томъ мѣстѣ, гдѣ про-
 изводитъ наблюденіе, измѣряется высотой рту-
 тнаго столба *ik*. Если изобразимъ чрезъ *g* силу
 тяжести, чрезъ *m* плотность ртути, а чрезъ
h высоту *ik*, то вѣсъ ртутнаго столба, нѣю-
 щаго основаніемъ единицу поверхности, а высо-
 тою *h*, выразится произведеніемъ *gmh*, которое
 будетъ также измѣрять давленіе атмосферы на
 единичную поверхность въ томъ мѣстѣ, гдѣ дѣ-
 лаютъ наблюденіе. Изобразивъ чрезъ *H* сіе по-
 слѣднее давленіе, найдемъ

$$gmh = H.$$

Величина *H* отъ различныхъ измѣненій, по-
 исходящихъ въ нашей атмосферѣ также измѣняет-
 ся, а следовательно, вѣзетъ съ нею и высота *h*
 ртути въ барометрѣ. По извѣстному какъ бу-
 детъ подниматься на высотахъ болѣе и болѣе зна-
 чительныхъ, давленіе атмосферы уменьшится и
 ртуть въ барометрѣ упадетъ. Если бы законъ,
 по которому измѣняется плотность воздуха
 въ послѣдовательныхъ его слояхъ былъ извѣс-
 тенъ, то легко бы было по разности высотъ
 ртутныхъ столбовъ при двухъ мѣстахъ наблю-
 денія, опредѣлить разность вертикальныхъ высотъ
 сихъ двухъ мѣстъ. Для вывода сего закона мы
 должны прибѣгнуть къ некоторымъ описаніямъ,
 открывающимъ зависимость плотности воздуха
 отъ давленія и температуры; въ статьѣ: *aëriiformes*
(fluides) мы видѣли, что изобразивъ чрезъ *p*
 упругость воздуха (или иного газа), чрезъ *ρ* его
 плотность, и чрезъ *θ* число градусовъ Цельсіуса
 или столбатурнаго термометра, будемъ
 (1) $p = aρ (1 + 0,00375 θ),$
 разунія подъ *a* отношеніе упругости къ плот-
 ности при 0°.

Основываясь на этомъ законѣ, выведенномъ изъ
 опытовъ, рассмотримъ какими образомъ можно
 найти барометрическую формулу. Такъ какъ,
 независимо отъ кредующаго отношенія, необхо-
 димо, для нашей цѣли, знать условіе равновѣсія
 атмосферы, то мы займемся сперва этимъ пред-
 метомъ, дабы читатель не имѣлъ надобности
 искать его изложеніе въ другомъ мѣстѣ.

Изобразивъ чрезъ *p* и *ρ* давленіе и плотность
 воздуха въ какой ни есть точкѣ земной атмос-

терм; чрезъ x, y, z координаты этой точки, а чрезъ X, Y, Z ускорительныя силы, приложенныя къ ней. По законамъ Гидростатики получимъ

$$dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Силы X, Y, Z суть составляющія тяжести, ибо всѣ другія силы, дѣйствующія на массу атмосферы, такъ незначительны когда сія послѣдняя находится въ равновѣсіи, что могутъ быть пренебрежены. Изобразивъ чрезъ g' тяжесть, и принявъ плоскость xy горизонтальною, а ось z вертикальною и направленною снизу вверхъ, очевидно получимъ $X = 0, Y = 0, Z = -g$; следовательно

$$dp = -\rho g' dz.$$

Это уравненіе показываешь, что величины p и ρ могутъ только зависеть отъ z ; но какъ сіи условия никогда не удовлетворяются для цѣлой массы нашей атмосферы, то ясно, что эта жидкость никогда не будетъ находиться въ состояніи равновѣсія; и такъ, предыдущее уравненіе, а также и выводимыя изъ него слѣдствія, будутъ справедливы только относительно нѣкоторой части атмосферы, находящейся въ покоѣ въ опредѣленное мгновеніе; мы поступили бы весьма ошибочно, еслибъ распространили слѣдствія выведенной формулы на значительныя пространства атмосферы; для этого надлежало бы знать, что разсматриваемая нами часть атмосферы дѣйствительно находится въ равновѣсіи, а это, безъ сомнѣнія, вовсе невозможно.

Раздѣливъ уравненіе $dp = -\rho g' dz$ на урав (1), получимъ

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g' dz}{a(1+\alpha z)},$$

гдѣ для краткости положили $\alpha = 0.00375$.

Для опредѣленія силы тяжести g' , изобразимъ чрезъ r радіусъ земнаго шара, а чрезъ g напряженіе этой самой силы при поверхности земли; въ слѣдствіе закона притяженія (См. ATTRACTION) получимъ пропорцію $g':g = \frac{r^2}{(r+z)^2} : \frac{r^2}{r^2}$, откуда $g' = \frac{r^2}{(r+z)^2}$; следовательно

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g'^2}{a(1+\alpha z)} \cdot \frac{dz}{(r+z)^2}.$$

Еслибы зависимость температуры θ отъ высоты z была известна, то изъ этого уравненія легко бы было опредѣлить величину p въ функціи z ; но опыты не указали еще удовлетвори-

тельными образомъ на видъ сей зависимости; известно только, что по мѣрѣ того какъ поднимаемся, температура θ уменьшается. Несмотря на независимость этого закона, мы можемъ рѣшить задачу съ надлежащею точностію; для сего, по известнымъ правиламъ Интегральнаго исчисления, и замѣнивъ что функція $a(1+\alpha\theta)$ удерживаетъ всегда одинъ и тотъ же знакъ, получимъ

$$\log\left(\frac{\omega}{p}\right) = \frac{gr}{a(1+\alpha\theta)} \cdot \frac{z}{r+z},$$

гдѣ ω изображаетъ среднюю изъ всѣхъ температуръ отъ поверхности земли до высоты z , а ω давленіе при поверхности земли.

Чтобы гиперболическій логарифмъ $\log\left(\frac{\omega}{p}\right)$ превести къ обыкновенному, то позволимъ предыдущее уравненіе на модуль, то есть на число 0.434295, которое для краткости изобразимъ чрезъ k . Получимъ

$$(2) \quad \text{Log}\left(\frac{\omega}{p}\right) = \frac{kgr}{a(1+\alpha\theta)} \cdot \frac{z}{r+z},$$

разумѣя подъ Log . обыкновенный логарифмъ. Что касается до θ' , то очевидно, что безъ чувствительной погрѣшности можно замѣнить эту величину среднею арифметическою между температурами, соотвѣствующими нижней и верхней точкѣ вертикальной высоты z .

Уравненія (1) и (2), опредѣляющія давленіе и плотность чрезъ вертикальную высоту z , суть именно тѣ, которыя нужны для нашей цѣли, и здѣсь собственно начинается способъ опредѣленія вертикальныхъ высотъ посредствомъ барометра.

Пусть будутъ h и h_1 высоты ртутни въ барометрѣ при первомъ и второмъ мѣстѣ наблюденія; T и T' соотвѣстственные температуры ртутни, которыя указались посредствомъ термометра, соприкосновеннаго съ барометромъ, а t и t' температуры воздуха, указанныя свободнымъ термометромъ. Всѣ ртутныя столбцы, при основаніи высоты z и при ея вершинѣ, будутъ соотвѣстственно выражаться произведеніями gmh и $g'm'h_1$, разумѣя подъ m' плотность ртутни при высотѣ z ; и такъ получимъ

$$\omega = gmh, p = g'm'h_1,$$

откуда

$$\frac{\omega}{p} = \frac{g}{g'} \cdot \frac{m}{m'} \cdot \frac{h}{h_1}.$$

Но мы видели выше что $\frac{h}{r} = \left(1 + \frac{z}{r}\right)^2$; и если, сверхъ того, примемъ въ соображеніе, что рипуть разширяется для каждаго градуса Цельсія термометра на $\frac{1}{5550}$ часть своего объёма, то найдемъ

$$m' = \left(1 + \frac{T-T'}{5550}\right)m, \text{ и следовательно}$$

$$\frac{\delta}{r} = \left(1 + \frac{z}{r}\right)^2 \cdot \frac{h}{\left(1 + \frac{T-T'}{5550}\right)h_1};$$

принимъ для краткости $\left(1 + \frac{T-T'}{5550}\right)h_1 = h'$, получимъ

$$\frac{\delta}{r} = \left(1 + \frac{z}{r}\right)^2 \cdot \frac{h}{h'}$$

$$\text{или } \text{Log} \left(\frac{\delta}{r}\right) = \text{Log} \left(\frac{h}{h'}\right) + 2 \text{Log} \left(1 + \frac{z}{r}\right),$$

гдѣ h' изображаетъ высоту рипуты при второмъ наблюденіи, исправленную отъ погрѣшности промѣщающей отъ измѣненія ея плоскости.

Совокупля последнее уравненіе съ уравн. (2), находимъ

$$(3) \text{Log} \left(\frac{h}{h'}\right) + 2 \text{Log} \left(1 + \frac{z}{r}\right) = \frac{kg}{a(1+\alpha\theta')}\frac{z}{r+z}.$$

Въ этой формулѣ, какъ замѣчено было выше, должно замѣнить величину θ' полусуммою температуръ двухъ мѣстъ наблюдающей, то есть выраженіемъ $\frac{1}{2}(t+t')$. Мы сказали также, что коэффициентъ $\alpha = 0,00375$; но, принимая въ расчётъ гигрометрическое состояніе воздуха, не худо увеличить нѣсколько этотъ коэффициентъ: дѣйствительно, опыты показали, что при обыкновенномъ давленіи атмосферы, плотность воды, превращенной въ пары, относится къ плотности воздуха, такъ какъ 10 къ 16; и такъ, чѣмъ больше паровъ въ воздухѣ, тѣмъ легче сей послѣдній; но известно: чѣмъ выше температура, тѣмъ болѣе и паровъ въ воздухѣ; следовательно, при высшей температурѣ весь воздухъ состоитъ уменьшающійся въ бѣльшемъ отношеніи, нежели увеличивается его объёмъ. По сей же причинѣ мы и увеличимъ коэффициентъ α , и примемъ его равнымъ 0,004; и такъ

$$\alpha\theta' = \frac{2(t+t')}{1000};$$

подставляя эту величину въ уравн. (3), найдемъ формулу

$$(4) z = \frac{r}{kg} \left(1 - \frac{2(t+t')}{1000}\right) \times \left[\text{Log} \left(\frac{h}{h'}\right) + 2 \text{Log} \left(1 + \frac{z}{r}\right)\right] \left(1 + \frac{z}{r}\right).$$

Самое верное средство для опредѣленія численнаго коэффициента $\frac{a}{kg}$, входящаго въ эту формулу, состоитъ въ употребленіи какой нибудь высоты z , съ точностію определенной помощію тригонометрическихъ измѣреній. На сей конецъ надобно водсавить въ предыдущую формулу сказанное значеніе z и величины h, h', t, t' , наблюденныя барометромъ и термометромъ при основаніи и вершинѣ высоты z , а вмѣсто r , средній радіусъ земли, то есть, величину 6366198 метровъ*). Очевидно, что такіе образцы опредѣленія значенія коэффициента $\frac{a}{kg}$. Рамонъ (Ramond), посредствомъ многочисленныхъ и весьма точныхъ наблюденій, произведенныхъ имъ въ Пиренейскихъ горахъ, нашелъ, что при широтѣ 45° (старого дѣленія) $\frac{a}{kg} = 18556$ метрамъ. По сей причинѣ этотъ коэффициентъ и называютъ часто *коэффициентомъ Рамона* (coefficient de Ramond). Съ измѣненіемъ широты мѣста наблюденія измѣняется сила тяжести g , а следовательно и коэффициентъ $\frac{a}{kg}$. При какой ли есть широтѣ ψ , найдется (Смол. GRAVITE),

$$\frac{a}{kg} = 18556^m \cdot (1 + 0,002837 \cdot \cos 2\psi).$$

И такъ, посредствомъ формулы (4) и величинъ для $\frac{a}{kg}$, опредѣленной послѣднимъ уравненіемъ, можно будетъ опредѣлять вертикальныя высоты при какихъ угодно широтахъ. Для сего, опираясь сперва во второй части формулы (4) дробь $\frac{r}{kg}$, которая вообще будетъ весьма мала; такимъ образомъ получимъ первая приближенная величина для z , которую изобразимъ чрезъ z' ; следовательно

$$z' = \frac{r}{kg} \left(1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right) \text{Log} \left(\frac{h}{h'}\right);$$

подставляя эту величину z' на мѣсто z во вторую же часть уравн. (4), получимъ значеніе z уже весьма близкое къ истинному. Продолжая такимъ образомъ приближеніе мы найдемъ значенія z болѣе и болѣе точныя; но, замѣтивъ, что всегда можно довольствоваться второю приближенною величиною z .

Когда высота, измѣряемая посредствомъ барометра, не слишкомъ значительна, то можно

*) Для приведенія метровъ въ Россійскія мѣры, замѣтимъ, что 1 метръ = 3,281 русскимъ или англійскимъ футамъ = 0,469 сажени

принять первую приближенную величину; но въ такомъ случаѣ, надобно увеличить нѣсколько коэффициентъ $\frac{a}{h^2}$. Рамонъ вывелъ изъ многихъ наблюденій, что эта новая величина $\frac{a}{h^2} = 18393$ метр-парисъ (около 60547½ рос. футовъ). И такъ

$$z = 18393 \cdot \left(1 + \frac{2(i+f)}{1000}\right) \text{Log} \left(\frac{h}{k}\right),$$

гдѣ коэффициентъ 18393 относится къ широтѣ 45°, а для другой широты φ долженъ быть умноженъ на $1 + 0,002837 \cdot \cos 2\varphi$, какъ было сказано выше. Последняя формула употребляется почти во всехъ случаяхъ.

Для объясненія вычисленій по приведеннымъ выше формуламъ, были составлены разныя таблицы, болѣе или менѣе удобныя; преимущественно отличающіяся передъ другими таблицы *Gau ss* и *Oltmanns* (*Oltmanns*). Члпателямъ найдутъ перья въ Русскомъ Энциклопедическомъ Лексиконѣ въ статьѣ *барометръ*, а вторымъ, въ *Annuaire du bureau des longitudes*.

Первая мысль объ употребленіи барометра для измѣренія высотъ, возникла безъ сомнѣнія послѣ извѣстнаго опыта, произведеннаго на горѣ *Пюи-де-Домъ* (*Puy de Dôme*) *Перьеромъ* (*Perier*), по указанію знаменитаго *Наскалла*. По мѣрѣ того какъ приближались къ ея вершинѣ, ртуть въ трубкѣ понижалась, откуда слѣдовало заключить, что вѣсъ атмосферы, уравновѣшивающій ртуть въ барометрѣ, уменьшается по мѣрѣ того, какъ поднимался на высоты болѣе и болѣе значительныя. Что касается до самаго способа измѣренія высотъ, то начала его принадлежать *Галлею* (См. *Transact'ons philosophiques* n° 181). Впослѣдствіи *Лапласъ* въ IV томѣ своей *Небесной Механики*, предложилъ общее рѣшеніе сей задачи, и вывелъ формулу, которая согласуется съ уравн. (4), когда въ сѣмъ последнемъ опуститъ вторымъ и высшимъ степени отношенія $\frac{z}{r}$.

BAROMÉTROGRAPHIE. (Физ.) БАРОМЕТРОГРАФЪ.

Барометръ устроенный такимъ образомъ, что высоты ртутни, соотвѣствующія извѣстнымъ промежуткамъ времени, напримѣръ каждому часу, сами собою отпечатаются. — Въ иныхъ случаяхъ, *барометрографы* назначаются только для указанія *наибольшей* и *наименьшей* высоты стоянія ртутни въ продолженіе цѣлыхъ сутокъ.

BAROSCOPE. Нѣкоторые физики употребляютъ слово *бароскопъ* въ смыслѣ *барометра*; нѣмѣ это

названіе совсѣмъ вышло изъ употребленія. См. *BAROMETRE*.

BARRE (Прикл. Мех.) **РЫЧАГЪ**. Железная палочка или деревянный брусъ, употребляемый для подниманія тѣлъ, или для сообщенія вращательнаго движенія какой либо машинѣ. (См. *LEVIER*).

BARREAU MAGNÉTIQUE. (Физ.) **МАГНЕТНЫЙ ПОЛОСЫ**. Нанеженныя железныя полосы.

BARILLET. (Прикл. Мех.) **БАРАБАНЪ**. Такъ называется въ пружинныхъ часахъ, мetailлическій, болѣею частію издѣанный пустой цилиндръ, въ которомъ заключается пружина, приводящая весь механизмъ въ движеніе.

BASCULE. (Прикл. Мех.) **ПОДЪЕМЪ, ОНЪГЪ**. Деревянный брусъ, обращающійся около оси, проходящей чрезъ его середину. Иногда онъ устриваютъ такъ, чтобы ось могла двигаться по длинѣ бруса; въ такомъ случаѣ ось послѣдній, сверхъ вращательнаго движенія, можетъ еще подыматься и понижаться. Часто на одномъ концѣ бревна придѣляется *перевѣсъ* (*counterpoids*), какъ напримѣръ въ русскихъ колодезяхъ, извѣстныхъ подъ названіемъ *опетовъ*.

PORT A BASCULE. Вертлящійся мостъ на горизонтальной оси.

BASE. (Геом.) **ОСНОВАНІЕ**. Вообще подъ сими словомъ разуютъ нижнюю часть объѣкта какой либо фигуры. Въ сѣмъ смыслѣ *основаніе* фигуры противоположно ея *вершинѣ*.

Впрочемъ можно принимать за *основаніе* и всякую сторону фигуры; напримѣръ, въ треугольникѣ, какую угодно изъ трехъ сторонъ. Въ прямоугольномъ треугольникѣ *гипотенуза* обыкновенно принимается за *основаніе*; въ равнобедренномъ же — *одна изъ сторонъ*.

BASE DE L'INTERVOLE, DE LA PARABOLE. Основаніе интервола, параболы, то есть, прямая пересѣченія сѣкущей плоскости съ плоскостію основанія конуса.

BASE D'UN SOLIDE. Основаніе тѣла. Площадь, на которой тѣло стоитъ, или сползаетъ можетъ. И такъ, говорятъ: *основаніе пирамиды, конуса, цилиндра, параболоида*, и проч. *Base d'un plan incliné.* *Основація наклонной плоскости*; то есть, ея проекція на горизонтальную плоскость.

BASE (Геоц.) **ОСНОВАНИЕ, БАЗИСЪ.** Расстояние, тщательно измеренное между двумя постоянными точками земной поверхности, съ целью определить, или взаимное положение другихъ точекъ, или величину земныхъ градусовъ. Смол. LEVÉE DES PLANS, FIGURE DE LA TERRE. — Измѣреніе основанія есть самое важное дѣйствіе въ Геодезіи, и отъ точности его преимущественно зависитъ вѣрность определяемыхъ разстояній между точками тригонометрической сѣтки. Сверхъ того надобно наблюдать, чтобы длина основанія была какъ можно болѣе значительна, и, по крайней мѣрѣ, въ соразмѣрности съ боками тѣхъ треугольниковъ, къ которымъ она принадлежитъ.

Основанія измѣряются посредствомъ линеекъ, дѣлемыхъ изъ дерева, желѣза, платины и проч. Обыкновенная ихъ длина бываетъ въ 6 саженъ, или, у насъ, въ 2 сажени. При измѣреніи основанія необходимо имѣть по крайней мѣрѣ два, а еще лучше большее число такихъ линеекъ; въ такомъ случаѣ, положивъ ихъ по направленію измѣряемой линіи въ соприкосновеніи одна съ другою, можно будетъ снимать каждый разъ заднюю, и переносить для приложенія къ передней. Для точности дѣйствія надлежитъ, или класть линейки въ совершенно горизонтальномъ направленіи, или, наблюдая каждый разъ уголъ наклона, вмѣсто длины линейки, принимать ея проекцію; сверхъ того, такъ какъ длина линейки зависитъ отъ вліянія температуры, то необходимо исправлять погрѣшность, происходящую отъ сей причины.

Мы не будемъ описывать базиснаго прибора, изобрѣшеннаго астрономомъ Борда; эпюсть приборъ, служившій Деламбру для измѣренія дуги меридіана между Дюнкеркеномъ и Монжуи, соединяясь въ себѣ всѣ условія, необходимыя для точности геодезическихъ измѣреній основаній. Читатели найдутъ обстоятельное описаніе сего инструмента въ книгахъ; *Traité de Géodésie par Puissant*, и *Геодезія А. Болотова*, 1836 года.

BASE. (Анал.) **ОСНОВАНИЕ.** *Base d'un système de logarithmes*, основаніе логарифмической системы. Въ Бригговой логарифмической системѣ основаніе = 10; въ Неперовой, оно определяется рядомъ $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots = 2,7182818\dots$, Смол. LOGARITHME. — Подъ словомъ base имно-

гда разумѣютъ то же, что и подъ словомъ *racine primitive* (разностаточное основаніе). Смол. RACINE PRIMITIVE.

BATONS или **BAGUETTES DE NEPEL.** НЕПЕЛОВЫ ПАЛОЧКИ. Смол. BAGUETTES.

BEAUNE (PROBLÈME DE). ЗАДАЧА ВОНА.

Французскій математикъ Флоримонъ Бонъ, жившій въ первой половинѣ 17-го столѣтія, предложилъ Декарту слѣдующую задачу: *найти такую кривую линію, чтобы ея ордината относилась къ подкасательной, такъ какъ данная постоянная линія, къ разности между ординатою и абсциссою.* Декартъ, посредствомъ своего анализа, не могъ рѣшить эту задачу во всей ея полнотѣ, но указалъ на строеніе кривой и на нѣкоторые свойства сей послѣдней. При пособіи же Интегральнаго Искисленія, уравненіе искомой кривой находится весьма просто; дѣйствительно, условіе задачи приводить непосредственно къ дифференціальному уравненію

$$adx - (y - x) dy = 0,$$

гдѣ a изображаетъ данную линію.

Интегрируя это уравненіе по обыкновеннымъ правиламъ, находимъ слѣдующее конечное уравненіе искомой кривой:

$$\frac{y}{a} = \log\left(\frac{e}{a+x-y}\right)$$

гдѣ c изображаетъ постояннаго произвольное количество.

Яковъ Бернулли предложилъ задачу Вона въ болѣе общемъ видѣ въ слѣдующихъ словахъ: *Дана какал ни есть кривая линія алгебраическая, трансцендентная, или даже напервонала наудачу: найти другую, которой подкасательная относилась бы къ ординатѣ, такъ какъ постоянная линія t къ суммѣ или разности этой самой ординаты и ординаты первоначальной кривой.*

Читатели найдутъ рѣшеніе этой задачи, отнюдь свѣдѣя къ Бернуллиеву уравненію въ *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral par Lacroix*, 2-ое изд. Том. III. стр. 449.

Задача Вона примѣтельна тѣмъ, что была поводомъ къ изобрѣненію обратнаго способа касательныхъ. Смол. TANGENTES (MÉTHODE INVERSE DES).

BÉLIER HYDRAULIQUE. (Прикл. Мех.) **ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ ТАРАНЪ.** Водоподъемная машина, изобретенная *Монгольфьером*, который извлек из открытій аэроstatsовъ. Описание этой оспроужной и полезной машины читателя найдутъ въ *Traité élémentaire des Machines* соч. *Nachette*. Въ томъ же сочинении описаны *сифонный таранъ* (*bélier-siphon*) и *всасывающий таранъ* (*bélier aspirateur*).

BÉLIER. (Астр.) **ОВЕНЪ.** Первый знакъ зодиака. Смол. ZODIAQUE.

BÉLIERS, ТАРАНЫ. Стѣвобитныя орудія древнихъ.

BÉNÉFICE. (Ист. Вѣр.) **ВЫГОДА.** Выгода, ожидаемая отъ какого либо событія, если прибыль или выигрышъ доспавляемый лицу эникъ событіемъ. Мѣрою выгоды въ Ичисленіи Вѣроятностей принимають произведение ожидаемой прибыли на вѣроятность того событія, отъ котораго прибыль зависить.

Положимъ, что ожидаемъ s событій; появленіе каждаго изъ нихъ доспавляетъ выигрышъ a , а неоявленіе, проигрышъ b . Спрашивается, какъ велика будетъ наша выгода? Изобразимъ чрезъ p вѣроятность появленія каждаго изъ событій, предполагаемыхъ равно вѣроятными, а чрезъ q противоположную вѣроятность, такъ что $p + q = 1$. Возвзявъ $p + q$ въ степень s , находимъ

$$(p + q)^s = p^s + s p^{s-1} q + \frac{s(s-1)}{1 \cdot 2} p^{s-2} q^2 + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots s}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots s} p^m q^n + \dots + q^s$$

гдѣ $m + n = s$.

Каждый членъ этого выраженія будетъ изображалъ вѣроятность появленія событія столько разъ, сколько единицъ въ показателѣ надъ p , а вѣроятность неоявленія будетъ означена показателемъ количества q . Выигрыши, соотвѣствующіе сими различными вѣроятностямъ, будутъ по порядку

$$s a, (s-1) a - b, (s-2) a - 2b, \dots (s-n) a - nb, \dots - sb$$

И такъ, исконая выгода будетъ

$$s a p^s + [(s-1) a - b] p^{s-1} q + \frac{s(s-1)}{1 \cdot 2} [(s-2) a - 2b] p^{s-2} q^2 + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots s}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots s} [(s-n) a - nb] p^{s-n} q^n + \dots - s b q^s = s (a p - b q) (p + q)^{s-1} = s (a p - b q).$$

По сей формулѣ весьма легко будетъ судить, въ каждомъ частномъ случаѣ, можно ли ожидать выгоды или невыгоды. Очевидно, что должно ожидать выгоды когда $a p > b q$, а невыгоды, если $b q > a p$.

Изъ всего сказаннаго можно заключить, что слово *выгода* употребляется въ одномъ значеніи съ реченіемъ *математическое ожиданіе* (*espérance mathématique*). Одно различіе, которое можно положить между *bénéfice* и *espérance mathématique*, заключается въ томъ, что первое изображаетъ дѣйствительную прибыль, то есть величину существенно *положительную*, когда *шансъ*, какъ второе можетъ означать и проигрышъ, и въ этомъ смыслѣ быть величиною *отрицательною*. Смол. AVANTAGE.

BERNOULLI (NOMBRES DE). (Анал.) **БЕРНУЛЛЕВЫЕ ЧИСЛА.** Численные коэффициенты при первой степени переменной x въ разложеніи интеграловъ $\sum x^2, \sum x^4, \sum x^6, \dots$ и вообще $\sum x^{2n}$. Сии коэффициенты всегда принимаются съ положительными знаками. — *Яковъ Бернулли* первый замѣтилъ эти числа (*Arts conjectandi* Basil. 1715. стр. 97.), почему они и названы его именемъ. — Бернуллиевы числа имѣютъ довольно важное значеніе въ математическомъ анализѣ, ибо весьма часто встрѣчаются въ теоріи рядовъ; многіе первоначальные математич. замѣчанія изслѣдованіемъ ихъ свойствъ. *Муавръ* (*Moirre*) показалъ примѣчательный законъ составленія Бернуллиевыхъ чиселъ. Если изобразимъ по порядку чрезъ

$$B_1, B_2, B_3, B_4, \dots, B_{2n-1}$$

первое, второе, третье, четвертое, ... n-ое Бернуллиевы числа, то имѣемъ слѣдующія формулы:

$$0 = 3B_1 - \frac{1}{2}$$

$$0 = 5B_2 - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} B_1 + \frac{1}{2}$$

$$0 = 7B_3 - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} B_2 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} B_1 - \frac{1}{2}$$

$$0 = 9B_4 - \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} B_3 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} B_2 - \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} B_1 + \frac{1}{2}$$

$$\dots \dots \dots$$

изъ которыхъ усматриваемъ, какими образомъ опредѣляется Бернуллиевы числа каковаго ни есть порядка посредствомъ чиселъ всѣхъ предшествующихъ порядковъ. *Эйлеръ* также не оставилъ этого предмета безъ вниманія. *Ланглетъ*, употребивъ удачный пріемъ въ разложеніи въ рядъ функцій $\frac{x^h}{e^x - 1}$, получая *общій членъ* Бернуллиевыхъ чиселъ. Вотъ сущность его анализа. Пусть будетъ:

$$\frac{x^h}{e^x - 1} = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \dots + A_n x^n + \dots$$

Все исследования о Бернуллиевых числах изложены подробно и описательно в книгах: *Supplément zu Georg Simon Klugel's Wörterbuch der reinen Mathematik*. Herausgegeben von Johann August Grunert; erste Abtheilung. Leipzig, 1833, и в *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral par Lacroix*. 2-ое изд. Том. III.

BERNOULLI (SÉRIE DE). (Анал.) **БЕРНУЛЛЕВЪ РЯДЪ.** Такъ называется рядъ, выведенный *Иваномъ Бернулли*, и имѣющий то же значеніе въ Интегральной исчисленіи, какъ Тайлорова стѣпка въ отношеніи Дифференціального.

Положимъ

$$f(x) dx = q(x);$$

если припишемъ переменной x приращеніе h , то получимъ

$$q(x+h) = q(x) + q'(x)h + q''(x)\frac{h^2}{1\cdot 2} + q'''(x)\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{и проч.}$$

Но очевидно

$$q'(x) = f(x), \quad q''(x) = f'(x), \quad q'''(x) = f''(x) \text{ и проч. следовательно}$$

$$q(x) = \int f(x) dx = q(x+h) - f(x)h - f'(x)\frac{h^2}{1\cdot 2} - f''(x)\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \text{и проч.}$$

Положимъ въ этомъ рядѣ $h = -x$, найдемъ

$$\int f(x) dx = q(0) + f(x)x - f'(x)\frac{x^2}{1\cdot 2} + f''(x)\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \text{и пр.}$$

гдѣ $q(0)$ изображаетъ постоянную произвольную величину.

Очевидно, что рядъ Бернуллиевъ только для цѣлой функціи $f(x)$ будетъ состоять изъ ограниченного числа членовъ; во всѣхъ другихъ случаяхъ онъ будетъ бесконечный, почему и не принесетъ никакой пользы какъ средство для точнаго интегрированія.

BERNOULLI (ÉQUATION DE). (Анал.) **БЕРНУЛЛЕВО УРАВНЕНІЕ.** Такъ называется дифференціальное уравненіе перваго порядка $dy + y f(x) dx = F(x) dx$, гдѣ $f(x)$ и $F(x)$ изображаютъ какія угодно функціи переменной x . Это самое уравненіе называютъ иногда *линейнымъ уравненіемъ перваго порядка* (*équation linéaire du premier ordre*). *Яковъ Бернулли*, котораго имя удержано приведенное уравненіе, поступилъ слѣдующимъ образомъ для его интегрированія: принявъ X за неопредѣленную функцію переменной x , и положивъ $y = Xz$, найдемъ $dy = z dx + X dz$, и следовательно $z dx + X dz + f(x) X dz = F(x) dx$.

По причинѣ неопредѣленности X , мы можемъ располагать этою функціею какъ, чтобы перемѣнныя величины отдѣлились въ предыдущемъ уравненіи, для чего сложимъ только положимъ

$$z dx + f(x) X dz = 0 \text{ откуда } X = e^{-\int f(x) dx}.$$

Для опредѣленія: получимъ формулу

$$X dz = F(x) dx;$$

следовательно

$$dz = e^{\int f(x) dx} F(x) dx$$

и

$$z = \int e^{\int f(x) dx} F(x) dx + C,$$

равняя подъ C постоянную произвольную величину.

И такъ, интегралъ Бернуллиева уравненія будетъ

$$y = e^{-\int f(x) dx} \left[\int e^{\int f(x) dx} F(x) dx + C \right].$$

Можно найти этою самый интегралъ безъ всякихъ подстановленій слѣдующимъ образомъ: раздѣливъ данное уравненіе на y , и интегрируя попомъ, найдемъ

$$\log y + \int f(x) dx = \int \frac{F(x) dx}{y}$$

но, по причинѣ $\int f(x) dx = \log e^{\int f(x) dx}$, получимъ

$$\log (y e^{\int f(x) dx}) = \int \frac{F(x) dx}{y},$$

чего дифференціалъ будетъ

$$\frac{d(y e^{\int f(x) dx})}{y e^{\int f(x) dx}} = \frac{F(x) dx}{y};$$

отсюда, чрезъ умноженіе дробей и интегрированіе получимъ ту же величину для y , какъ и выше.

Замѣнимъ что Бернуллиевъ уравненіе можетъ быть обращено въ полный дифференціалъ чрезъ умноженіе обѣихъ его частей на $e^{\int f(x) dx}$.

BEVAU, BIVEAU или BEUVEAU. Не упот. (Геом.) **ДВУГРАННЫЙ УГОЛЪ**; См. **ANGLE DIÈDRE**. — **УГЛОМѢРЪ**, инструментъ, употребляемый для измѣренія двугранныхъ угловъ.

BI

BIAISES (SURFACES). (Геом.) То же, что *surfaces sautes*, косыя поверхности. См. **GAUCHE**.

BI-ANGLE. (Геом.) **ДВУХЪ-УГОЛЬНИКЪ.** Неопредѣленное пространство, заключающееся между двумя параллельными линіями и прямою, перпендикулярною къ нимъ. Таково пространство aBb черт. 17 (листъ II).

BIANGULAIRE. ДВУХЪ-УГОЛЬНЫЙ. Nombres biangulaires, двух-угольные числа. Такъ называются иногда натуральныя числа 1, 2, 5, 4...., когда приписывать ихъ къ многоугольнику. Действительно, если въ общемъ выраженіи $\frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2}$ m -угольного числа положимъ $m=2$, то надемъ просто n , изображающее бока двухъ-угольного числа. Смол. POLYGONES (NOMBRES).

BI-CARRÉ или VICARRÉ. (Арм. и Алг.) **ВИКВАДРАТЪ**, четверная степень какого нибудь количества рациональнаго. См. BIQUADRATIQUE.

BI-CONCAVE. ДВОЙКО-ВОГНУТЫЙ. { См. LEN
BI-CONVEXE. ДВОЙКО-ВЫПУКЛЫЙ. { TULIE.

BIFIDES (DIVISEURS QUADRATIQUES) или просто **DIVISEURS BIFIDES.** (Теор. Чис.) **ДВОИЧНЫЕ КВАДРАТИЧЕСКИЕ ДѢЛИТЕЛИ**, или просто **ДВОИЧНЫЕ ДѢЛИТЕЛИ.** Такъ называлъ Лежандръ выраженія второй степени слѣдующихъ трехъ видовъ: 1) $px^2 + qy^2$, 2) $px^2 + 2qxy + 2qy^2$, и 3) $px^2 + 2qxy + py^2$. О свойствахъ двоичныхъ дѣлителей смол. книгу: Legendre, Théorie des Nombres. Смол. также FORME.

BILLION или MILLARD. (Ариф.) **БИЛЛИОНЪ**. Такъ называютъ Французы цѣну, занимающую съ лѣвой стороны *десять тысячъ*. И такъ, 2000000000 изображаетъ у нихъ *два билліона*. У Германцевъ же *билліонъ* называется цѣна, стоящая на *тринадцатомъ мѣстѣ*. У насъ, по большей части, какъ у Германцевъ, считаящихъ на десятичной хлѣбѣ *тысячи милліоновъ*. Въ финансовыхъ расчетахъ Французы, вѣдомо *billion*, употребляютъ слово *millard*.

BIMÉDIAL. (Геом.) **БИМЕДИАЛЬНЫЙ, СОНЗМѢРИМЫЙ ВЪ СТЕПЕНИ.** Когда двѣ прямыя A и B будутъ соизмѣримы только въ степени, то сумма сихъ линій $A+B$ будетъ несоизмѣрима съ каждою изъ нихъ порознь. Линію $A+B$, въ такомъ случаѣ, древніе геометры называли *первою бимедіальною линіею* (ligne première bimédiale.)

Двѣ прямыя соизмѣримы въ степени, когда ихъ квадраты содержатся между собой, какъ цѣлое число къ другому, цѣлому же числу. Таковы напримѣръ ипогенуза и касетъ въ равнобедренномъ прямоугольномъ треугольнике. Смол. Еванда книгу X, предлж. 58 и слѣдующія.

BINAIRE (ARITHMÉTIQUE). ДИАДИЧЕСКАЯ, ДВОЙНИЧНАЯ, ДВУЦИФРЕННАЯ, ДВУЗНАЧНАЯ АРИМЕТИКА. Ариметическая

система, въ коей употребляются только два знака: 0 и 1. Основаніемъ диадической ариметики служить геометрическая прогрессія

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 и проч.

Такъ что 1 на второмъ мѣстѣ (считая отъ правой руки къ лѣвой) изображаетъ *два*; на третьемъ, *четыре*; на четвертомъ, *восемь*, и такъ далѣе. Въ слѣдствіе сего условія, единица изображается чрезъ 1; *два*, чрезъ 10; *три*, чрезъ 11; *четыре*, чрезъ 100; *пять*, чрезъ 101; *шесть*, чрезъ 110; *семь*, чрезъ 111; *восемь*, чрезъ 1000; *девятъ*, чрезъ 1001; *десять*, чрезъ 1010; *одиннадцать*, чрезъ 1011, и такъ далѣе.

Подобная система неудобна по причинѣ значительнаго числа цифръ, требуемыхъ ею для изображенія чиселъ посредственною величинъ. Напримѣръ, число *девяностъ тридцать* (230), выписано *тремя* цифрами, требовало бы *восемью* цифрами; и дѣйствительно, по диадической системѣ, оно выражается слѣдующимъ образомъ. 11100110.

Что касается до перехода отъ десятичной системы къ диадической, и на оборотъ, то этотъ вопросъ рѣшается весьма простымъ образомъ. Положимъ, напримѣръ, что желаемъ выразить число 13 (тринадцать) по диадической системѣ: дѣлимъ 13 на 2, получаемъ частное 6 и остатокъ (1). Этотъ остатокъ будемъ *первою искоюю цифрою* съ правой стороны. Пономъ, найденное частное 6 дѣлимъ опять на 2, получаемъ новое частное 3 и остатокъ (0), который изобразимъ второю цифру, считая по прежнему съ правой стороны къ лѣвой. Раздѣляя 3 на 2, находимъ частное 1 и остатокъ (1). Далѣе дѣленіе невозможно, и частное (1) должно приниматься за остатокъ, который пишется на послѣднемъ мѣстѣ. И такъ, *тринадцать* изображена по диадической системѣ слѣдующими знаками: 1101.

Для перехода отъ диадической системы къ десятичной, сплотивъ только сослѣдствіе таблицы послѣдовательныхъ степеней числа 2. Помогъ, чрезъ простое сложеніе, получимъ искоемое число. Напримѣръ, чтобы найти значеніе диадическаго числа 1101 по десятичной системѣ, пишешь, начиная отъ правой руки къ лѣвой,

$$\text{по диадической} \left\{ \begin{array}{l} 1 = 1^1 = 1 \\ 0 = 0^0 = 0 \\ 1 = 2^1 = 2 \\ 1 = 2^2 = 4 \\ 1 = 2^3 = 8 \end{array} \right. \text{по десятичной.}$$

Сумма 15 по десятичной.

Доказательство приведенных двоякий шакъ просто, что мы считаемъ надписи приводить его.

Мысль о *диадической Арифметикѣ* принадлежала *Лейбницу*, который сообщалъ ее въ 1702 году; онъ полагалъ, что при трудныхъ изслѣдованіяхъ въ теоріи чиселъ, она можетъ имѣть большія преимущества предъ *десятичною*. Изумивъ *Буве* (*Bouvet*), миссіонеръ въ Китаѣ, которому *Лейбницъ* писалъ о своей *диадической Арифметикѣ*, сообщилъ ему послѣднему, что загадочная надпись, существующая въ Китаѣ болѣе 4000 лѣтъ, по его убѣжденію, объясняется двойчною системою. Эта надпись, сдѣланная Императоромъ *Фон* (*Fhi*), основателемъ Китайской Имперіи, а вѣдѣніи и наукъ въ Китаѣ, была вѣроятно вразумительна въ теченіи многихъ столѣтій; но въ послѣдствіи смыслъ ея утратился, и никакія спаранія ноздѣвшихъ ученыхъ въ Китаѣ, пылавшихся разгадать значеніе сихъ писемъ, не имѣли успѣха. Вотъ эта надпись:

— — — — —

Если приять, слѣдуя миссіонеру *Буве*, споминую черту — за *единицу*, а ломаную — за *нуль*, то очевидно, что знаки приведенной надписи будутъ по порядку изображать числа

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

BINAIRE (FORME). (Теор. чис.) **ДВОИЧНЫЙ ВИДЪ.** Такъ называется *Гауссъ* алгебраическую однородную функцію какой нѣ есть степени съ двумя неопредѣленными величинами, въ которой всѣ коэффициенты суть цѣлыя числа. И такъ, $ax^2 + 2bxy + cy^2$, есть *двоичный видъ второй степени*. Когда однородная функція заключаетъ въ себѣ при неопредѣленныхъ величинахъ, также съ коэффициентами цѣлыми, то она принимается названіе *третичнаго вида* (*form. trinque*). Такова на примѣръ функція второй степени

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2.$$

Въ томъ же смыслѣ должно разумѣть названія *quaternaire* (*кватернирный*), *quinnaire* (*квинтанный*) и проч. Замѣтимъ, что доселѣ математикѣ большіе частію ограничивались изслѣдованіемъ ви-

довъ *второй степени*. Смот. FORMES (THÉORIE DES).

Expr. sion binaire, двоичное выраженіе. Такъ называли нѣкоторые математикѣ, между прочими *Дйлеръ*, выраженіе 2^n . — *Nombre b'naire, двоичное число; два* (2), число состоящее изъ двухъ единицъ.

BINOME. (Алг.) Отъ Греческаго *βίς, два* раза и *νόμι, часть*. **ДВУЧЛЕННОЕ КОЛИЧЕСТВО, БИНОМІА, БИНОМЪ, ДВУЧЛЕНЪ.** Выраженіе состоящее изъ двухъ членовъ, которые соединены между собою знаками $+$ или $-$. И такъ $a + b$, $3x^2 - 7$ суть *двучленные количества*.

Трехъ-членнымъ количествомъ или *трехъ-членомъ* (*trinome*) именуется выраженіе изъ трехъ членовъ состоящее, каково на примѣръ $a + b + c$. Вообще *многочленнымъ выраженіемъ, полиноміей, полиноміемъ, или многочленомъ* (*polinome, multinome*), называется количество изъ многихъ членовъ составленное.

Евклидъ, разсматривавшій теорію биноміи съ геометрической спорны, употребляетъ различныя названія которыя нынѣ оставлены. Онъ называлъ *первою биноміею* (*binome premier*) линію, состоящую изъ двухъ частей, изъ коихъ одна рациональная, а другая, меньшая, иррациональная; сверхъ того, эти части должны быть плаковы, чтобы разность ихъ квадратовъ равнялась точному квадрату. И такъ, выраженіе $8 + \sqrt{15}$ есть *биноміа перая*, ибо $\sqrt{15} < 8$ и $8^2 - (\sqrt{15})^2 = 49 = 7^2$. Подъ *второю биноміею* онъ разумѣлъ сумму двухъ линій, изъ коихъ меньшая, рациональная, а большая, иррациональная; сверхъ того, отношеніе корня квадратнаго изъ разности квадратовъ двухъ частей къ иррациональной частн, должно быть рациональное. Напримѣръ, выраженіе $10 + \sqrt{180}$ есть *биноміа вторая*, ибо $\sqrt{180} > 10$, а $\frac{\sqrt{(\sqrt{180})^2 - 10^2}}{\sqrt{180}} = \frac{180}{\sqrt{180}} =$ рациональному числу $\frac{1}{2}$. Мы не будемъ долѣ останавливаться на сихъ раздѣленіяхъ, совершенно безполезныхъ; скажемъ только, что между *биноміями* и *тономіями* полагаемъ только то различіе, что въ первыхъ, двѣ линіи складывались, а во вторыхъ, одна вычиталась изъ другой. Смот. АПОТОМЕ.

BINOME DE NEWTON. (Алг.) **НЮТОНОВА БИНОМІА, НЮТОНОВЪ БИНОМЪ, ДВУЧЛЕНЪ.**

Известная въ Алгебрѣ формула, посредствомъ которой двучленные количества возмущаются въ различные степени. Примемъ за основаніе двучленное количество $a + b$, а за степень какое ни есть число m , формула, о которой говоримъ, будетъ следующая:

$$(A) (a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3}b^3 + \dots$$

Эта формула, найденная Ньютономъ, доселѣ сохранила названіе своего изобрѣтателя. Полагая, что Ньютонъ былъ приведенъ къ ней изслѣдованіемъ способа, предлагаемаго *Валисомъ* въ *Арифметикѣ бесконечныхъ* для опредѣленія площадей тѣхъ кривыхъ линий, которыя выражаются уравненіемъ $y = (1-x^2)^m$, гдѣ x изображаетъ абсциссу, y , ординату, а m , *цѣлое положительное число*. Ньютонъ имѣлъ въ виду найти площадь круговаго сегмента; но такъ какъ для этого случая, ордината есть $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, и следовательно m дробное, то способъ, изложенный въ *Арифметикѣ бесконечныхъ*, былъ недостаточенъ, и Ньютону предположительно распространить его.

Валисъ въ упомянутомъ сочиненіи доказывалъ, что полагая послѣдовательно $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ площади кривыхъ, соответствующихъ абсциссѣ x , будутъ

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} x^2 \\ x &= \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^5 \\ x &= \frac{3}{4} x^4 + \frac{3}{2} x^6 - \frac{1}{2} x^7 \\ x &= \frac{4}{5} x^5 + \frac{3}{2} x^7 - \frac{1}{2} x^7 + \frac{1}{2} x^9 \\ x &= \frac{5}{6} x^6 + \frac{10x^8}{6} - \frac{10x^8}{7} + \frac{5x^9}{9} - \frac{1}{11} x^{11} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Рассматривая эти выраженія, Ньютонъ замѣтилъ, что числители численныхъ коэффициентовъ втораго столбца составляли рядъ натуральныхъ чиселъ 1, 2, 3, 4, 5...; прѣмій столбецъ состоялъ изъ треугольных чиселъ 1, 3, 6, 10...; четвертый составлялъ изъ пирамидальныхъ 1, 4, 10... и такъ далѣе. Что касается до порядка знаковъ, то смененъ количества x и до численныхъ знаменателей, то законъ ихъ очевиденъ. Основываясь на этихъ замѣчаніяхъ, Ньютонъ заключилъ, что численные коэффициенты въ выраженіи площади кривой, коей ордината $= (1-x^2)^m$, начиная со втораго члена, будутъ $m, \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$,

$\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots$, ибо сіи количества изображаютъ по порядку общіе члены натуральныхъ, треугольных, пирамидальныхъ... чиселъ.

Убѣдясь въ справедливости сего общаго вида для цѣлыхъ степеней m , Ньютонъ допустилъ то же и для дробнаго значенія $m = \frac{1}{2}$, въ чемъ удостоверялся непосредственнымъ извлеченіемъ квадратнаго корня изъ $1-x^2$, и, действуя надъ этимъ разложеніемъ по способу Валисса, получалъ следующій рядъ для части круговой площади, считаемою отъ центра до неопредѣленной абсциссы x :

$$x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1}{16} \cdot \frac{x^7}{7} + \frac{5}{128} \cdot \frac{x^9}{9} - \dots \text{и проч.}$$

Достигнувъ этого, уже не трудно было Ньютону замѣтить, что написавъ спрочу, выражающую площадь кривой, коей ордината есть $(1-x^2)^m$, потомъ уменьшить всѣхъ показателей надъ x одною единицею, и откинуть знаменателей, получится разложеніе двучленного количества $1-x^2$, возвышеннаго въ степень m ; и такимъ образомъ онъ вывелъ формулу

$$(1-x^2)^m = 1 - mx^2 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^4 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^6 + \dots$$

которую, по изведенію, распространилъ на случай m цѣлаго отрицательнаго, и дробнаго положительнаго или отрицательнаго.

Ньютонъ сообщилъ свою формулу безъ доказательства въ 1676 году. По своей важности, она сдѣлалась предіетомъ изслѣдованій многихъ первостепенныхъ математиковъ, которые предложили различные доказательства, болѣе или мене удовлетворительныя.

Общая формула (A) выражена на границѣ Ньютона въ *Великомъстерскомъ Аббатствѣ*. Хотя открытія болѣе блистательныя увѣковѣчили память Ньютона, но ни одно изъ нихъ не можетъ сравниться въ отношеніи плодovitости своихъ приложений въ *Математическомъ Анализѣ* съ этимъ открытіемъ, о которомъ говоримъ.

Предложено множество доказательствъ Ньютоновой биноміи. Въ слѣдствіе COMBINATOIRE (ANALYSE) читатели найдутъ одно для случая цѣлой положительной степени. Для дробнаго же показателя, приведемъ одно изъ доказательствъ, придуманныхъ *Эйлерами*.

Допустимъ, что для m цѣлаго положительнаго, имѣемъ

$$(B) (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

Когда предположим, что m обращается в число нецелое, или иррациональное, то мы уже не знаем, какой функцией вторая часть предыдущего уравнения будет служить разложением. Пусть будет $f(m)$ эта неизвестная функция, такъ что

$$f(m) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

Взяв другое, какое ни есть число n , очевидно получимъ

$$f(n) = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

и следовательно

$$f(m) \cdot f(n) = \left[1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \right] \times \left[1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \right]$$

Чтобы найти видъ этого произведенія, Эйлеръ замѣчаетъ, что составленіе его различныхъ членовъ не измѣнится, каковы бы ни были частныя значенія величинъ m и n ; и такъ, если этотъ видъ будетъ вѣрнѣею холъ въ одномъ случаѣ при m и n неопредѣленныхъ, то останется вѣренъ же самымъ и для всѣхъ случаевъ. Но когда m и n цѣлыя положительныя числа (впрочемъ неопредѣленныя), то сказанное произведеніе обращается въ $(1+x)^m (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$; но

$$(1+x)^{m+n} = 1 + \frac{m+n}{1}x + \frac{(m+n)(m+n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

следовательно, для какихъ ни есть m и n будетъ

$$\begin{aligned} & 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \\ & \times \left(1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \right) \\ & = 1 + \frac{m+n}{1}x + \frac{(m+n)(m+n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \end{aligned}$$

Но вторая часть этого уравненія, по свойству функции f , равна $f(m+n)$; следовательно имѣемъ уравненіе

$$f(m) \cdot f(n) = f(m+n),$$

которое должно служить для опредѣленія вида функции f .

Познана n въ $n+p$, получимъ

$$f(m) \cdot f(n+p) = f(m+n+p);$$

$$\text{но } f(n) \cdot f(p) = f(n+p),$$

следовательно

$$f(m) \cdot f(n) \cdot f(p) = f(m+n+p),$$

и вообще

$$f(m) \cdot f(n) \cdot f(p) \cdot f(q) \dots = f(m+n+p+q+\dots).$$

Пологая $m=n=p=q=\dots=\frac{\lambda}{\mu}$, а число количествъ m, n, p, q, \dots равнымъ μ , найдемъ

$$f\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^\mu = [f(\lambda)]^{\frac{1}{\mu}}.$$

Но если примемъ λ цѣлымъ положительнымъ, то $f(\lambda) = (1+x)^\lambda$, и следовательно $[f(\lambda)]^{\frac{1}{\mu}} = (1+x)^{\frac{\lambda}{\mu}}$; но такъ какъ

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) &= 1 + \frac{\lambda}{\mu}x + \frac{\frac{\lambda}{\mu}(\frac{\lambda}{\mu}-1)}{1 \cdot 2}x^2 \\ &+ \frac{\frac{\lambda}{\mu}(\frac{\lambda}{\mu}-1)(\frac{\lambda}{\mu}-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \end{aligned}$$

то заключаемъ, что эта строка есть не иное что, какъ разложеніе степеннаго количествъ $(1+x)^{\frac{\lambda}{\mu}}$.

Для показанія отрицательнаго, принимаемъ въ формулѣ

$$f(m) \cdot f(n) = f(m+n)$$

$m+n=0$; следовательно $f(m+n) = (1+x)^0 = 1$, и

$$f(m) \cdot f(-m) = 1.$$

И такъ, каково бы ни было число m , имѣемъ

$$f(-m) = \frac{1}{f(m)};$$

но, въ слѣдствіе доказаннаго выше,

$$f(m) = (1+x)^m, \quad \frac{1}{f(m)} = \frac{1}{(1+x)^m} = (1+x)^{-m};$$

следовательно

$$f(-m) = (1+x)^{-m}.$$

Но $f(-m)$ изображаетъ рядъ

$$1 - mx + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}x^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots,$$

который, въ силу предыдущаго уравненія, будетъ изображать разложеніе количествъ $(1+x)^{-m}$.

Мы уличиваемъ о безчисленномъ множествѣ приложеній Ньютоноваго биномія въ Математику. Читателю, сколько либудо знакомое съ математическимъ анализомъ, знаютъ общепознность этой формулы. Въ заключеніе скажемъ, что при дробномъ показателѣ m , рядъ (B) будетъ сходиться для $x < 1$, а расходящійся, для $x > 1$. Для дальнѣйшихъ подробностей объ этомъ предметѣ, отсылаемъ къ статьямъ: SÉRIE, EXTRACTION DES RACINES, ÉLEVATION AUX PUISSANCES.

BINOME DES FACTORIELLES или **FACTORIELLE A BASE BINOME**. (Англ.) **ФАКТОРИАЛЬНАЯ БИНОМИЯ, ФАКТОРИАЛЬНЫЙ БИНОМЪ, ФАКТОРИАЛЬНОЕ ВЫРАЖЕНІЕ СЪ ДВУЧЛЕННЫМЪ ОСНОВАНІЕМЪ**. Такъ называется формула, служащая для разложенія факторіальнаго количества

$$(a+b)(a+b+r)(a+b+2r)\dots(a+b+[m-1]r),$$

которое, по законоположенію *Крампа*, изображается чрезъ $(a+b)^{m!r}$. Смол. FACTORIELLE, COMBINATOIRE (ANALYSE). Въ слѣдствіе этого законоположенія имѣемъ

$$\begin{aligned} a^{1!r} &= a \\ a^{2!r} &= a(a+r) \\ a^{3!r} &= a(a+r)(a+2r) \\ a^{4!r} &= a(a+r)(a+2r)(a+3r) \\ &\dots \end{aligned}$$

и также

$$\begin{aligned} b^{1!r} &= b \\ b^{2!r} &= b(b+r) \\ b^{3!r} &= b(b+r)(b+2r) \\ b^{4!r} &= b(b+r)(b+2r)(b+3r) \\ &\dots \end{aligned}$$

Факторіальная биномія $(a+b)^{m!r}$ выражается слѣдующую формулою:

$$(1) (a+b)^{m!r} = a^{m!r} + ma^{m-1!r}b^{1!r} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2!r}b^{2!r} + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3!r}b^{3!r} + \dots$$

имѣющую большое сходство съ Ньютоновой биноміей. Численные коэффициенты этого разложенія не иное что, какъ коэффициенты биноміальныя; что касается до закона факторіальныхъ функций $a^{m!r}$, $a^{m-1!r}$, $b^{1!r}$, ..., то онъ очевиденъ.

Чтобы доказать формулу (1), рассмотримъ сперва частные случаи, и во первыхъ замѣтимъ, что

$$\begin{aligned} (a+b)^{1!r} &= a+b = a^{1!r} + b^{1!r} \\ (a+b)^{2!r} &= (a+b)(a+b+r) = a(a+r) + 2ab + b(b+r) \\ &= a^{2!r} + 2a^{1!r}b^{1!r} + b^{2!r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^{3!r} &= (a+b)(a+b+r)(a+b+2r) = a(a+r)(a+2r) \\ &\quad + 3a(a+r)b + 3ab(b+r) + b(b+r)(b+2r) \\ &= a^{3!r} + 3a^{2!r}b^{1!r} + 3a^{1!r}b^{2!r} + b^{3!r} \end{aligned}$$

Разложеніе факторіальныхъ количествъ $(a+b)^{1!r}$, $(a+b)^{2!r}$, $(a+b)^{3!r}$, найденное непосредственно, согласуется съ общими видами формулы (1). Числомъ доказать справедливость сей послѣдней для

какого ни есть цѣлаго положительнаго числа, покажемъ, что если она справедлива для цѣлаго числа m , то будетъ также имѣть мѣсто и для слѣдующаго, то есть, для $m+1$. Такимъ образомъ общность формулы (1) будетъ доказана, ибо, зная что для $m=3$, она справедлива, мы въ правѣ заключить, что она справедлива и для $m+1=4$, а слѣдовательно и для $4+1=5$, $5+1=6$, ... и вообще для какого ни есть цѣлаго положительнаго числа.

И такъ, мы допускаемъ справедливость формулы (1), и имѣемъ въ виду доказать, что она будетъ состояться и въ томъ случаѣ, когда отъ цѣлаго m , перейдемъ къ $m+1$. Изобразимъ для краткости биноміальные коэффициенты m , $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, ... чрезъ M_1 , M_2 , M_3 , ..., получимъ

$$(a+b)^{m!r} = a^{m!r} + M_1 a^{m-1!r} b^{1!r} + M_2 a^{m-2!r} b^{2!r} + M_3 a^{m-3!r} b^{3!r} + \dots$$

Помноживъ обѣ части этого уравненія на $a+b$ и mr , найдемъ въ слѣдствіе самаго опредѣленія факторіальныхъ функций

$$(2) (a+b)^{m+1!r} = [a^{m!r} + M_1 a^{m-1!r} b^{1!r} + M_2 a^{m-2!r} b^{2!r} + M_3 a^{m-3!r} b^{3!r} + \dots] \times (a+b+mr)$$

но легко видѣть, что

$$\begin{aligned} a^{m+1!r} (a+b+mr) &= a^{m+1!r} \\ a^{m-1!r} (a+b+mr) &= a^{m-1!r} (a+b+mr-1 \cdot r) = a^{m-1!r} + r \cdot a^{m-1!r} \\ a^{m-2!r} (a+b+mr) &= a^{m-2!r} (a+b+mr-2 \cdot r) = a^{m-2!r} + 2r \cdot a^{m-2!r} \\ a^{m-3!r} (a+b+mr) &= a^{m-3!r} (a+b+mr-3 \cdot r) = a^{m-3!r} + 3r \cdot a^{m-3!r} \\ &\dots \end{aligned}$$

и также

$$\begin{aligned} b &= b^{1!r} \\ b^{1!r} b &= b^{2!r} - r b^{1!r} \\ b^{2!r} b &= b^{3!r} - 2r b^{2!r} \\ &\dots \end{aligned}$$

Подставляя эти величины въ уравненіе (2), получимъ формулу

$$\begin{aligned} (a+b)^{m+1!r} &= a^{m+1!r} + M_1 (a^{m!r} + r a^{m-1!r}) b^{1!r} \\ &\quad + M_2 (a^{m-1!r} + 2r a^{m-2!r}) b^{2!r} + M_3 (a^{m-2!r} + 3r a^{m-3!r}) b^{3!r} \\ &\quad + \dots + a^{m!r} b^{1!r} + M_1 (a^{m-1!r} b^{2!r} - r a^{m-1!r} b^{1!r}) \\ &\quad + M_2 (a^{m-2!r} b^{3!r} - 2r a^{m-2!r} b^{2!r}) + \dots \end{aligned}$$

которая, послѣ сокращеній, приметъ видъ

$$(a+b)^{m+1!r} = a^{m+1!r} + (M_1+1) a^{m!r} b^{1!r} + (M_2+M_1) a^{m-1!r} b^{2!r} + (M_3+M_2) a^{m-2!r} b^{3!r} + \dots$$

Но

$$M_1 + 1 = m + 1$$

$$M_2 + M_1 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + m = \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2}$$

$$M_3 + M_2 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} = \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Следовательно

$$(a+\delta)^{m+1} = a^{m+1} + (m+1)a^m \delta + \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} a^{m-1} \delta^2 + \dots + \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-2} \delta^3 + \dots$$

Но эта формула вполне согласуется с уравн. (1), когда заменим в семь последних члѣновъ число m слѣдующимъ за нимъ $m+1$. Следовательно, изъ сказаннаго нами выше, должно заключить, что формула (1) имѣетъ мѣсто для всѣхъ возможныхъ значеній цѣлаго положительнаго числа m .

Вотъ доказательство факториальной биноміи для цѣлой степени m ; слѣдующую же доказательство, предложеннаго Эйлеромъ для Ньютоновой биноміи (Смол. BINOME DE NEUTON), можно распространить приведенную сей-часъ формулу на какое ни есть значеніе степени m . Предоставляемъ читателю это обобщеніе, которое впрочемъ не представляетъ никакого особеннаго затрудненія.

Вандермондъ первый вывелъ факториальную биномію; его формула ограничивалась случаемъ $r = -1$; впоследствии Крамль предложилъ ее въ общемъ видѣ, въ какомъ она приведена у насъ. Чтобы читателю наши болѣе ознакомиться съ этимъ предметомъ, мы отсылаемъ ихъ къ статьямъ: FACTORIELLE, GAMMA (FONCTION), FACULTES NUMERIQUES, COMBINATOIRE (ANALYSE).

BINOMES (DIFFERENTIELLES). (Исп. Исч.)

ДВУЧЛЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦАЛЫ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЯ БИНОМИИ. Такъ назы-

вается дифференціальное выраженіе вида

$$(1) \quad x^m (a + bx^n)^q dx,$$

гдѣ m , n , p и q изображаютъ цѣлыя числа. Ясно, что полагая m и n цѣлыми, мы чрезъ то насколько не ограничиваемъ общности выраженія (1); и дѣйствительно, положимъ, что вѣсто цѣлыхъ показателей m и n , имѣемъ дробные $\frac{1}{\mu}$, $\frac{1}{\nu}$.

Принявъ $x^{\frac{1}{\mu}} = x$, найдемъ $x^{\frac{1}{\nu}} = x^{\frac{1}{\mu}\mu'}$, $x^{\frac{1}{\mu}} = x^{\frac{1}{\nu}\nu}$, $dx = \mu x^{\mu'-1} dx$, и слѣдовательно двучленный дифференціалъ въ x -ахъ будетъ

$$\mu \mu' x^{2\mu'-1} (a + bx^{\mu'\mu})^{\frac{p}{\nu}} dx,$$

въ которомъ показатели надъ x въ скобкахъ, и подъ скобками, суть цѣлыя числа, какъ и въ выраженіи (1).

Приведеніе двучленнаго выраженія (1) къ рациональному виду, а слѣдовательно и интегрированіе его посредствомъ функцій алгебраическихъ, логарифмическихъ и круговыхъ, возможно только въ двухъ случаяхъ, именно:

$$(2) \quad \begin{cases} 1^\circ \text{ когда } \frac{m+1}{n} = \pm \text{цѣлому числу.} \\ 2^\circ \text{ когда } \frac{m+1}{n} + \frac{p}{q} = \pm \text{цѣлому числу.} \end{cases}$$

Дѣйствительно, когда $m+1$ дѣлится на цѣло на n , то принявъ $\frac{m+1}{n} = e$ и положивъ

$$a + bx^n = z^q,$$

найдемъ слѣдовательно

$$(a + bx^n)^{\frac{p}{q}} = z^p,$$

$$x^n = \frac{z^q - a}{b}$$

$$x^{ne} = \left(\frac{z^q - a}{b}\right)^e$$

$$ne x^{ne-1} dx = \frac{eq (z^q - a)^{e-1} z^{q-1} dz}{b^e};$$

но $ne - 1 = m$; почему

$$x^m dx = \frac{q}{nb^e} (z^q - a)^{e-1} z^{q-1} dz,$$

и слѣдовательно

$$x^m (a + bx^n)^{\frac{p}{q}} dx = \frac{q}{nb^e} (z^q - a)^{e-1} z^{p+q-1} dz.$$

Такъ какъ e изображаетъ число цѣлое, то выраженіе $(z^q - a)^{e-1}$ будетъ рациональное, именно, цѣлое, если e положительное, а дробное, когда e отрицательное.

Выраженіе (1) можемъ очевидно принять еще слѣдующій видъ:

$$x^m + n \frac{p}{q} (b + ax^{-n})^{\frac{p}{q}} dx,$$

и, въ слѣдствіе того что было доказано предъ симъ, дѣлается рациональнымъ, когда $m + n \frac{p}{q} + 1$ дѣлится на цѣло на $-n$, то есть, когда $\frac{m+1}{n} + \frac{p}{q} = \pm$ цѣлому числу.

Если это условіе, составляющее второй изъ упомянутыхъ двухъ случаевъ, имѣетъ мѣсто, то выраженіе (1) приведетъ къ рациональному виду, полагая

$$b + ax^{-n} = z^q.$$

Замѣтимъ, что приведенные два случая существенно различны между собою: и действительно, если $\frac{m+1}{n}$ есть цѣлое число, то очевидно, что сумма $\frac{m+1}{n} + \frac{p}{q}$ будетъ дробная, ибо $\frac{p}{q}$ предполагается всегда дробнымъ; и наоборотъ, если $\frac{m+1}{n} + \frac{p}{q}$ равняется цѣлому числу, то $\frac{m+1}{n}$ будетъ непременно дробное.

Выраженіе (1) можетъ быть реэмаприваемо въ слѣдующемъ, болѣе общемъ видѣ:

$$(ax+b)^{\lambda} (a_1x+b_1)^{\mu} dx,$$

гдѣ λ и μ изображаютъ вообще дроби числа. Легко усмотрѣть, что это выраженіе можетъ быть преобразовано въ рациональное, когда одно изъ трехъ чиселъ λ , μ , $\lambda + \mu$ будетъ цѣлое, и сверхъ того, всѣ три рациональны. Эти условія приводятъ къ слѣдующимъ тремъ видамъ:

$$(ax+b)^{\pm l} (a_1x+b_1)^{\pm \frac{m}{n}} dx$$

$$(ax+b)^{\pm \frac{m}{n}} (a_1x+b_1)^{\pm l} dx$$

$$(ax+b)^{\pm \frac{m}{n}} (a_1x+b_1)^{\pm l \mp \frac{m}{n}} dx.$$

Для m и $\frac{p}{q}$ положительныхъ:

$$(A) \int x^m (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} dx = \frac{x^{m-n+1} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{b(n\frac{p}{q}+m+1)} - \frac{a(m-n+1)}{b(n\frac{p}{q}+m+1)} \int x^{m-n} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} dx,$$

$$(B) \int x^m (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} dx = \frac{x^{m+1} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{n\frac{p}{q}+m+1} + \frac{na\frac{p}{q}}{n\frac{p}{q}+m+1} \int x^m (a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1} dx.$$

Для m и $\frac{p}{q}$ отрицательныхъ:

$$(C) \int x^{-m} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} dx = -\frac{(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{a(m-1)x^{m-1}} + \frac{b(n\frac{p}{q}+n-m+1)}{a(m-1)} \int x^{-(m-n)} (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} dx,$$

$$(D) \int x^m (a+bx^n)^{-\frac{p}{q}} dx = \frac{x^{m+1}}{na(\frac{p}{q}-1)(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}} - \frac{m+n+1-n\frac{p}{q}}{na(\frac{p}{q}-1)} \int x^m (a+bx^n)^{-(\frac{p}{q}-1)} dx.$$

Напримѣръ, если бы желали посредствомъ этихъ формулъ привести къ простѣйшему виду интегралъ

$$\int x^{\frac{1}{2}} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

то надлежало бы употребить три раза формулу (A) и два раза формулу (D).

Первое преобразование по формулѣ (A), привело бы къ интегралу $\int x^{\frac{1}{2}} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$; второе, къ $\int x^{\frac{3}{2}} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$; третье, къ $\int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$.

Первая биномія дѣлается рациональною, когда примемъ

$$a_1x+b_1=x^n,$$

вторая, когда предположимъ

$$ax+b=x^n,$$

и наконецъ третья, если возьмемъ

$$\frac{ax+b}{a_1x+b_1}=x^n.$$

Когда двучленный дифференціалъ (1) не можетъ быть приведенъ къ рациональному виду, то стараясь привести его къ простѣйшему случаю. Этимъ цѣли легко достигнуть посредствомъ приѣма, извѣстнаго подъ наименованіемъ *интегрированія по частямъ* (*intégration par parties*). Этимъ способъ приводитъ къ формуламъ, помощью коимъ показателъ m надъ x въ скобкахъ можетъ быть уменьшенъ всѣми кратными онъ n , заключающимися въ немъ, а дробный показателъ $\frac{p}{q}$ приведенъ къ правильной дроби. Такъ какъ m и $\frac{p}{q}$ могутъ быть и положительныя и отрицательныя, то ясно, что для достиженія во всѣхъ случаяхъ предполагаемой цѣли, необходимо имѣть четыре формулы; вотъ онѣ:

Первое преобразование по формул (D) последнего интеграла $f(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ dx приведем его к $f(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$; второе, к $f(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$; дальнейшие приведения невозможны. И так мы видим, что интеграл $f(x^2(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$ легко может быть выражен посредством другого простейшего, именно, интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

BINOMES (EQUATIONS). (Анг.) ДВУЧЛЕННЫЕ

УРАВНЕНИЯ. Так называются уравнения вида $x^m = A$, где A изображает вещественную или мнимую величину. Предполагая A вещественным, получим два случая, смотря по тому, будет ли A числом положительное или отрицательное. Рассмотрим отдельно каждое из уравнений

$$\begin{aligned} x^m &= +A, \\ x^m &= -A. \end{aligned}$$

Если изобразим чрез a арифметический корень m -ой степени из A , так что $a = \sqrt[m]{A}$, и положим $x = ay$, то предыдущия уравнения примут вид

$$\begin{aligned} (1) \quad y^m &= +1, \\ (2) \quad y^m &= -1, \end{aligned}$$

и определение всех корней уравнения $x^m = \pm A$ приведет к определению величин y по уравнениям (1) и (2), то есть, к нахождению всех корней m -ой степени из $+1$ и -1 .

Для решения уравнения (1), положим

$$y = \rho (\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1}),$$

где ρ и φ изображают вещественные величины; получим

$$\begin{aligned} y^m &= \rho^m (\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})^m \\ &= \rho^m (\cos m\varphi + \sin m\varphi \sqrt{-1}). \end{aligned}$$

Но $y^m = 1$; следовательно

$$\rho^m (\cos m\varphi + \sin m\varphi \sqrt{-1}) = 1.$$

Откуда

$$\rho^m \cos m\varphi = 1; \quad \rho^m \sin m\varphi = 0;$$

взяв сумму квадратов последних двух уравнений, получим

$$\rho^{2m} (\cos^2 m\varphi + \sin^2 m\varphi) = \rho^{2m} = 1.$$

И так $\rho = 1$, в следствие чего

$$\cos m\varphi = 1, \quad \sin m\varphi = 0.$$

Чтобы удовлетворить этим двум уравнениям, очевидно должно положить

$$m\varphi = \pm 2l\pi, \text{ или } \varphi = \pm \frac{2l\pi}{m},$$

разумя под l какое нибудь целое число. Следовательно

$$y = \cos \frac{2l\pi}{m} \pm \sin \frac{2l\pi}{m} \sqrt{-1}.$$

Пусть будет h ближайшее к отношению $\frac{l}{m}$ целое число. Разность между числами h и $\frac{l}{m}$ очевидно не может превышать $\frac{1}{2}$; и так

$$\frac{l}{m} = h \pm \frac{k}{m},$$

где $\frac{k}{m}$ изображает дробь равную или меньшую $\frac{1}{2}$, а следовательно k число меньшее, или, по большей мере, равное $\frac{m}{2}$. Отсюда заключаем

$$\frac{2l\pi}{m} = 2h\pi \pm \frac{2k\pi}{m},$$

почему

$$\cos \frac{2l\pi}{m} \pm \sin \frac{2l\pi}{m} \sqrt{-1} = \cos \frac{2k\pi}{m} \pm \sin \frac{2k\pi}{m} \sqrt{-1},$$

и наконец

$$(3) \quad y = \cos \frac{2k\pi}{m} \pm \sin \frac{2k\pi}{m} \sqrt{-1}.$$

Это уравнение, в котором k изображает целое число, заключающееся между пределами 0 и $\frac{m}{2}$, дает все значения $\sqrt[m]{1}$. Действительно, когда m будет четное число, то величины для k будут так

$$0, 1, 2, 3, \dots, \frac{m-2}{2}, \frac{m}{2},$$

и следовательно формула (3) даст для y , из которых два, соответствующие предположениям $k=0$, $k=\frac{m}{2}$, будут вещественными, именно $+1$ и -1 , а остальные мнимыми, и сопряженными по два.

Когда m нечетное, то, не выходя из пределов 0 и $\frac{m}{2}$, получим для k ряд величин

$$0, 1, 2, 3, \dots, \frac{m-3}{2}, \frac{m-1}{2};$$

первое значение $k=0$, даст корни $y=1$, а все остальные, мнимые сопряженные корни.

Например, для уравнения $y^4=1$, по формуле (3) получим бы следующие четыре корни:

для $k=0$, $y = +1$;

для $k=1$, $y = \cos \frac{\pi}{2} \pm \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{-1} = +\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$;

для $k=2$, $y = \cos \pi \pm \sin \pi \sqrt{-1} = -1$.

Если бы взяли уравнение $y^3=1$, то формула (3) привела бы нас к следующим трем корням третьей степени из единицы:

для $k=0, y=1$;

для $k=1, y=\cos \frac{2\pi}{5} \pm \sin \frac{2\pi}{5} \cdot \sqrt{-1}$.

Но $\cos \frac{2\pi}{5} = -\frac{1}{2}, \sin \frac{2\pi}{5} = +\frac{\sqrt{5}}{2}$; следовательно три корня, о которых говоримъ, будутъ:

$$1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{-1}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{-1}.$$

Разсмотримъ теперь уравнение $y^m = -1$; полагая, какъ и прежде,

$$y = \rho (\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1}),$$

получимъ

$$y^m = \rho^m (\cos m\varphi + \sin m\varphi \sqrt{-1}) = -1$$

откуда

$$\rho = 1, \cos m\varphi = -1, \sin m\varphi = 0,$$

и следовательно

$$m\varphi = \pm (2k+1)\pi \text{ или } \varphi = \pm \frac{(2k+1)\pi}{m},$$

разумя подъ k какое ни есть цѣлое число. И такъ, всѣ рѣшенія уравненія (2) будутъ заключаться въ формулѣ

$$(4) \quad y = \cos \frac{(2k+1)\pi}{m} \pm \sin \frac{(2k+1)\pi}{m} \cdot \sqrt{-1},$$

въ которой, какъ легко видѣть, можно предположить, что $2k+1$ заключается между предѣлами 0 и m ; и дѣйствительно, пусть будетъ k наибольшее цѣлое число, заключающееся въ отношеніи $\frac{2k+1}{2m}$. Ясно, что разность между числами k и $2k+1$ будетъ дробь съ числителемъ нечетнымъ, меньшимъ, или по крайней мѣрѣ равная $\frac{1}{2}$; и такъ

$$\frac{2k+1}{2m} = h \pm \frac{2k+1}{2m},$$

гдѣ $2k+1$ не превышаетъ m . Следовательно

$$\frac{(2k+1)\pi}{m} = 2h\pi \pm \frac{(2k+1)\pi}{m}$$

$$\text{и } \cos \frac{(2k+1)\pi}{m} \pm \sin \frac{(2k+1)\pi}{m} \cdot \sqrt{-1}$$

$$= \cos \frac{(2k+1)\pi}{m} \pm \sin \frac{(2k+1)\pi}{m} \cdot \sqrt{-1},$$

какъ сей часъ было сказано.

Когда величина, которую изображали выше чрезъ A , будетъ мнималъ, то для рѣшенія уравненія

$$(5) \quad x^m = \alpha + \beta \sqrt{-1},$$

получимъ

$$x = \rho (\cos \varphi + \sin \varphi \cdot \sqrt{-1})$$

$$\text{и } \alpha + \beta \sqrt{-1} = r (\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \sqrt{-1}),$$

гдѣ $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ и $\cos \alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$, и следовательно r и α величины извѣстныя. На основаніи найдемъ

$$\rho^m (\cos m\varphi + \sin m\varphi \sqrt{-1}) = r (\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \sqrt{-1}),$$

или

$$\rho^m (\cos m\varphi + \sin m\varphi \sqrt{-1}) = r (\cos \alpha + \sin \alpha \sqrt{-1}),$$

откуда

$$\rho^m \cos m\varphi = r \cos \alpha, \quad \rho^m \sin m\varphi = r \sin \alpha.$$

Взявъ сумму квадратовъ сихъ двухъ уравненій, получимъ

$$\rho^{2m} (\cos^2 m\varphi + \sin^2 m\varphi) = r^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha),$$

или

$$\rho^m = r, \text{ откуда } \rho = \sqrt[m]{r},$$

сверхъ того, такъ какъ

$$\cos m\varphi = \cos \alpha, \quad \sin m\varphi = \sin \alpha$$

то найдемъ

$$m\varphi = \alpha \pm 2k\pi \text{ и } \varphi = \frac{\alpha \pm 2k\pi}{m},$$

разумя подъ k какое ни есть цѣлое число. И такъ, всѣ рѣшенія уравненія (5) будутъ заключаться въ формулѣ

$$x = \sqrt[m]{r} \left(\cos \frac{\alpha \pm 2k\pi}{m} + \sin \frac{\alpha \pm 2k\pi}{m} \cdot \sqrt{-1} \right) =$$

$$\sqrt[m]{r} \left(\cos \frac{\alpha}{m} + \sin \frac{\alpha}{m} \cdot \sqrt{-1} \right) \left(\cos \frac{2k\pi}{m} \pm \sin \frac{2k\pi}{m} \cdot \sqrt{-1} \right);$$

но, въ силу уравненія (3),

$$\cos \frac{2k\pi}{m} \pm \sin \frac{2k\pi}{m} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt[m]{1},$$

следовательно, всѣ корни уравненія (5) найдутся по формулѣ

$$(6) \quad x = \sqrt[m]{r} \left(\cos \frac{\alpha}{m} + \sin \frac{\alpha}{m} \cdot \sqrt{-1} \right) \sqrt[m]{1},$$

въ которой $\sqrt[m]{r}$ изображаетъ величину вещественную и положительную, а $\sqrt[m]{1}$ всѣ корни m -ой степени изъ $+1$.

Вотъ общее рѣшеніе двучленныхъ уравненій, основанное на *тригонометрическихъ формулахъ*. Что касается до вѣхъ рѣшенія посредствомъ *радикаловъ*, то знанія аналитиковъ по сему предмету были весьма ограничены до появленія въ свѣтъ (въ 1801 году) примѣчательнаго сочиненія Брауншвейгскаго математика *Gauss*, подъ заглавіемъ *Disquisitiones Arithmeticae*. Въ этой книгѣ Гауссъ предлагаетъ полную, совершенно новую теорію, для рѣшенія двучленныхъ уравненій, или, что все равно (какъ видно изъ предыдущаго), для раздѣленія окружности круга на m равныхъ частей. Для другихъ подробностей отсылаемъ читателей къ книгѣ: *ANGULAIRES (SECTIONS)*.

Мы намерены изложить здѣсь въ самомъ краткомъ видѣ теорію *Gauss*. Читатели, желающіе совершенно освоиться съ нею, найдутъ всѣ на-

лежащих подробности в книгах: *Disquisitiones Arithmeticae, Théorie des Nombres, par Legendre 1830*, 3-е изд. и *Traité de la résolution des équations numériques par Lagrange*, 2-е и 3-е изд. — Но прежде мы приведем несколько предложений, относящихся к двучленным уравнениям; доказательства сих предложений читатель найдет во всех элементарных курсах Алгебры.

Замыслим сперва, что для решения уравнения $x^n - 1 = 0$, где n изображает какое н. е. целое сложное число, достаточно будет знать решение уравнения такого же вида, но в том случае, когда показатель будет простым числом. И так, пусть p простое число, отличное от n ; уравнение, которым займемся теперь, будет следующее:

$$x^p - 1 = 0.$$

Если изобразим чрез r , который н. е. есть изъ являемых корней этого уравнения, то все остальные корни будутъ

$$r, r^2, r^3, \dots, r^{p-1}, r^p;$$

последний изъ нихъ очевидно равенъ единице. Отделяя этотъ корень, то есть, раздѣляя $x^p - 1$ на $x - 1$, найдемъ уравнение

$$(A) \quad x^{p-1} + x^{p-2} + x^{p-3} + \dots + x + 1 = 0,$$

кого корни изобразятся чрезъ

$$(B) \quad r, r^2, r^3, \dots, r^{p-1},$$

и, очевидно, будутъ все являемые.

И такъ, вообще r^u будетъ корнемъ уравнения $X = 0$, лишь бы только u не равнялось нулю, и не дѣлилось на p . При такомъ условіи, выраженіе r^u будетъ допускать только $p-1$ значений, какъ бы число u не было велико; действительно, если примемъ $u = p^k + \lambda$, разукля подъ k какое н. е. целое число, то найдемъ: $r^u = r^{p^k + \lambda} = (r^p)^k \cdot r^\lambda = 1 \cdot r^\lambda = r^\lambda$, гдѣ $\lambda < p$. Легко также видѣть, что все значенія (B) будутъ различны между собою; ибо, допустивъ что $r^a = r^b$, гдѣ a и $b < p$, нашла бы $r^{p(a-b)-1} = 0$, т. е. $r^{a-b} = 1 = 0$, и $a-b = 0 < p$. И такъ, уравнения $x^p - 1 = 0$ и $x^p - 1 = 0$ должны бы имѣть мѣсто въ одно время, а это не можетъ быть по той причинѣ, что p число простое, а r очевидно отъ единицы.

Къ снзъ элементарнымъ предложеніямъ о двучленныхъ уравненіяхъ, прибавимъ еще двѣ теоремы изъ Теоріи Чиселъ, въ которыхъ будетъ имѣть надобность:

1-я Теорема. Для каждого простаго числа p существуетъ такое целое число a , что послѣдовательныя его степени $a, a^2, a^3, \dots, a^{p-1}$, раздѣляемыя на p , даютъ остатки, все различныя между собою, именно $1, 2, 3, \dots, (p-1)$, но въ порядкѣ вообще отличномъ отъ порядка показателей степеней. Целое число a , имѣющее такое свойство называется первоостаточнымъ основаніемъ или первообразнымъ корнемъ. Смол. RACINE PRIMITIVE.

2-я Теорема. Всякое целое число a , которое не дѣлится на простое число p , бывъ возведено въ степень $p-1$, и раздѣлено на p , даетъ остатокъ, равный единице. Или, иначе, при допущеніи условія $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, или, по знаменитому Гюсса, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Смол. CONGRU. Эта теорема извѣстна подъ названіемъ Ферматовой. Смол. FERMAT.

Мы видѣли выше, что все корни уравненія (A) заключаются въ рядъ (B); этотъ самый рядъ (B) можетъ быть представленъ еще и въ другомъ видѣ. Действительно, изобразивъ чрезъ a одно изъ первоостаточныхъ оснований простаго числа p , увидимъ (1-я Теорема), что спрока

$$(C) \quad r^1, r^a, r^{a^2}, r^{a^3}, \dots, r^{a^{p-1}}$$

заключается въ себѣ тѣ же самыя величины какъ и рядъ (B), но только въ другомъ порядкѣ. Въ такомъ свойствѣ ряда (C) легко удостовѣриться, замѣтивъ, что по раздѣленіи на a показателей $a, a^2, a^3, \dots, a^{p-1}$, получился полный рядъ остатковъ $1, 2, 3, 4, \dots, (p-1)$ въ порядкѣ вообще отличномъ отъ порядка натуральныхъ чиселъ $1, 2, 3, 4, \dots, (p-1)$. Но такъ какъ $r^p = 1$, то очевидно, что рядъ (C) будетъ заключать тѣ же самыя значенія какъ и рядъ $r^1, r^2, r^3, r^4, \dots, r^{p-1}$.

Изобразимъ теперь чрезъ $a, a^2, a^3, \dots, a^{p-1}$ корни уравненія

$$\frac{x^{p-1}-1}{x-1} = x^{p-2} + x^{p-3} + \dots + x + 1 = 0,$$

и примемъ въ разсмотрѣніе следующую функцію:

$$(D) \quad \Omega = r + ar^a + a^2r^{a^2} + a^3r^{a^3} + \dots + a^{p-2}r^{a^{p-2}}.$$

Если, во второй части этого уравненія, измѣнимъ корень r въ r^a , то получимъ

$$r^a + ar^{a^2} + a^2r^{a^3} + a^3r^{a^4} + \dots + a^{p-3}r^{a^{p-3}};$$

по въ слѣдствіе 2-ой теоремы $r^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

И такъ, предыдущій рядъ обратится въ выраженіе

$$a^0 + ar^{a^0} + a^2r^{a^0} + a^3r^{a^0} + \dots + a^{p-2}r^{a^0};$$

Вотъ въ самомъ сокращенномъ видѣ алгебраическое рѣшеніе двучленныхъ уравненій, которое изложилъ, придерживаясь способа Лагранжа. Мы приуждены были выпустить многія подробности и приемы, упрощающіе значительнымъ образомъ эту теорію, а также и нѣкоторые соображенія, которыми должно руководствоваться при избраніи различныхъ значеній $\sqrt[n]{\theta}$, когда составляются окончательныя уравненія, опредѣляющія корни $r, r^6, r^2, \dots, r^{p-2}$.

Въ указанныхъ выше сочиненіяхъ, читатели найдутъ разрѣшеніе всѣхъ недоумѣній, могущихъ имъ представиться.

Говоря объ открытіи Гаусса, мы должны непременно коснуться и трудовъ знаменитаго *Абеля* по этой же самой теоріи.

Извѣстно, что общія алгебраическія уравненія, выше четвертой степени, не могутъ быть рѣшены посредствомъ радикаловъ, почему для обозначенія дѣйствій, производимыхъ для ихъ рѣшенія, надобно ввести новый знакъ. Но есть частные случаи, въ которыхъ уравненія высшихъ степеней рѣшаются посредствомъ радикаловъ, именно, когда между корнями предложеннаго уравненія существуетъ какая нибудь зависимость. Такъ наприхѣтъ уравненіе пятой степени

$$x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0,$$

вообще не можетъ быть рѣшено посредствомъ радикальной формулы; но еслибы мы узнали какъ нибудь, что сумма двухъ изъ его пяти корней x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , наприхѣтъ $x_1 + x_2$, равна опредѣленному количеству a , то предложенное уравненіе могло бы разложиться на два другія, одно 2-й степени, а другое 3-ей.

Рѣшеніе двучленного уравненія $x^p - 1 = 0$ посредствомъ радикаловъ, которое сей-часъ было изложено, основано на весьма простомъ отношеніи, существующемъ между его корнями. Абель распространялъ изслѣдованія Гаусса на уравненія, заключающія въ себѣ болѣе двухъ членовъ. Онъ предполагалъ, что корни алгебраическаго уравненія $f(x) = 0$, связаны между собою соотношеніемъ болѣе сложнымъ, нежели въ случаѣ двучленного уравненія; принявъ r за корень функціи $f(x)$, Абель допустилъ что $\varphi(r)$ изобразитъ другой ея корень, разумѣя подъ φ какую ни есть рациональную функцію.

Чтобы познакомить нашихъ читателей съ трудами Абеля по сему предмету, мы приведемъ предложенное имъ рѣшеніе уравненія $f(x) = 0$ въ томъ случаѣ, когда степень n сего послѣдняго будетъ число простое. Положимъ, что функція $f(x)$ не можетъ быть разложена на два рациональные множителя; въ противномъ же случаѣ, вместо одного уравненія, пришлось бы отвѣдно рѣшить два, меньшей степени. Изобразимъ чрезъ r' функцію $\varphi(r)$; слѣдовательно r и r' будутъ два корни уравненія $f(x) = 0$. Замѣтимъ сперва, что функція $f(\varphi(a))$ обратится въ нуль, когда положимъ въ ней $x = r$, откуда слѣдуетъ, что сдѣлавъ $f(\varphi(x)) = F(x)$, функція $F(x)$ и $f(x)$ должны имѣть общій множитель рациональный; но такъ какъ $f(x)$, по предположенію, неразложима функція, то отсюда заключаемъ, что $F(x)$ будетъ дѣлиться на $f(x)$, и что слѣдовательно всѣ корни уравненія $f(x) = 0$, удовлетворяющіе и $F(x) = 0$. И такъ r' , шо есть $\varphi(r)$ будетъ корнемъ уравненія $F(x) = 0$, почему

$$F(r') = f(\varphi(r')) = f[\varphi(\varphi(r))] = 0,$$

а отсюда усматриваемъ, что $\varphi(\varphi(r))$ есть также корень уравненія $f(x) = 0$. Выраженіе $\varphi(\varphi(r))$ для краткости будемъ изображать чрезъ $q^2(r)$; равнымъ образомъ подъ $q^3(r)$ будемъ разумѣть функцію $f[\varphi(\varphi(r))]$, и такъ далѣе. Изобразивъ чрезъ r'' корень $q^2(r)$, найдемъ $F(r'') = f(\varphi(r'')) = 0$, откуда видимъ, что $\varphi(r'')$ или $q^3(r)$ есть также корень предложеннаго уравненія $f(x) = 0$. То же самое докажемъ въ разсужденіи выражений $q^4(r)$, $q^5(r)$ и проч.

И такъ количества

$$(a) \quad r, \varphi(r), q^2(r), q^3(r), q^4(r), \dots$$

будутъ корнями уравненія $f(x) = 0$; но такъ какъ сіе послѣднее не можетъ имѣть болѣе n корней, то члены ряда (a) не могутъ всѣ различиваться между собою. По этому, пусть будетъ $\varphi^{2+\mu}(r) = q^\mu(r)$. Такъ какъ уравненіе $q^2(x) - x = 0$ удовлетворяется когда возьмемъ $x = q^\mu(r)$, то отсюда слѣдуетъ, что функція $q^2x - x$ и $f(x)$ будутъ имѣть общій рациональный множитель, или, по причинѣ неразложимости функціи $f(x)$, $q^2(x) - x$ будетъ дѣлиться на $f(x)$; слѣдовательно, каждый изъ корней уравненія $f(x) = 0$ удовлетворяетъ вмѣстѣ и уравненію $q^2(x) - x = 0$, почему $q^2(r) - r = 0$, откуда $q^2(r) = r$. И такъ первый корень r повторится въ ряду (a); сверхъ

ного легко видеть, что этаким корень r возвращается прежде других $q(r)$, $q^2(r)$ и проч. Действительно, положим что не r , а $q^k(r)$ возвращается прежде; в таком случае будет $q^k(r) = q^{k+1}(r)$, откуда $r = q^k(r)$, из чего усматривается, что r возвращается прежде нежели $q(r)$, $q^2(r)$, И так, ряд корней будет (б) $r, q(r), q^2(r), \dots, q^{l-1}(r), r, q(r), q^2(r), \dots$

Теперь легко показать, что $l = n$. Действительно, если l равно n , то должно быть $l < n$; пусть будет q один из корней уравнения $f(x) = 0$, не заключающийся в ряду (б); корень q должен удовлетворять уравнению $F(x) = f(q(x)) = 0$, и следовательно $q(q)$ будет также корнем уравнения $f(x) = 0$; таким образом получился новый ряд корней

$q, q(q), q^2(q), \dots, q^{m-1}(q), q, q(q), q^2(q), \dots$ в котором m изображает число корней, различных между собою. Но легко доказать что $m = l$; действительно, так как $q = q^m(q)$, то видим, что уравнение $q^m(x) - x = 0$ удовлетворяется значением $x = q$; очевидно, что и все остальные корни уравнения $f(x) = 0$ удовлетворяют уравнению $q^m(x) - x = 0$; следовательно $q^m(r) - r = 0$; но мы нашли выше $q^l(r) - r = 0$, почему $m = l$.

Теперь докажем, что все корни ряда

$$(c) \quad r, q(r), q^2(r), \dots, q^{n-1}(r)$$

различны от корней, заключающихся в ряду (б); если они не различны, то положим на пример $q^k(r) = q^l(r)$, где $l < k$; из этого уравнения заключаем $q^{k-l}(r) = r$, а это противно сделанному выше предположению, ибо q не заключается в ряду (б). И так, все корни ряда (с) отличны от корней ряда (б).

Если корни уравнения $f(x) = 0$ не исписаны рядами (б) и (с), то будем искать першй, чеперный, ... ряд, пока не исписан полного числа n корней. И так, изобразив чрез i число всех рядов, получим $li = n$, и следовательно $i = 1$, ибо i есть число простое. Следовательно все корни уравнения $f(x) = 0$ будут

$$r, q(r), q^2(r), q^3(r), \dots, q^{n-1}(r).$$

Доказав это предложение, и основываясь на соображениях, изложенных Лагранжем в следованиях его обь алгебраических уравнений, Абель составляет функцию

$$[r + a q(r) + a^2 q^2(r) + \dots + a^{n-1} q^{n-1}(r)]^n = \phi(r),$$

где a изображает один из мнимых корней уравнения $a^n - 1 = 0$.

Очевидно, что изменив r в $q(r)$ найдем $\phi[q(r)] = [q(r) + a q^2(r) + \dots + a^{n-2} q^{n-1}(r) + a^{n-1} r]^n = [a^{n-1}(r + a q(r) + a^2 q^2(r) + \dots + a^{n-1} q^{n-1}(r))]^n = \phi(r).$

Подобным образом получим

$$\phi[q^2(r)] = \phi(r)$$

$$\phi[q^3(r)] = \phi(r)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\phi[q^{n-1}(r)] = \phi(r)$$

откуда

$$\phi(r) = \phi(r) + \phi[q(r)] + \phi[q^2(r)] + \dots + \phi[q^{n-1}(r)],$$

И так $\phi(r)$ будет симметрической функцией всех корней предложенного уравнения $f(x) = 0$, и следовательно может быть определена рациональным образом посредством его коэффициентов. Изобразив чрез $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n$ все n значений $\sqrt[n]{\phi(r)}$, очевидно получим

$$\begin{aligned} r + a q(r) + a^2 q^2(r) + \dots + a^{n-1} q^{n-1}(r) &= \phi_1 \\ q(r) + a q^2(r) + a^2 q^3(r) + \dots + a^{n-1} r &= \phi_2 \\ q^2(r) + a q^3(r) + a^2 q^4(r) + \dots + a^{n-1} q(r) &= \phi_3 \\ \dots \dots \dots \\ q^{n-1}(r) + a r + a^2 q(r) + \dots + a^{n-1} q^{n-2}(r) &= \phi_n \end{aligned}$$

Из этих n уравнений первой степени выведем по известным правилам все n корней $r, q(r), q^2(r), \dots, q^{n-1}(r)$ предложенного уравнения $f(x) = 0$.

ВНОМІАЛНХ (СОЕФІЦІЕНТН), (АЛГ.) ВІНОМІАЛННХ КОЕФІЦІЕНТН. Такъ назы-

ваются численные коэффициенты $1, \frac{m}{1}, \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}, \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots$ и вообще $\frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$

въ последовательных членах разложения двучленного количества $(a+b)^m$. Эйлеръ означалъ биноміальные коэффициенты чрезъ $\left[\frac{m}{n} \right]$; Тибо (Thibaut) чрезъ $m \overline{n}$, а Роте (Rothe) употреблялъ самое удобное знаменное, именно m_n . Все эти знаменования изображаютъ общій биноміальный членъ $\frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$.

Легко видѣти, что сумма всехъ биноміальныхъ коэффициентовъ равна 2^m , ибо положивъ въ уравненіи (А) [См. BINOME DE NEWTON] $a=1$ и $b=1$, найдемъ

$$(1+1)^m = 2^m = 1 + m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Самое примечательное свойство биномиальных коэффициентов, когда показатель m есть *простое число*, состоитъ въ томъ, что каждый изъ нихъ дѣлится на цѣло на m . И въ самомъ дѣлѣ, произведение $m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$ дѣлится на $1.2.3\dots n$, и какъ n всегда меньше m , а m простое число, то ясно, что $(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$ будетъ дѣлиться на $1.2.3\dots n$; следовательно $\frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n} = \text{цѣлому}$

числу; помноживъ на m , усматриваемъ непосредственно справедливость предложенія, о которомъ сей-часъ упоминали.

BIPARTITION. См. BISSECTION.

BIQUADRATIQUE или **CARRÉ-CARRÉ.** (Алг.)

БИКВАДРАТНАЯ, ЧЕТВЕРТАЯ СТЕПЕНЬ.

Un nombre biquadratique, биквадратное число, число четвертой степени. Parabole biquadratique, парабола биквадратная, четвертой степени, определяемая уравненіемъ $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$. Equations biquadratiques. Уравненія биквадратныя, четвертой степени. Уравненіе вида $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, гдѣ a, b, c, d изображаютъ какія угодно количествъ, вещественныя или мнимыя, предполагаемыя известными.

Первый, предложенный способъ для рѣшенія биквадратныхъ уравненій, былъ Италіянцемъ *Людвигъ Феррари*. Этотъ способъ называется *Италіанскимъ*, или, чаще, *правиломъ Рафаэля Бомбелли*, потому что сей послѣдній объяснилъ его въ своей Алгебрѣ, издавшею въ 1574 году. Въпоследствии были предложены многіе другіе способы, изъ числа которыхъ болѣе примѣтельными рѣшенія *Декарта*, *Эйлера* и *Лагранжа*, мы изложимъ подробно способъ Эйлера и покажемъ другіе, не останавливаясь на нихъ.

Способъ Людовика Феррари, известный подъ названіемъ правила Бомбелли.

Пусть будетъ

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

общее уравненіе 4-й степени. Предполагаемъ его пождественнымъ съ слѣдующимъ:

$$(x^2 + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0,$$

получимъ, по разложеніи квадратовъ,

$$\frac{1}{4}a^2 + 2p - q^2 = 0$$

$$ap - 2qr = c$$

$$p^2 - r^2 = d.$$

Если изъ этихъ трехъ уравненій исключить q и r , то найдемъ для опредѣленія p слѣдующее уравненіе третьей степени:

$$p^3 - \frac{1}{2}bp^2 + \left(\frac{ac}{4} - d\right)p - \frac{a^2d - abd + c^2}{8} = 0;$$

опредѣливъ отсюда p , получимъ также величины q и r по формуламъ

$$q = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 2p - d}$$

$$r = \frac{ap - c}{2q}.$$

Когда p, q, r будутъ известны, то изъ уравненій $(x^2 + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$ выведемъ искомыя значенія для x ; и дѣйствительно, такъ какъ

$$x^2 + \frac{1}{2}ax + p = \pm (qx + r),$$

то и получимъ слѣдующія два квадратныя уравненія:

$$x^2 + \frac{1}{2}ax + p = qx + r$$

$$x^2 + \frac{1}{2}ax + p = -qx - r,$$

чѣмъ корни будутъ одинаковы съ корнями предложеннаго уравненія 4-й степени.

Способъ Декарта. Освободивъ уравненіе четвертой степени отъ втораго члена (См. TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS), найдемъ

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

гдѣ p, q и r известны. Допустимъ теперь, что $x^4 + px^2 + qx + r$ пождественно равно произведенію двухъ множителей $x^2 + Px + Q$ и $x^2 - Px + R$, найдемъ

$$x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + Px + Q)(x^2 - Px + R) \\ = x^4 + (Q - P^2 + R)x^2 + P(R - Q)x + QR;$$

слѣдовательно

$$Q - P^2 + R = p$$

$$P(R - Q) = q$$

$$QR = r;$$

исключая Q и R изъ сихъ уравненій, получимъ $P^6 + 2pP^4 + (p^2 - 4r)P^2 - q^2 = 0$.

Это уравненіе, называемое *разрѣшающимъ* (la réduite, la résolvante) хотя и 6-й степени, но непосредственно приводится къ 3-ей, принявъ $P^2 = z$. Найдя P , получимъ Q и R по формуламъ

$$Q = \frac{1}{2}(p + P^2 - \frac{q}{P})$$

$$R = \frac{1}{2}(p + P^2 + \frac{q}{P}).$$

Но когда P, Q, R будутъ известны, то чѣмъ корни предложеннаго уравненія 4-й степени получаются чрезъ рѣшеніе двухъ уравненій 2-й степени

$$x^2 + Px + Q = 0$$

$$x^2 - Px + R = 0.$$

Способъ Эйлера. Предположивъ, какъ и выше, что данное уравненіе 4-й степени вида

$$x^4 + px^3 + qx + r = 0,$$

принимаямъ $x = u + v + w$, разума подъ u , v , w неизвѣстныя величины. Возвысивъ въ квадраты, получимъ

$$x^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + uw + vw),$$

или, положивъ

$$(1) \quad P = u^2 + v^2 + w^2, \text{ найдемъ}$$

$$x^2 - P = 2(uv + uw + vw),$$

откуда, возвысивъ опять въ квадраты,

$$x^4 - 2Px^2 + P^2 = 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) + 8uvw(u + v + w).$$

Если положимъ

$$(2) \quad \begin{cases} Q = u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 \\ R = u^2vw^2 \end{cases}$$

и записавъ сумму $u + v + w$ величиною x , перенесемъ всѣ члены въ первую часть уравненія, то получимъ

$$x^4 - 2Px^2 - 8\sqrt{R} \cdot x + P^2 - 4Q = 0.$$

Чтобы это уравненіе имѣло всѣ корни одинаковые съ предложеннымъ, то должно быть

$$(3) \quad -2P = p, \quad -8\sqrt{R} = q, \quad P^2 - 4Q = r,$$

откуда $P = -\frac{p}{2}$, $Q = \frac{1}{4}\left(\frac{q^2}{4} - r\right)$, $R = \frac{q^2}{64}$.

Но изъ уравненій (1) и (2) слѣдуетъ, что принявъ величины u^2 , v^2 , w^2 , за корни уравненія 3-ей степени, получимъ для опредѣленія ихъ

$$(4) \quad z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0,$$

или, подставляя на мѣсто P , Q и R ихъ значенія

$$z^3 + \frac{p}{2}z^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{q^2}{4} - r\right)z - \frac{q^2}{64} = 0.$$

Опредѣливъ по извѣстнымъ правиламъ (Смол. CARDAN (RÈGLE DE)) корни этого уравненія, и изобразивъ ихъ чрезъ z_1 , z_2 , z_3 , найдемъ

$$z_1 = u^2, \quad z_2 = v^2, \quad z_3 = w^2, \text{ откуда}$$

$$u = \pm \sqrt{z_1}, \quad v = \pm \sqrt{z_2}, \quad w = \pm \sqrt{z_3};$$

слѣдовательно

$$(5) \quad x = \pm \sqrt{z_1} \pm \sqrt{z_2} \pm \sqrt{z_3}.$$

Въ этой суммѣ порядокъ обоюдныхъ знаковъ \pm совершенно произвольный, почему и получимся 8 значеній для x , между нѣмъ какъ должно получаться всего только 4. Для разрѣшенія этого затрудненія, споможь только обращать вниманіе на то обстоятельство, что уравненіе (4) не измѣняется, когда вмѣсто уравненія

$$(6) \quad x^4 + px^3 + qx + r = 0,$$

будемъ разсматривать слѣдующее:

$$(7) \quad x^4 + px^3 - qx + r = 0,$$

въ которомъ переменяли знакъ предпоследняго коэффициента q . И такъ, очень естественно, что получаемъ восемь корней, ибо имѣемъ два уравненія 4-й степени.

Чтобы узнать, какіе именно корни принадлежатъ уравненіямъ (6) и (7), то для этого замѣчаемъ, что произведеніе uvw , равное \sqrt{R} , и въ силу одной изъ формулъ (3), также равное $-\frac{q}{8}$, должно имѣть противный знакъ съ величиною q ; слѣдовательно, когда $q > 0$, то $uvw < 0$, и наоборотъ, если $q < 0$, то $uvw > 0$. И такъ, двойные знаки предъ $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_3}$ должно брать такъ, чтобы упомянутыя условія удовлетворялись; этого замѣчанія достаточно для составленія двухъ системъ корней, соответствующихъ обоимъ уравненіямъ (6) и (7). Для (6), въ которомъ $q > 0$, получимъ четыре корня

$$(8) \quad \begin{cases} x_1 = +\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} \\ x_2 = +\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \\ x_3 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \\ x_4 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}. \end{cases}$$

Для (7), въ которомъ $q < 0$, найдемъ

$$(8) \quad \begin{cases} x_1 = +\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \\ x_2 = +\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} \\ x_3 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \\ x_4 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}. \end{cases}$$

Положимъ, напричѣтъ, что дано уравненіе

$$x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0,$$

относящееся къ случаю уравненія (6).

Здѣсь $p = -25$, $q = 60$, $r = -36$; слѣдовательно $P = \frac{25}{2}$, $Q = \frac{769}{16}$, $R = \frac{225}{4}$, и уравненіе (4) приметъ видъ

$$z^3 - \frac{25}{2}z^2 + \frac{769}{16}z - \frac{225}{4} = 0.$$

Рѣшивъ это уравненіе, получимъ

$$z_1 = \frac{9}{4}, \quad z_2 = \frac{1}{4}, \quad z_3 = \frac{25}{4};$$

слѣдовательно

$$u = \pm \frac{3}{2}, \quad v = \pm 1, \quad w = \pm \frac{5}{2},$$

и какъ $q > 0$, то должно будетъ употребить систему корней, опредѣляемую формулами (8). И такъ

$$\begin{aligned} x_1 &= +\frac{3}{2} + 1 - \frac{5}{2} = +1 \\ x_2 &= +\frac{3}{2} - 1 + \frac{5}{2} = +2 \\ x_3 &= -\frac{3}{2} + 1 + \frac{5}{2} = +3 \\ x_4 &= -\frac{3}{2} - 1 - \frac{5}{2} = -6. \end{aligned}$$

Способъ Лагранжа. Знаюмъ способъ основанъ на теоріи симметрическихъ функций. Изобразивъ, какъ и выше, чрезъ x_1, x_2, x_3, x_4 корни уравненія

$$x^4 + px^3 + qx + r = 0,$$

Лагранжъ ищетъ функцию вида

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4,$$

которой бы опредѣленіе зависело отъ уравненія высшей степени проотиву предположеннаго. Функция $x_1 + x_2 - x_3 - x_4$, получающая шесть различныхъ значений

$$(a) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ x_1 + x_3 - x_2 - x_4 \\ x_1 + x_4 - x_2 - x_3 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_3 + x_4 - x_1 - x_2 \\ x_2 + x_4 - x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 - x_1 - x_4 \end{cases}$$

удовлетворяетъ требованію, ибо величины ея, равныя по-дѣлу, но имѣющія противоположные знаки, опредѣляются уравненіемъ 6-й степени, которое можетъ быть приведено непосредственно къ 3-ей. Для полученія какой ни есть изъ системъ (a) и (b) слѣдуетъ только составить произведеніе трехъ множителей

$$z - (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2$$

$$z - (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)^2$$

$$z - (x_1 + x_4 - x_2 - x_3)^2$$

которое, въ слѣдствіе известныхъ отношеній

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = p$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -q$$

$$x_1x_2x_3x_4 = r,$$

приведетъ къ уравненію третьей степени

$$u^3 + 2pu^2 + (p^2 - 4r)u - q^2,$$

гдѣ $u = \frac{1}{z}$. — Изобразивъ чрезъ u_1, u_2, u_3 корни этого уравненія. Соотвѣстственными величинами z будутъ $z_1 = 4u_1, z_2 = 4u_2, z_3 = 4u_3$; слѣдовательно, значенія функций (a) и (b) опредѣлятся формулами

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2\sqrt{u_1}, \quad x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -2\sqrt{u_1}$$

$$x_1 + x_3 - x_2 - x_4 = 2\sqrt{u_2}, \quad x_1 + x_3 - x_2 - x_4 = -2\sqrt{u_2}$$

$$x_1 + x_4 - x_2 - x_3 = 2\sqrt{u_3}, \quad x_1 + x_4 - x_2 - x_3 = -2\sqrt{u_3}.$$

Замѣтимъ, что всякія другія перестановленія величинъ $2\sqrt{u_1}, 2\sqrt{u_2}, 2\sqrt{u_3}, -2\sqrt{u_1}, -2\sqrt{u_2}, -2\sqrt{u_3}$ не произведутъ новыхъ смесей, какъ только изъ дѣл, которыя здѣсь приведены. Что касается до выбора одной изъ двухъ смесей то увидимъ, точно такъ какъ мы было объяснено въ способѣ Эйлера, что должно принять первую, когда $q < 0$, а вторую, когда $q > 0$.

Первая система приводимъ къ формуламъ

$$x_1 = \frac{1}{2} (+ \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3})$$

$$x_2 = \frac{1}{2} (+ \sqrt{u_1} - \sqrt{u_2} - \sqrt{u_3})$$

$$x_3 = \frac{1}{2} (- \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} - \sqrt{u_3})$$

$$x_4 = \frac{1}{2} (- \sqrt{u_1} - \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}),$$

а вторая даетъ

$$x_1 = -\frac{1}{2} (+ \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3})$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} (+ \sqrt{u_1} - \sqrt{u_2} - \sqrt{u_3})$$

$$x_3 = -\frac{1}{2} (- \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} - \sqrt{u_3})$$

$$x_4 = -\frac{1}{2} (- \sqrt{u_1} - \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}).$$

BI RECTANGLE (TRIANGLE). (Геом.) ДВОЙКО-ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИКЪ.

Такъ называется сферическій треугольникъ, имѣющій два угла прямые. *Трѣуго-прямоугольный (tri-rectangle)*, называется такой сферическій треугольникъ, у котораго всѣ три угла прямые.

BISEAU. ГРАБЪ.

BISSECTION или **BIPARTITION. РАЗДѢЛЕНІЕ ПОПОЛАМЪ, НА ДВѢ РАВНЫЯ ЧАСТИ, ДВУСЧЕНІЕ.** *Bissection de l'angle, раздѣленіе угла пополамъ. Bissection d'une ligne, раздѣленіе линіи на двѣ равныя части.*

BISSEXTE или **INTERCALAIRE. (Хрол.) ВСТАВочный, ПРИВАВочный, ДОПОЛНительный.** *Jour intercalaire, вставочный день;* день прибавляемый къ простому году для полученія високоснаго.

BISSEXTILE (ANNÉE). (Хрол.) ВИСКОСНый ГОДЪ, ВИСКОСЪ и ВИСКОСЪ. С. ANNÉE.

BIVEAU. Сноп. BEVEAU.

ВО.

BODE (LOI DE). (Астр.) ЗАКОНЪ БОДЕ. Такъ называется законъ, относящійся къ среднимъ расстояніямъ планетъ отъ солнца, найденный эмпирически Берлинскимъ астрономомъ Бодѣ. Въ слѣдствіе этого закона расстоянія планетъ отъ солнца, выраженные въ цѣлыхъ числахъ, будутъ слѣдующія:

$$\text{Меркурій} \dots\dots 4 \quad = 4$$

$$\text{Венера} \dots\dots 4 + 3.2^0 = 7$$

$$\text{Земля} \dots\dots 4 + 3.2^1 = 10$$

$$\text{Марсъ} \dots\dots 4 + 3.2^2 = 16$$

$$\dots\dots 4 + 3.2^3 = 28$$

$$\text{Юпитеръ} \dots\dots 4 + 3.2^4 = 52$$

$$\text{Сатурнъ} \dots\dots 4 + 3.2^5 = 100$$

$$\text{Уранъ} \dots\dots 4 + 3.2^6 = 196;$$

здесь расстояние земли от солнца принимается равным 10. И такъ, если означимъ чрезъ l число разширивающей планеты, считая по порядку отъ Венеры, то расстояние той планеты отъ солнца, должно быть, по закону Бода,

$$4 + 3 \cdot 2^{n-1}.$$

Промежутокъ между Марсомъ и Юпитеромъ очевиденъ: и действительно, известно чинъ въ этомъ пространствѣ въ позднѣйшія времена открыты четыре малыя планеты: Церера, Паллада, Юнона и Веста. Можетъ быть когда нибудь онъ и составляли одну планету, коей удаленіе отъ солнца равнялось 28, по закону Бода. Расстояние Цереры подходитъ довольно близко подъ упомянутый законъ; действительно, по опредѣленію Гаусса, это расстояние изображается числомъ 27,67, которое мало разнится отъ 28.

BOIS (RÉSISTANCE DES). (Мех.) **СОПРОТИВЛЕНИЕ ДЕРЕВА.** Многие авторы занимались теоріею и практикою задачи, состоящей въ опредѣленіи законовъ сопротивленія дерева, подвергаемаго разнаго рода усиліямъ, какъ то: давленію параллельному и перпендикулярному къ его волокнамъ, скручиванію, нагибанію и проч. Чтобы дать понятіе о родѣ изысканій по этому предмету, мы приводимъ одинъ результатъ, получаемый изъ теорій, и согласующійся съ показаніями опыта:

Если прямоугольный брусъ АВ (черт. 18 листъ II), коего длина АВ = l , высота CD = h , ширина BC = a , будетъ однимъ концемъ наглухо утверждёнъ въ стволѣ LM, то другимъ концемъ своимъ онъ можетъ сдерживать вѣсъ $P = K \cdot \frac{ah^2}{l}$, гдѣ K изображаетъ постоянный коэффициентъ, зависящій отъ крепости того дерева, которое подвергается испытанію. Съ увеличеніемъ груза P , брусъ переломится около прикреплённаго конца А. —

Задача о сопротивленіи дерева весьма важна въ Архитектурѣ и въ Кораблестроительномъ Искусствѣ. Читатели найдутъ надлежащія подробности по сему предмету въ сочиненіяхъ: Duhamel, Traité sur la résistance des bois, Girard, Traité analytique de la résistance des solides; Resume des leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la Mécanique, par Navier; Handbuch der Statik fester Körper, von Eytelwein, Berlin 1808. Gehlers neues physikalisches Lexikon, статья Cohésion.

BOMBELLI (RÈGLE DE). См. BIQUADRATIQUES (EQUATIONS).

BOMBES (JET DES). БРОСАНІЕ, МЕТАНІЕ БОМБЪ. См. см. BALISTIQUE.

BONTÉ DES OBSERVATIONS. (Исч. Вѣр.) **ДОСТОИНСТВО, ТОЧНОСТЬ НАБЛЮДЕНІЙ.**

Достоинство или точность наблюдений зависитъ отъ искусства наблюдателя и отъ вѣрности употребляемыхъ имъ инструментовъ. Всего желательнѣе, при дѣланіи наблюдений, чтобы тѣло, сложеніе наблюдателя и устройство инструмента не производили постоянныхъ погрѣшностей; но если отъ несовершенства инструмента будутъ происходить погрѣшности въ одну и ту же сторону какъ и отъ физическаго недосмотра наблюдателя, то въ такомъ случаѣ, нельзя уже положиться на сдѣланные наблюденія. При одинаковой же вѣроятности погрѣшностей положительныхъ и отрицательныхъ, можно, числомъ наблюдений, вознаградиться недосмотрами въ ихъ точности, и уменьшивъ погрѣшности до какой угодно степени.

Еслибы желали сравнить точность среднихъ выводовъ, полученныхъ изъ нѣсколькихъ рядовъ наблюдений, то надлежало бы поступить слѣдующимъ образомъ: пусть будутъ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ значенія какой нибудь величины, составляемыя первымъ рядомъ наблюдений; $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ значенія той же величины, выведенныя изъ втораго ряда наблюдений; и такъ далѣе. Предположивъ для краткости $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m = \sum a$, $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_m^2 = \sum a^2$, $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = \sum b$, $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_n^2 = \sum b^2$, и проч. составляемъ функціи

$$\begin{aligned} \Delta a^2 &= \frac{(\sum a)^2}{m} \\ \Delta b^2 &= \frac{(\sum b)^2}{n} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

и смотримъ, который изъ нихъ будетъ наименьшимъ изъ всѣхъ. Средняя, соответствующая ряду наблюдений, для котораго приведенная сейчасъ функція есть наименьшая, должна быть предпочтена всѣмъ другимъ.

BORÉAL. (Астр.) **СѢВЕРНЫЙ, ПОЛУНОЩНЫЙ.**

Pôle boréal, сѣверный полюсъ.

BORNE. (Земл.) **МЕЖА, ГРАНЬ.**

BOUGE. ВЪЗРЪНТАВЪ. Смют. JAUGE.

BOUZOLE, COMPAS DE MEE. КОМПАССЪ,

БУССОЛЬ. — У просколюдиновъ **МАТКА**.

Спидальная намагнитченная игла или стрѣлка, надѣтая на идиное остріе, и свободно обращающаяся около него въ горизонтальномъ направленіи. Для предохраненія стрѣлки отъ движенія воздуха, заключаютъ ее обыкновенно въ круглую коробку (называемую у просколюдиновъ *латогниками*), дѣлаемую изъ дерева или мѣди. На днѣ коробки находится кругъ, коего центръ совпадаетъ съ основаніемъ острія, около котораго обращается стрѣлка. Кругъ обыкновенно раздѣленъ на 360 градусова; для употребленія же на морѣ, на 52 часинъ, называемыхъ *румбами вѣтровъ* (*rumbes d's vents*). Указанія компаса были бы точныи, еслибъ стрѣлка сохраняла, въ одномъ мѣстѣ, одно и то же направленіе. Къ сожалѣнію, на самомъ дѣлѣ этого не бываетъ, почему измѣненіе въ направленіи магнитной стрѣлки не можешь служить, въ строгомъ смыслѣ, для опредѣленія положенія мѣста; и дѣйствительно, мы остаемся въ неувѣренности на счетъ того, произошло ли это измѣненіе отъ перемѣны мѣста, или отъ движенія магнитной стрѣлки, независимаго отъ перемѣны мѣста. Но такъ какъ перемѣны склоненія никогда не бываютъ слишкомъ значительныи, по крайней мѣрѣ для промежутка времени довольно малаго, то несмотря на упомянутую неопредѣленность при наблюденіи компаса, онъ будетъ всегда неоцѣненнымъ пособіемъ для мореплавателей. — Во многихъ случаяхъ, компасъ съ пользою употребляется и при съѣзжѣ плановъ.

Опкрышіе компасовъ относились обыкновенно къ концу XIII вѣка, и приписываютъ Неаполитанцу *Флаво де Гіоіа*, (*Flavio de Gioia* или *Gioja*). Впрочемъ не знаемъ положительныхъ образовъ, кто именно былъ изобрѣтателемъ этого инструмента; некоторые думаютъ, что Французскіе мореплаватели уже знали употребленіе компаса въ XII столѣтіи.

Для дальнѣйшихъ подробностей о свойствахъ магнитной стрѣлки, описываетъ читателей къ спашкъ: **MAGNETISME**.

III.

BRACHYSTOCHROME или **LIGNE DE LA PLUS VITE DESCENTE**. (Мех.) **БРАХИСТОХРОНА**,

КРАТЧАЙШЕВРЕМЕННАЯ, КРИВАЯ НАИСКОРѢЙШАГО СКАТА. Кривая линія по которой тѣло, побуждаемое одною силою шжескии, переходитъ изъ одной точки въ другую въ кратчайшее время.

Въ 1697 году, *Иванъ Бернулли*, бывший тогда профессоромъ Математики въ Гронингенѣ, предложилъ геометранъ, въ видѣ вызова, задачу о кривой наискорѣйшаго ската, названной итъ *Брахи-стохроническою*, отъ Греческихъ словъ: *βραχύτος*, *кратчайшій* и *χρόνός*, *время*. Задача состояла въ опредѣленіи линіи *АСВ* (черт. 19, листъ II), извѣющей по свойству, что если изъ точки *А* будетъ опущено тѣло, то оно, двигаясь по кривой линіи *АСВ*, должно достигнуть точки *В* въ меньшій промежутокъ времени, какъ еслибъ, шширъ, переходило прямую *АЕВ*, или двигалось по какой либо другой кривой линіи *ADB*. *Лейбницъ* рѣшилъ задачу въ самый день полученія программы отъ *Ивана Бернулли*. Оба условились не открывать никому своихъ рѣшеній, и дать другимъ математикамъ цѣлый годъ времени для соизнанія, о чемъ и было объявлено *Иваномъ Бернулли* почти во всѣхъ журналахъ. До истеченія назначеннаго срока, и почти въ одно время, были обнаружены при другія рѣшенія *Брахи-стохронической задачи*. Авторы ихъ были: *Акобъ Бернулли*, профессоръ Математики въ Базелѣ (братъ *Ивана Бернулли*), *Маркизъ де Л'Опиталъ* и *Ньютонъ*. Рѣшеніе послѣдняго было наидо безъ имени сочинителя въ *Philosophical Transactions* Лондонскаго Королевскаго Общества; но *Иванъ Бернулли* опитада помѣстить автора по *звѣстнымъ* *когтмля* (*tanquam ex ungue leonem*).

Всѣ эти рѣшенія привели къ тому заключенію, что *кривая наискорѣйшаго ската есть циклоида съ горизонтальными основаніемъ АЕ*, что она *обращена выуклостію внизъ*, и *падаетъ нагаламъ своихъ толку А*, изъ которой опускается тѣло. Смют. **CYCLOIDE**. Если къ *брахи-стохронизму* циклоиды прибавимъ ея *тавтохронизмъ* (Смют. **TAUTOCHRONISME**) и еще многообразныя геометрическія свойства, то должимъ будетъ поставить эту кривую на ряду съ самыми примѣательными.

Можетъ быть некоторые читатели, незна-комые съ соображеніями механическими, при пер-

воля воззрѣвъ на задачу *Брахистохроны*, будутъ думать, что прямая линія *АВ*, какъ крайчайшій путь между двумя точками *А* и *В*, удовлетворяетъ вопросу. Безъ пособія математическаго анализа трудно доказать ошибочность такого заключенія. Однако же мы думаемъ, что нѣкоторые, весьма простые сужденія, могутъ, если не убѣдить читателя въ справедливости рѣшенія посредствомъ *циклоиды*, то, по крайней мѣрѣ, поселить въ его умѣ сомнѣнїе на счетъ брахистохронности прямой линїи. Дѣйствительно, замѣтимъ, что тѣло, опускаемое по дугѣ *АС*, приближающейся болѣе неже ли *АВ* къ вертикальной линїи *АС*, тѣмъ самымъ приобретаетъ въ меньшее время извѣстную скорость, почему перейденное тѣломъ пространство можетъ быть значительнѣе того, которое бы оно перешло, еслибѣ двигалось по прямой *АВ*. И такъ, прямая линія *АВ* можетъ быть перейдена тѣломъ въ больший промежутокъ времени, нежели дуга *АС*; отсюда заключаемъ, что то же самое можетъ случиться и относительно цѣлой прямой *АВ* и дуги *АСВ*. Следовательно, нѣтъ никакой явной невозможности, чтобы тѣло, двигаясь по кривой *АСВ*, достигло точки *В* въ меньшее время, какъ еслибѣ оно было опущено по прямой линїи *АВВ*.

Прежде Ивана Бернулли задача о *Скорѣйшей* была уже предпринята, если не спротивъ геометрическихъ изслѣдованій, то по крайней мѣрѣ нѣкоторыхъ умственныхъ соображеній. Галилей думалъ, но ошибочно, что дуга круга удовлетворяетъ условію. Состояніе Геометріи въ то время не позволяло еще приступить къ рѣшенію такого рода вопросовъ. Иныя, задача Брахистохроны и другія ей подобныя, напримѣръ, задачи объ *изопериметрахъ* (см. ISOPERIMETRE), рѣшаются легкимъ, единообразнымъ способомъ, основаннымъ на Варіаціонномъ Ичисленіи.

Теперь приведемъ, въ немногихъ словахъ, аналитическое рѣшеніе Брахистохронической задачи. Для краткости мы допустимъ (что впрочемъ можетъ быть легко доказано), что *Брахистохрона* есть *плоская* кривая, заключающаяся въ вертикальной плоскости, проходящей чрезъ двѣ данныя точки *А* и *В* (черт. 19 листъ II). Примемъ линію *АВ* за ось *x*, а *АР* за ось *y*, и сдѣлаемъ *АР* = *x*, *РВ* = *y*. Положимъ, что тѣло, по истеченіи

времени *t*, достигло положенія *М*; единственная сила дѣйствующая на него, будетъ сила тяжести, которую изобразимъ чрезъ *g*. Чтобы найти ускорительную силу, производящую движеніе, надобно разложить вертикальную силу *g* на двѣ другія, именнѣ, на нормальную по направленію *MN*, которая не произведетъ никакого движенія, и на силу направленную по касательной *MT* къ кривой. Эта послѣдняя сила, производящая движеніе, выразится чрезъ $g \cos \alpha$, разукъ α уголь, составляемый касательною *MT* съ направленіемъ *Mg*, или, что все равно, съ осью *x*. Но извѣстно что $\cos \alpha = \frac{dx}{ds}$; следовательно, ускорительная сила выразится чрезъ $g \frac{dx}{ds}$. Если изобразимъ дугу *AM* чрезъ *s*, то общее выраженіе ускорительной силы будетъ $\frac{d^2s}{dt^2}$ и такъ

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \frac{dx}{ds}$$

откуда, умноживъ на $2ds$, и взявъ интегралъ

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2gx.$$

Мы не прибавляемъ постоянного количества по той причинѣ, что отношеніе $\frac{ds}{dt}$, изображающее скорость тѣла, по предположенію равно нулю, когда $x = 0$. Изъ послѣдьяго уравненія выводимъ

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{ds}{\sqrt{x}}.$$

Но извѣстно (Смол. ARC), что

$$ds = dx \sqrt{1+y'^2} \quad \text{гдѣ} \quad y' = \frac{dy}{dx};$$

следовательно

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{x}} dx.$$

Чтобы получить *наименьшее значеніе* для *t*, сгѣдуетъ, по правиламъ Ичисленія Варіацій, положить $\delta t = 0$, или, что все равно,

$$\delta \left[\frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{x}} dx \right] = 0,$$

откуда выводимъ [Смол. VARIATIONS (CALCUL DES)]

$$d \left(\frac{d \cdot \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{x}}}{dy'} \right) = 0 \quad \text{или} \quad d \left(\frac{y'}{\sqrt{x} \cdot (1+y'^2)} \right) = 0.$$

Интегрируя послѣднее уравненіе, находимъ

$$\frac{y'}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1+y'^2}} = c,$$

откуда

$$y' = \frac{e' \omega}{\sqrt{1 - e'^2 \omega}} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{1}{e'^2} \omega - \omega^2}}.$$

Написавъ 2а въмѣсто $\frac{1}{e'^2}$, и замѣнивъ величину y' , равною ей $\frac{dy}{dx}$, найдемъ дифференціальное уравненіе

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}},$$

принадлежащее *циклоидѣ*. Разборъ этого уравненія покажетъ, что опредѣляемая имъ циклоида имѣетъ дѣйствиительно то положеніе, которое изображено на чертѣжѣ.

Заключимъ эту статью указаніемъ на одно приложеніе теоріи брахистохронической кривой: мы разумѣемъ *Русскія горы*. Изъ приведеннаго свойства циклоиды слѣдуетъ, что самый выгодный видъ, какой только можно дать скапу горы, есть *циклоидальный*. Правда, въ строгомъ смыслѣ, по причинѣ сопротивленія воздуха, надлежало бы принять другую трансцендентную кривую линію, болѣе сложную, уравненіе которой было выведено Эйлеромъ; но такъ какъ сопротивленіе воздуха въ случаѣ искусственныхъ горъ имѣетъ малое вліяніе на видъ кривой, то можно будетъ, съ достаточною точностію, допустить циклоиду, какъ сказано было выше. Спроектировали горы, руководствуемые однимъ опытомъ, приведены были къ результату, согласному съ выводомъ вычисленія: дѣйствительно, мы видимъ, что форма скапа горы не разнилась чувствительнымъ образомъ отъ циклоидальной.

BRACHYSTOCHRONISME. (Мех.) БРАХИСТОХРОНИЗМЪ, КРАТЧАЙШЕВРЕМЕННОСТЬ.

Свойство, по которому какая либо линія, вѣдущая описываема движущимся тѣломъ въ самое короткое время. См. выше.

BRANCHE. (Геом.) ВѢТВЬ. *Branche d'une courbe, есть кривой линіи.* Нѣкоторая часть кривой линіи, конечная или безконечная. Впрочемъ значеніе этого слова не совсемъ опредѣлено. Можно, кажется, назвать вѣтвью непрерывную часть кривой, отдѣльную отъ прочихъ ея частей. Въ этомъ смыслѣ *парабола* имѣетъ *одну вѣтвь*, а *гипербола*, *два*. Иногда двѣ различныя вѣтви одной и той же кривой, могутъ пересѣкаться. Въ такомъ случаѣ точка пересѣченія называется *кратною*. См. COURBE, SINGULIERS (POINTS).

BRANCHE INFINIE. Безконечная вѣтвь. Вѣтвь, простирающаяся въ безконечность. Гипербола имѣетъ *безконечныя вѣтви*.

BRANCHES PARABOLIQUES. Параболическія вѣтви; такъ называемыя вѣтви, которыя могутъ имѣть ассимптотую *параболу* второй или высшей степени. Такъ напримѣръ кривая, опредѣляемая уравненіемъ $y = \frac{x^2}{a} + \frac{b^2}{x}$, имѣетъ *параболическую безконечную вѣтвь*, коей ассимптотой служить обыкновенная парабола, выражаемая уравненіемъ $y = \frac{x^2}{a}$.

BRANCHES HYPERBOLIQUES. Гиперболическія вѣтви; вѣтви, имѣющія своимъ ассимптотами или прямую линію, или гиперболу второй или высшей степени. Напримѣръ, кривая, опредѣляемая уравненіемъ $y = \frac{x^3}{a^2} + \frac{b^3}{x^2}$, имѣетъ ассимптотическую ось ординатъ, а также гиперболу третьей степени, коей уравненіе есть $y = \frac{b^3}{x^2}$. См. ASYMPTOTE.

BRAS DU LEVIER. (Мех.) ПЛЕЧО РЫЧАГА. См. LEVIER.

BRAS DU COUPLE. Плечо пары. См. COUPLE. **BRICOLE. (Мех.) ОТРАЖЕНІЕ; БРИКОЛЬ.** *Par bricole, чрезъ отраженіе.* Слово *bricole* употребляется иногда исключительно въ бильярдной игрѣ.

BRIGG (LOGARITHMES DE). БРИГГОВЫ ЛОГАРИТМЫ. Обыкновенные логаритмы, имѣющіе основаніемъ число 10. См. LOGARITHME.

BRILLANT (POINT). (Теор. Тѣл.) БЛЕСТАЮЩАЯ ТОЧКА. Когда выношенное тѣло освѣщено солнцемъ или другимъ свѣтящимся тѣломъ, то на первомъ усматривается свѣтлая *изображенія*, именувая *блестящая линія*. Но если вѣтвь свѣтлагого тѣла приметъ въ разсѣпленіе свѣтлагого тѣла, то на выношенной поверхности замѣчаемъ точки, отражающія свѣтъ въ глазъ зрителя; эти точки называются *блестящими*.

Для опредѣленія блестящей точки на поверхности какого нѣ есть тѣла, пообразуемъ *эллипсоидъ вращенія* касательный къ данной поверхности, и имѣющій свои *фокусы* въ глазъ зрителя и въ свѣтящееся тѣло. Точка касанія предположенной поверхности и эллипсоида будетъ исконая *блестящая точка*, ибо нормаль эллипсоида въ

этой точки раздѣлится пополамъ уголъ, составленный лучемъ паденія и лучемъ отраженія, и, сверхъ того, эта нормаль заключится въ плоскости обоихъ лучей. Когда лучи свѣта параллельны между собою, то вѣсно, что плоскостнаго алмазосада получить *параболоидъ грациѣ*, коего ось параллельна лучамъ свѣта, и проходить чрезъ глазъ зрителя. Нормаль въ точкѣ касанія, какъ и прежде, будетъ раздѣлять пополамъ уголъ, заключенный между направлениемъ падающаго и отраженнаго луча, и будетъ находиться въ плоскости сихъ двухъ лучей. См. CATOPTRIQUE, INCIDENCE (ANGLE D').

На этомъ основаніи, для построенія блестящей точки, поступаемъ слѣдующимъ образомъ:

1°. Въ предположеніи свѣтающей точки.

Глазъ зрителя и свѣтающаяся точку соединяемъ прямою, и изъ каждой точки сей послѣдней проводимъ нормали къ данной поверхности. Кривая, проходящая чрезъ точки въспрѣчи сихъ нормалей съ поверхностью, будетъ геометрическимъ мѣстомъ блестящей точки. Далѣе, определяемъ на каждой нормалѣ такую точку M , чтобы, соединивъ ее съ глазомъ O наблюдателя и съ блестящею точкою B , уголъ OMB дѣлился пополамъ тою же нормалью. Новая кривая, проходящая чрезъ всѣ точки, найденныя такимъ образомъ на нормаляхъ, будетъ также геометрическимъ мѣстомъ блестящей точки. Пересѣченіе двухъ кривыхъ опредѣлитъ блестящую точку.

2°. Въ предположеніи лучей свѣта, параллельныхъ между собою.

Чрезъ глазъ наблюдателя проводимъ прямую, параллельную лучамъ свѣта; потомъ, изъ всѣхъ точекъ этой прямой опускаемъ нормали на данную поверхность. Основанія нормалей на поверхности образуютъ кривую, которая будетъ геометрическимъ мѣстомъ блестящей точки. Далѣе, на каждой нормалѣ вѣдемъ такую точку, чтобы, соединивъ ее съ глазомъ зрителя, и проведя отъ нея прямую параллельную направленію лучей, уголъ, составленный сими двумя прямыми, дѣлился пополамъ тою нормалью. Кривая, проходящая чрезъ всѣ точки, найденныя сплѣтеномъ на нормаляхъ, будетъ другимъ геометрическимъ мѣстомъ блестящей точки, а пересѣченіе двухъ кривыхъ очевидно опредѣлитъ искомую блестящую точку.

BRISÉE (LIGNE). (Геом.) ЛОМАНАЯ ЛИНІЯ.

Когда нѣсколько прямыхъ линій, взятыхъ по-дѣѣ, встрѣчаются подъ угломъ различныиъ отъ двухъ прямыхъ, то совокупность ихъ называется *ломаною линіею*.

BRUIT, ПУМЪ. СМОН. ACOUSTIQUE, SON.

BRULANTE (COURBE). СМОН. CAUSTIQUE.

MUSQUES (CHANGEMENTS — DE LA VITESSE).

(Мех.) **ВНЕЗАПНЫЕ ПЕРЕМѢНЫ СКОРОСТЕЙ.** Перемѣны почти мгновенныя въ скорости движущагося тѣла. Геометры прошедшаго столѣтія думали, что тѣло можетъ вдругъ измѣнить свою скорость, и они называли силы, способныя произвести такое дѣйствіе *мгновенными* или *побудительными* (*forces instantanées* или *impulsives*). Тѣ же геометры весьма тщательно оппачали силы мгновенныя отъ силъ ускорительныхъ, и допускали, что перемѣны безконечно велики въ оппаченіи къ послѣднимъ.

Геометры нашего вѣка и другаго мнѣнія: они убѣждены въ невозможности мгновеннаго измѣненія скорости; никакая скорость не можетъ измѣниться въ другую, чувствительно различную отъ первой, не перейдя чрезъ всѣ промежуточные сепенки. Такъ думалъ и Эйлеръ. — Можно сказать, что *внезапныя перемѣны* не иное что, какъ измѣненія скорости весьма быстрыя, но не мгновенныя. Такого рода перемѣны замѣчаемъ напримѣръ при ударѣ тѣла; отъ происхожденія отъ дѣйствія силъ весьма значительныхъ, но не безконечныхъ. —

BURMANN (SÉRIE DE). (Анал.) **БЮРМАНОВЪ**

РЯДЪ. Такъ называется рядъ, служащій для разложенія данной функціи $f(x)$ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ другой функціи $\varphi(x)$ той же переменной x . Этотъ рядъ найденъ *Бюрманомъ* (*Burmman*), Профессоромъ въ Мангеймѣ, который, въ 1796 году, представилъ свое оппаченіе на разсмотрѣніе въ Французскій Институтъ. Вотъ въ чемъ состоятъ теорема Бюрмана:

Пусть будетъ X данная функція переменной x , а μ другая функція той же переменной; введемъ разложеніе X по цѣлымъ положительнымъ степенямъ функціи μ .

Такъ какъ X можно принимать за функцію числа n , то, по Маклореновой теоремѣ, получимъ

$$X = U_0 + U_1 u + U_2 \frac{u^2}{1.2} + U_3 \frac{u^3}{1.2.3} + \dots + U_n \frac{u^n}{1.2.3 \dots n} + \text{и проч.}$$

гдѣ U_0, U_1, U_2, \dots изображаютъ значенія X , $\frac{dX}{du}, \frac{d^2X}{du^2}, \dots$ для $u = 0$; и вообще U_n найдемся по формулѣ

$$U_n = \frac{d^n X}{du^n},$$

въ которой, послѣ всѣхъ дифференцированій, должно положить $u = 0$.

Преобразование, предложенное Бюрнаноу, состоитъ въ томъ, что

$$(1) \quad \frac{d^n X}{du^n} = \frac{d^{n-1} \left[\frac{dX}{dz} \left(\frac{z}{u} \right)^n \right]}{dz^{n-1}},$$

разукая подъ z и u двѣ функціи переменной x , уничтожающіяся въ одно время, но отношеніе которыхъ остается конечнымъ. Сверхъ того, по совершеніи дифференцированій, означенныхъ во второй части послѣдняго уравненія, должно сдѣлать $z = 0$. И такъ, рядъ Бюрнана будетъ слѣдующій:

$$(2) \quad X = X_0 + \left[\frac{dX}{dz} \left(\frac{z}{u} \right) \right] \frac{u}{1} + \frac{d \left[\frac{dX}{dz} \left(\frac{z}{u} \right)^2 \right]}{dz} \cdot \frac{u^2}{1.2} + \frac{d^2 \left[\frac{dX}{dz} \left(\frac{z}{u} \right)^3 \right]}{dz^2} \cdot \frac{u^3}{1.2.3} + \dots + \frac{d^{n-1} \left[\frac{dX}{dz} \left(\frac{z}{u} \right)^n \right]}{dz^{n-1}} \cdot \frac{u^n}{1.2.3 \dots n} + \text{и пр.}$$

гдѣ X_0 означаетъ значеніе X для $z = 0$; ясно, что и во всѣхъ координатныхъ перѣдъ различными

смененіи и должно будетъ, послѣ дифференцированій сдѣлать $z = 0$.

Изъ формулы (2) очень легко вывести известнѣйшій рядъ Лагранжа; для этого положимъ

$$z = x - a, \quad u = \frac{x-a}{\varphi(a)}, \quad dz = dx,$$

откуда

$$x = a + u \varphi(a),$$

и слѣдовательно, полагая $X = \psi(x)$ и $z = 0$, имеемъ рядъ Лагранжа

$$\psi(x) = \psi(a) + \varphi(a) \psi'(a) \cdot \frac{u}{1} + \frac{d[\psi'(a) \varphi(a)^2]}{da} \cdot \frac{u^2}{1.2} + \frac{d^2[\psi'(a) \varphi(a)^3]}{da^2} \cdot \frac{u^3}{1.2.3} + \text{и проч.}$$

Сдѣлаемъ другое приложеніе формулы (2). Положимъ, что желаемъ разложить функцію a^x по цѣлымъ положительнымъ степенямъ произведенія ab^x . Найдемся $X = a^x$, $u = ab^x$, и слѣдовательно можно принять $z = x$; и такъ

$$a^x = 1 + \log a \cdot \frac{ab^x}{1} + \log a (\log a - 2 \log b) \cdot \frac{a^2 b^{2x}}{1.2} + \log a (\log a - 2 \log b)^2 \cdot \frac{a^3 b^{3x}}{1.2.3} + \log a (\log a - 2 \log b)^3 \cdot \frac{a^4 b^{4x}}{1.2.3.4} + \dots$$

гдѣ \log означаетъ Логарифмъ истинный.

Доказательство формулы (1) читателю предложить въ книгахъ: Legendre: *Exercices du Calcul Intégral*, Том II стр. 289; Lacroix: *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*, 2-ое изд. Томъ III стр. 623; Supplemente zu Klügels Wörterbuche der reinen Mathematik, 1855. Томъ I стр. 341.

SABESTAN или VINDAS. (Мех.) **ПШЕЛЬ, ВЕРТИКАЛЬНЫЙ ВОРОТЪ.** Деревянная, желѣзная или стальная машина, состоящая изъ вертикальнаго вала (или усѣченного конуса), которому сообщается вращательное движеніе посредствомъ продѣтыхъ сквозь него горизонтальныхъ шестовъ. При шатковомъ движеніи каната, прикрѣпленнаго къ валу, навивается на него, а грузъ, прижатый къ другому концу каната, поднимается, или подвигается впередъ. *Пшеля* преимущественно употребляютъ

на корабляхъ для подниманія якорей. — Что касается до условій равновѣсія на этой машинѣ, то отсылаемъ читателя къ статьѣ: TREUIL. **CADRE SOLAIRE.** (Гном.) **КВАДРАТЪ, СОЛНЕЧНЫЕ ЧАСЫ.** Снарядъ, помощью котораго, при солнечномъ свѣтѣ, узнается часъ дня; или, иначе, поверхность, на которой утверждены математическій прутъ (чаще всего параллельный земной оси), ось котораго сама, совпадая постепенно съ начерченными на той же поверхности

движеніи (называемыми *часовыми*), показывает солнечное время. Въ статьѣ: **GNOMONIQUE**, читателямъ найдутъ правила для воспріятія астрономическихъ квадратовъ.

CADREAN ÉQUINOXIAL. Равноденственный или экваториальный квадратъ. Квадратъ, коего плоскость параллельна плоскости экватора.

CADREAN ÉQUINOXIAL PORTATIF или **ANNEAU ASTRONOMIQUE**. Астрономическое кольцо.

Квадратъ, въ родѣ экваториальнаго, который можешь быть употребленъ во всякомъ мѣстѣ.

CADREAN SPHERIQUE. Сферическій квадратъ. Квадратъ, коего поверхность есть сферическая.

CADREAN HORIZONTAL. Горизонтальный квадратъ. Такъ называющіеся солнечныя часы, коихъ плоскость горизонтальна.

CADREAN MÉRIDIONAL. Полуденный квадратъ. Квадратъ вертикальный, коего плоскость перпендикулярна къ земной оси, и обращена къ югу.

CADREAN SÉPENTRIONAL. Полуночный квадратъ. Квадратъ вертикальный, обращенный прямо къ северу.

CADREAN ÉSTÉRIEUR. Восточный квадратъ. Квадратъ вертикальный, коего плоскость обращена прямо къ востоку.

CADREAN OCCIDENTAL. Западный квадратъ. Квадратъ вертикальный, обращенный прямо къ западу.

CADREAN POLAIRE. Полярный квадратъ. Квадратъ, коего плоскость соединяется съ горизонтомъ угломъ, равнымъ высотѣ полюса. Если квадратъ обращенъ къ *зениту*, то называется *верхнимъ полярнымъ* (*cadran polaire supérieur*); если же къ *надиру*, то именуется *нижнимъ полярнымъ* (*cadran polaire inférieur*).

CADREAN VERTICAL DÉCLINANT. Вертикальный склоняющійся квадратъ. Квадратъ, начертанный на вертикальной плоскости, на примѣръ на стѣнѣ, имѣющей какой угодно азимутъ.

CADREAN SANS CENTRE. Безцентренный квадратъ. Когда плоскость вертикальнаго квадрата имѣетъ значительное склоненіе къ востоку или западу, то центръ квадрата такъ удаленъ, что не можешь быть назначенъ на его плоскости.

Такого рода квадратъ называется *безцентреннымъ*. **CADREAN INCLINÉ ET DÉCLINANT**. Наклонный склоняющійся квадратъ, коего плоскость имѣетъ произвольный, какъ наклоненіе, такъ и склоненіе.

CADREAN SANS STYLE PAR LA HAUTEUR DU SOLEIL.

Квадратъ безъ указателя, показывающій время посредствомъ высоты солнца.

CADREAN UNIVERSEL PAR LES HAUTEURS DU SOLEIL, или **LE CAPUCIN**. Всюобщій квадратъ, показывающій время посредствомъ высоты солнца.

CADREAN ANALÉMATIQUE или **AZIMUTAL**. Азимутическій квадратъ. Горизонтальный квадратъ съ вертикальнымъ указателемъ, отъ котораго стѣна, совпадающая съ различными точками элипса, на плоскости квадрата начертаннаго, показывается часть дня.

CADREAN CYLINDRIQUE PAR LES HAUTEURS. Цилиндрический квадратъ, показывающій время посредствомъ высоты солнца.

CADREAN AUX ÉTOILES. Звѣздный квадратъ или Мюнстерскій обшникъ (*nocturnal de Munster*). Квадратъ, показывающій время, помощію наблюденія звѣздъ.

CADREAN DE LA LUNE или **CADREAN LUNAIRE**. Лунный квадратъ. Квадратъ, показывающій время при лунномъ свѣтѣ.

CALCUL. (Мат.) **ИСЧИСЛЕНІЕ, ВЫЧИСЛЕНІЕ, ВЫКЛАДКА**. Совокупность различныхъ действий, производимыхъ надъ величинами, которые изображены или буквами, или числами. Въ первомъ случаѣ употребляютъ преимущественно слово: *исчисленіе*, а во второмъ — *выкладка*. *Calculs algébriques*, *алгебраическія вычисленія*; *calculs arithmétiques*, *арифметическія выкладки*.

Подъ *исчисленіемъ* разумеютъ также какую либо отдѣльную часть Математики. Въ такомъ случаѣ прибавляютъ къ этому слову прилагательное; на примѣръ, говорятъ: *Дифференціальное*, *Интегральное исчисленіе*, *исчисленіе Вѣроятностей* и проч. Смол. **DIFFÉRENTIEL**, **INTEGRAL**, **PROBABILITES**, и проч.

CALCULS ASTRONOMIQUES. Астрономическія вычисленія, выкладки. Совокупность правилъ и способовъ, употребляемыхъ при опредѣленіи движенія планетъ и другихъ небесныхъ свѣтилъ. — Преимущественно же разумеютъ подъ *астрономическими вычисленіями* опредѣленіе затмѣній, закрытія звѣздъ луною, прохожденіе планетъ чрезъ кругъ солнца, и проч. При подобныхъ выкладкахъ руководствуются логарифмическими и другими таблицами, правилами сферич-

чекской Тригонометрии и проч. Замышляя еще, что Астрономы безпрестанно употребляют дробь *шестидесятичная* [См. SEX AGESIMALES (FRACTIONS)], что весьма естественно по причине принятого раздѣленія окружности на 360 градусовъ, градуса на 60 минутъ, минуты на 60 секундъ и т. д.

CALCULATEUR. ВЫКЛАДЧИКЪ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬ, СЧЕТЧИКЪ. Занимающийся вычислениями, преимущественно арифметическими. *Calculateur habile, искусный выкладчикъ.*

CALCULER. ВЫЧИСЛЯТЬ, ПРОИЗВОДИТЬ ВЫКЛАДКИ; принимать правила Анализа и Арифметики къ определению какой нибудь величины, или, что все равно, приводить формулу въ число.

CALENDES. (Хроп.) **КАЛЕНДЫ.** *Le jour des calendes, день календы;* такъ назывался у Римлян первый день каждого мѣсяца. *День новъ (jour des ides)* падалъ на 5-ое и на 7-ое число мѣсяца, а *день идъ (jour des ides)* на 13 и 15-ое число. Когда день новъ приходился 5-го числа, тогда идъ былъ 15-го, а когда 7-го, то идъ падалъ на 15-е число.

CALENDRIER. КАЛЕНДАРЬ, МѢСЯЦСЛОВЪ.

Таблица или книга, показывающая, на одинъ или на нѣсколько годовъ, порядокъ дней, недѣль, мѣсяцевъ, праздниковъ, и проч. Смотри. TEMPS, ANNÉE, MOIS, DOMINICALE (LETTRE) и проч.

CALENDRIER PERPETUEL. Непреходимый, непрелетный календарь. **CALENDRIER RUSTIQUE** или **POPULAIRE.** Овечьегородный календарь.

CALENDRIER ROMAIN или **JULIEN.** Юлианскій календарь. Календарь, введенный въ употребленіе при Юліи Цезарѣ. По Юлианскому календарю, годъ полагаютъ въ 365 дней и 6 часовъ, а для избѣжанія подраздѣленія дня, считаютъ при года сразу въ 365 дней, а четвертый, именуемый *високоснымъ (bisexto),* въ 366 дней. Юлианскій календарь по нынѣ въ употребленіи въ Россіи.

CALENDRIER GREGORIEN. Григоріанскій календарь. Такъ называется Юлианскій календарь, исправленный въ Римѣ, въ 1582 году, при Папѣ Григоріи XIII. Основаніемъ Юлианскаго календаря было предположеніе, что тропическій годъ состоитъ изъ 365 дней 6 часовъ; но такъ какъ онъ нѣсколько меньше (троп. годъ = 365 д. 5 ч. 41' 51"), то для избѣжанія постепенно увеличиваю-

щейся разности между началомъ тропическаго года и гражданскаго, Папа Григорій XIII приказалъ пропускать *такіе высокосные*, за исключеніемъ одного чрезъ каждыя чешыре столѣтія. И такъ, 1700, 1800, 1900 годы, которые по Юлианскому календарю, надлежало считать *високосными*, по Григоріанскому принялись за простые. 2000 же годъ, по обоимъ календарямъ, *високосный.* Такимъ образомъ въ продолженіи 400 лѣтъ исключаютъ, вмѣсто 100, только 97 прибавочныхъ дней.

Григоріанскій календарь съ самаго 1582 года былъ введенъ во всѣхъ Католическихъ государствахъ; но Протестантскіе приняли его только въ 1751 и 1752 годахъ. Россія и другія земли Греческаго исповѣданія сохранили Юлианскій годъ, который нынѣ начинается 12 днями позже Григоріанскаго. Съ 1900 года эта разность увеличилась еще однимъ днемъ. Для избѣжанія всякаго недоразумѣнія при письменныхъ сношеніяхъ съ иностранцами, высказываютъ числа *по старому* и *по новому стилю.* Напримеръ, пишутъ 14 марта, что означаетъ 5-ое число марта мѣсяца по Юлианскому календарю, а 17-е по Григоріанскому. Мы не будемъ говорить о календаряхъ разныхъ народовъ; читатели, желающіе ознакомиться съ этимъ предметомъ, найдутъ любопытныя свѣдѣнія въ *Encyclopédie Méthodique, Mathématiques*, статья: *Calendrier*, гдѣ помѣщено описаніе Римскаго календаря со всеми возможными подробностями. Также описаны къ особому трактату, подъ заглавіемъ: *Calendariographie*, соч. Линшрова и къ его *theoretische und praktische Astronomie* 1821 г. въ 3 частяхъ. Но такъ, какъ въ книгахъ, на которыя мы ссылаемся, *непрелетный календарь Греко-Россійской церкви* не объясненъ съ надлежащими подробностями, то помѣщаемъ здѣсь правила, относящіяся къ нему.

Элементы Греко-Россійскаго Церковнаго счисленія суть: 1) *Кругъ солнцу;* 2) *Кругъ лунѣ;* 3) *Индиктъ;* 4) *Въ руку лѣто;* 5) *Основаніе;* 6) *Эпикта;* 7) *Какъ границы.* Для опредѣленія сихъ элементовъ приведемъ весьма простую формулу; изобразимъ чрезъ *i* данный годъ, и условимся употреблять буквы Греческаго алфавита для такихъ количествъ, которые могутъ обратиться въ нуль, а Латинскія буквы для величинъ никогда не уничтожающихся. На семь основаній, по данному *i*, вычисливъ последовательно

величины $\alpha, \beta, \gamma, \dots, a, b, c, \dots$ пооредимъ
определенныя уравненія

$$\begin{aligned} \frac{i-8}{28} &= \alpha + \frac{a}{28}, & \frac{i-8}{19} &= \beta + \frac{b}{19}, & \frac{i+8}{15} &= \gamma + \frac{c}{15}, \\ \frac{a}{4} &= \delta + \frac{d}{4}, & \frac{a+b}{7} &= \zeta + \frac{e}{7}, & \frac{b+8}{20} &= \eta + \frac{\theta}{20}, \\ \frac{11(i+\theta)}{80} &= \lambda + \frac{e}{80}, & \frac{51-e}{80} &= \mu + \frac{f}{80}, & \frac{f+5}{80} &= \nu + \frac{\pi}{80}, \\ & \frac{d+\pi}{7} &= \xi + \frac{e}{7}, & \frac{11-e}{7} &= \sigma + \frac{e}{7}, \end{aligned}$$

из которыхъ всѣ буквы изображаютъ цѣлыя положительныя числа. Буквы $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \eta, \lambda, \mu, \nu, \xi$ и σ суть часиныя, а $a, b, c, e, d, \theta, e, f, \pi, e$ и g остатковъ получаемые чрезъ дѣленіе $i-8$ на 28, $i-2$ на 19, $i+8$ на 15 и такъ далѣе. Поищемъ, чію изъ одинъ изъ остатковъ, означенныхъ Латинскими буквами, не можетъ равняться нулю; когда найдемъ для него нуль, то должно будемъ принять самый дѣлитель за остатковъ. Напримѣръ, если бы искали a для 1856-го года, то нашли бы, что $i-8=1848$; но 1848 дѣлится на 28, следовательно $a=28$. Мы вообще легко замѣтимъ, что $a=28$ только для високоснаго года, коего число, по раздѣленіи на 4, даетъ частное вида $7a+2$. Это слѣдуетъ изъ уравненія $\frac{i-8}{28} = \alpha + \frac{a}{28}$, которому можно дать видъ $\frac{i}{28} = 7a+2$. Чію касаясь до часинныхъ и до остатковъ изображенныхъ Греческими буквами, то они, какъ уже сказано выше, могутъ обращаться и въ нуль.

Когда, по приведеннымъ формуламъ, найдемъ величины a, b, c, d, e, f, g, π , и положимъ для краткости $\pi+g=h$, то упомянутые семь элементовъ будутъ:

- 1) Кругъ солнцу $= a$
- 2) Кругъ лунѣ $= b$
- 3) Индиктъ $= c$
- 4) Въ ружь лѣто $= d$
- 5) Основаніе $= e$
- 6) Эпакта $= f$
- 7) Ключъ границъ $= h$.

По сѣмъ элементамъ Календарь Греко-Россійской церкви составляется слѣдующимъ образомъ:

Маслостіе продолжается: $\left\{ \begin{array}{l} \text{въ простомъ годѣ} \\ (31+h) \text{ дней} \\ \text{въ високосномъ г.} \\ (32+h) \text{ дней.} \end{array} \right.$

Триодъ начинается: $\left\{ \begin{array}{l} \text{въ простомъ годѣ} \\ (10 \text{ Янв.} + h) \text{ дней.} \\ \text{въ високосномъ годѣ} \\ (11 \text{ Янв.} + h) \text{ дней;} \end{array} \right.$

Маслосустъ $\left\{ \begin{array}{l} \text{въ простомъ годѣ} (24 \text{ Янв.} + h) \text{ дней;} \\ \text{въ високосномъ г.} (25 \text{ Янв.} + h) \text{ дней.} \end{array} \right.$

Сиропустъ $\left\{ \begin{array}{l} \text{въ простомъ годѣ} h \text{ Февр.} \\ \text{въ високосномъ годѣ} (h+1) \text{ Февр.} \end{array} \right.$

Евдокии (36— h) дней.

40 Мучен. (44— h) дней.

Алексія (52— h) дней.

Благовѣщеніе: (60— h) дней.

Пасха Христова: (21 Марта + h) дней.

Преполовленіе: (14 Апр. + h) дней.

Вознесеніе: (29 Апр. + h) дней.

Пятидесятница: (9 Мая + h) дней.

Петровъ маслосустъ: (16 Мая + h) дней.

Петрова Поста: (43— h) дней.

Георгія: (36— h) дней.

Іоанна Богослова: (51— h) дней.

Подлинный день, съ который придетъ день Рождества Христова: (Вторникъ + d).

Подлинный день, въ который придетъ день Св.

Апостолъ Петра и Павла: (Пятница + d).

Объяснимъ теперь эти правила прикитронъ.

Подожимъ чію жезаетъ означенный Календарь для 1859-го года. Будемъ $i=1859$; следовательно:

$$\begin{aligned} \alpha &= 65, \alpha=11; \beta=96, b=13; \gamma=122, c=12; \\ \delta=2, e=3; \zeta=1, d=6; \eta=0, \theta=16; \\ \lambda=5, e=26; \mu=0, f=25; \nu=1, \pi=0; \\ \xi=0, \rho=6; \sigma=0, g=5. \end{aligned}$$

И такъ, для 1859-го года найдемъ:

Кругъ солнцу $= 11$.

Кругъ лунѣ $= 13$.

Индиктъ $= 12$.

Въ ружь лѣто $= 6$.

Основаніе $= 26$.

Эпакта $= 25$.

Ключъ границъ $= 5$.

Маслостіе продолжается 51 + 5 = 56 дней.

Триодъ начинается 10 Янв. + 5 п. в. 15 Янв.

Маслосустъ 24 Января + 5, п. в. 29 Января.

Сиропустъ 5 Февраля.

Евдокии 36 — 5 = 31 день.

40 Мучен. 44 — 5 = 39 дней.

Алексія 52 — 5 = 47 дней.

Благовѣщеніе 60 — 5 = 55 дней.

Пасха Христова 21 Марта + 5 = 26-го Марта.

Преполовленіе 14 Апрель + 5 = 19-го Апрель.

Вознесеніе 29 Апр. + 5 = 34 = 4-го Мая.

Пятидесятница 9 Мая + 5 = 14 Мая.

⁶⁾ Мы заимствовали эти формулы изъ Записки Академика Шуберта, напечатанной въ 1824 году

Петроу Маспуста 16 Мал + 5 = 21 Мал.

Петрова поста 43 — 5 = 38 дней.

География 36 — 5 = 31 день.

Иоанна Богослова 31 — 5 = 46 дней.

Недельный день Рождества Христова

вторник + 6, то есть поведьяльник.

Недельный день Св. Апостол Петра и Павла пятница + 6, то есть четверг.

Замыслим, что если по прибавлении ключа границ *h* к числу месяца, найдем число превосходящее число дней того месяца, то следует вступить в следующий месяц. Так например, для 1859 года мы нашли, что *Вознесение* должно быть 29 Апреля + 5 = 34; но так как в Апреле месяц 30 дней, то от числа 34 останется 4, которое уже должно стипать 4-м числом Мал. — Подобное замечание имеет место и в разсуждении недельных дней. И так в предыдущем примѣрѣ мы нашли, что недельный день *Св. Апостол Петра и Павла* приходится въ пятницу + 6, или въ четверг; и действительно, считая от пятницы по порядку: суббота, воскресенье и проч., находим шестой день *четверг*. Элементы нашего церковного счисления, какъ то: *кругъ солнцу, кругъ лунѣ* и проч. означаются въ мѣсяцесловахъ Славянскими знаками, а *ключъ границъ* обозначается 35 буквами Славянскаго алфавита.

Замыслимъ еще, что число дней, определяемое предыдущими формулами для праздниковъ *Св. Ефремъ, 40 Мучениковъ* и проч. означаются посредствомъ недель и дня следующимъ образомъ:

Для праздниковъ Св. Ефремъ, 40 Мучениковъ Алексія и Благовѣщенія.

Число.	День и неделя.
1 до 6	С до 6 сырныя недѣли.
7	О сырнуша.
8 — 14	С до О 1 недѣля пошла.
15 — 21	С до О 2 — — —
22 — 28	С до О 3 — — —
29 — 35	С до О 4 — — —
36 — 42	С до О 5 — — —
43 — 48	С до 6 6 — — —
49	О Ваим.
50 — 55	С до 6 Великой или Страсныя недѣли.
56	День Насхи, или въ недѣлю Насхи.
57, 58, 59	С 8 8 Святыхъ недѣли.

Для праздниковъ Св. География и Иоанна Богослова.

Число	День и неделя.
1	О 6 Великія.
2	День Насхи, или въ недѣлю Насхи.
3	С до 6 Святыхъ недѣли.
4 до 9	С до 6 2 недѣли по Насхѣ.
10 — 16	О до 6 3 — — —
17 — 23	О до 6 4 — — —
24 — 30	О до 6 5 — — —
31 — 37	О до 6 6 — — —
38 — 44	О до 6 7 — — —
45 — 50	О до 6 8 — — —

Въ сихъ таблицахъ употреблены нѣкоторые знаки недельныхъ дней, именно: О, *воскресенье*; С *понедѣльникъ*; 8, *вторникъ*; 6, *среда*; 2, *четвергъ*; 9, *пятница*; 7, *суббота*.

Въ заключеніе приводимъ, для образца, таблицу семи элементовъ нашего Календаря отъ 1837 до 1860 года. Годы, означенные звездочкою, означаютъ *високосные*.

Лѣто	Кругъ солнцу	Кругъ лунѣ	Индиктъ	Основа	Эпакта	Въ руцѣ лѣто	Ключъ границъ	Лѣто	Кругъ солнцу	Кругъ лунѣ	Индиктъ	Основа	Эпакта	Въ руцѣ лѣто	Ключъ границъ
1837	9	11	10	4	17	4 А	28 П	1849	21	4	7	17	4	5 6	13 Л
1838	10	12	11	15	6	5 Г	15 А	1850	22	5	8	28	23	6 8	35 Ю
1839	11	15	12	26	25	6 С	5 А	1851	23	6	9	9	12	7 3	18 Р
1840*	12	14	15	7	14	1 А	24 О	1852*	24	7	10	20	1	2 Б	9 З
1841	13	15	14	18	5	2 Б	9 З	1853	25	8	11	1	20	3 Г	29 ь
1842	14	16	15	29	22	3 Г	29 ь	1854	26	9	12	12	9	4 А	21 У
1843	15	17	1	11	10	4 А	21 У	1855	27	10	15	23	28	5 Г	6 6
1844*	16	18	2	22	29	6 С	5 А	1856*	18	11	14	4	17	7 3	25 Ц
1845	17	19	3	3	18	7 3	25 Ц	1857	1	12	15	15	6	1 А	17 П
1846	18	1	4	14	7	1 А	17 П	1858	2	13	1	26	25	2 Б	2 Г
1847	19	2	5	25	26	2 Б	2 Г	1859	3	14	2	7	14	3 Г	22 Ф
1848*	20	3	6	6	15	4 А	21 У	1860*	4	15	3	18	5	5 Г	15 Л

СЯЛОМЕТРЕ. (Физ.) **КАЛОРИМЕТРЪ**, **ТЕПЛОМЕРЪ**. Смарагд, употребленный для определения удельного жёла жёла. Смол. CAPACITÉ SPECIFIQUE POUR LA CHALEUR.

САЛОРИКЪ. (Физ.) **ТЕПЛОРОДЪ**, **ТЕПЛОТВОРЪ**. Смол. CHALEUR.

САЛОТТЕ СФЕРИКЪ. (Геом.) **СФЕРИЧЕСКАЯ**, **ШАРОВАЯ ЧАШКА**. Меньшая часть шаровой поверхности, разсѣченной плоскостію. Часотъ радиуса шара, заключающаяся между плоскостію и сферическою поверхностію, называется *высокою чашки*; легко видѣть, что поверхность сферической чашки равна окружности большаго круга шара, *полножестной на сію высоту*.

САММЕ. (Мех.) **КУЛАКЪ**. Кулаками называются зубцы цилиндрическаго колеса, имѣющіе различныя виды, смотря по цѣли, съ какою ихъ употребляютъ. Большаго часотію такіа колеса употребляютъ на молотильныхъ мельницахъ.

САНАЛЕ (SURFACE). (Геом.) **ЖОЛОВАВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ**. Такъ называется поверхность, образуемая шаромъ, имѣющимъ постоянный радиусъ, и коего центръ движется по какой нибудь плоской кривой, принимаемой за направляющую. Очевидно, что всѣ сѣченія жолобовой поверхности плоскостями перпендикулярными къ сей направляющей, будутъ круги, имѣющіе радиусы одинаковыя съ радиусомъ производящаго шара.

Чтобы вывести уравненіе *жолобовыхъ поверхностей*, примемъ плоскость направляющей кривой за координатную плоскость xy . Плоскости az и yz будутъ перпендикулярны къ сей послѣдней. Изобразимъ чрезъ r постоянный радиусъ шара. Изъ образованія разсматриваемой нами поверхности слѣдуемъ, что ея касательная плоскость будетъ вмѣстѣ касательною плоскостію и къ шаровой поверхности, почему нормальная линія, падающая въ центръ шара, въспрямится въ плоскость xy на разстояніи r отъ точки (x, y, z) жолобовой поверхности. И такъ косинусъ угла, составляемаго направлениемъ нормальной съ осью z , опредѣлится отношеніемъ $\frac{z}{r}$. Но, известно, что для всякой поверхности эмпотъ косинусъ выражается чрезъ

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}};$$

но получимъ $\frac{z}{r} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$, или $\left(1 + \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2}\right)z^2 = r^2$. Вотъ уравненіе къ частнымъ дифференціаламъ для *жолобовыхъ поверхностей*. Смол. ENVELOPPE, SURFACE, и проч.

CANCER или **ECREVISSE**. (Астр.) **РАКЪ**. Четвертый знакъ зодіака. Смол. ZODIAQUE. *Troisième du cancer, третины рака*.

CANEVAS D'UNE CARTE, RESEAU TRIGONOMETRIQUE. (Геом.) **ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ СѢТЬ**. Совокупность треугольниковъ, которыми покрываютъ карту при составленіи ея карты. Смол. TRIANGULATION, GEODESIE.

CANON. Смол. с.л. (Геом. и Алг.) **СПОСОБЪ**, **ФОРМУЛА**. Общее правило, посредствомъ котораго рѣшаютъ всѣ задачи, относящіяся къ извѣстному роду. Смол. FORMULE.

CANON NATUREL DES TRIANGLES. Таблица синусовъ, тангенсовъ и секансовъ, преимущественно служащая для рѣшенія треугольниковъ.

CANON ARTIFICIEL DES TRIANGLES. Таблица логарифмовъ синусовъ, тангенсовъ и секансовъ.

CANONOTECHEMIE. **КАНОНОТЕХНІЯ**. Способъ для составленія какихъ либо таблицъ посредствомъ разностей.

CAPABLE. (Геом.) **ВМѢЩАЮЩІЙ**. Это слово употребляется только въ слѣдующемъ реченіи: *segment de cercle capable d'un certain angle; круговой сегментъ, вмѣщающій извѣстный уголъ*. Такъ называется сегментъ, внутри котораго можно составить уголъ, имѣющій свою вершину при эмпотъ сегментѣ, и опирающійся на его крайнія точки. Напримеръ, на черт. 3 (листъ III), сегментъ ACB *вмѣщаетъ* уголъ ACB .

CAPACITE, CAPACITE CUBIQUE. (Геом.) **ВМѢСТИТЕЛЬНОСТЬ**, **ѢМКОСТЬ**, **ОБЪЕМЪ**.

Кубическое содержаніе: какого нибудь тѣла, и преимущественно сосуда. Смол. VOLUME.

CAPACITE SPECIFIQUE POUR LA CHALEUR. **НАГРѢВАЕМОСТЬ**, **УДЕЛЬНОЕ ТЕПЛО**, **ТЕПЛОѢМОСТЬ**. *Нагрѣваемость* какого либо вещества называется количествомъ теплоты, потребное для увеличенія однимъ градусомъ (по

Цельсию (температуры единичного объема того вещества. Нагреваемость, как доказано весьма точными опытами, не зависит от температуры, по крайней мере между пределами довольно удаленными термометрической шкалы. Так, например, для повышения до 1 градуса температуры куска железа при 0 градусов, надобно будет употребить то самое количество тепла, которое могло бы тому же куску, нагретому до 100 градусов, сообщить температуру в 101 градус. Для различных же веществ удельное тепло бывает различное. Для определения теплоемкости, физики придумали разные снаряды: наиболее употребительный изобретение *Лапласа* и *Лавуазье*. Этот снаряд, называемый *калориметром* (*calorimètre*) состоит из трех concentрических коробок, вкладываемых одна в другую, и образующих таким образом три пустых пространства $AA'A''A'''$, $BB'B''$, C (черт. 1. Лист IV.); меньшая коробка делается из проволоночной сетки, а две другие, из жести. Средняя коробка оканчивается в нижней части трубкою, к которой приделан край R ; наружная коробка также снабжена трубкою и крапом K , но с боку. Сверху много, в средней пустоте $BB'B''$, помещается внизу металличе- ская сѣточка DE . — Чтобы придать более прочности всему снаряду, коробки скрываются между собою посредством брусочков c, c', c'', c''' . —

Для определения удельного тепла какого либо тела, наполняют сперва толченым льдом или сѣточкой прожеухки $AA'A''A'''$ и $BB'B''$, а также и крышки a и b , принадлежащая к двум внутренним коробкам; потом нагревають до известной температуры, например до 100°, определенный объем данного тела M , и потчас кладут это тело в сѣточную коробку, которую закрывают крышкою a , а среднюю коробку, крышкою b . В таком состоянии оставляют снаряд от 15 до 20 часов, и этого времени очень достаточно для того, чтобы температура тела M понизилась до 0°, и чтобы вся вода, происшедшая от растаявшего льда в просиранстве $BB'B''$, собралась в пустоту H , под сѣточкою DE ; эта сѣтка делается с тою целью, чтобы мелкие кусочки льда не могли проходить в пустоту H .

При охлаждении тела M , отит или толченый лед, находящийся между сѣточкою и среднею коробками, будет таять, и единственно от избытка температуры тела M , ибо сѣтка, заключающаяся в пространстве $AA'A''A'''$, не имеет никакого сообщения с пустотою $BB'B''$, предохраняет сию последнюю от действия температуры наружного воздуха. И так, выпустив воду посредством крапа R , и измерив тщательно ее объем, узнаем во сколько раз теплоемкость данного тела M больше теплоемкости другого вещества, например воды; это отношение и называется *удельным теплом, теплоемкостью или нагреваемостью* тела.

Замышляя еще, что описанный снаряд для большей точности спаракис производив в таком месте, коего температура не имела выше 0°, дабы сѣтка, заключающаяся в пространстве $AA'A''A'''$, таяла только в самом малом количестве; получаемую же воду в этомъ пространстве выпускают посредством крапа K . Числа эти найдут подробное описание устройства и употребления калориметра Лапласа и Лавуазье в книге: *Système de Chimie antiphlogistique par Lavoisier*.

В заключение приводим теплоемкости некоторых веществ, определенные Лапласом и Лавуазье посредством их калориметра:

Обыкновенная вода	1.
Жесть	0,1100.
Кроунт glassъ	0,1929.
Ртуть	0,2930.
Негашеная известь	0,2169.
Селитренная кислота	0,6614.
Сѣрная кислота	0,3346.

Дальтон, Лавуазье, Берарь, Дюлонг и Петти, производившие многочисленные опыты посредством калориметра, определили нагреваемость для многих веществ; результаты их опытов читатели найдут почти во всех новых курсах Физики и Химии.

CAPILLAIRE (ACTION). (Мех.) **ВОЛОСНЫЯ, КАПИЛЛЯРНЫЯ ДѢЙСТВІЯ.** Когда стеклянная трубка, имѣющая весьма малый диаметр (менѣе одного сантиметра), и открытая съ обоихъ концовъ, будетъ опущена въ сосудъ съ водою или ртутью, то усматриваемъ, что вода поднимается

изъ ней выше своего уровня, а ртуть не достигнетъ высоты столба сей жидкости въ сосудѣ. Въ первомъ случаѣ, вода въ трубкѣ оканчивается поверхностью *вогнutoю*, а во второмъ, напротивъ того, *выпуклою*. Такія явленія и другія подобныя имъ, по видному отступая отъ законовъ равновѣсія жидкостей, называются *волосными* или *капиллярными*.

Дабы показать, что такого рода явленія согласны съ строготою теоріею жидкостей, замѣтимъ что силы, существующія въ природѣ, доселѣ неизвѣстныя намъ, могутъ быть раздѣлены на два разряда. Первый, изъясняютъ свое дѣйствіе на разстояніяхъ чувствительныхъ, и даже весьма большихъ. Таковы напирѣтъ, притягивскія, и отталкиванія электрическія, магнитныя и притяженіе небесныхъ тѣлъ; всѣ эти силы подчинены Нютону закону, то есть, оны прямо пропорціональны массамъ и обратно квадратамъ разстояній. Ко второму разряду относятся силы, коихъ дѣйствіе чувствительно только на разстояніяхъ весьма малыхъ. Онь такого рода силы происходятъ отъ *волосныхъ* явленій, соединенія химическія, явленія кристаллизаціи и проч. См. ATTRACTION.

При составленіи уравненій равновѣсія жидкостей, должно принимать въ соображеніе и силы втораго разряда, о которыхъ мы сей часъ упоминали; явленія, происходящія отъ дѣйствія такихъ силъ, называются *волосными* или *капиллярными*, и составляютъ довольно важную теорію въ Гидростатикѣ. Мы только укажемъ на способъ, которымъ руководствовались геометры для объясненія капиллярныхъ явленій; что касается до подробностей по сему предмету, то, по свойству нашего сочиненія, оны не могутъ быть предложены здѣсь.

Разсмотримъ сколько угодно частицъ $m, m', m'' \dots$, побуждаемыхъ силою тяжести и взаимными притяженіями. Опишемъ эти частицы къ тремъ прямоугольнымъ осямъ x, y, z , и поможимъ, что ось z вертикальная. Пусть будутъ соответственно x, y и z, x', y' и z', x'', y'' и $z'' \dots$ координаты точекъ $m, m', m'' \dots$. Чтобы разсмотрѣнная нами система была въ равновѣсіи, надобно чтобы полный моментъ не могъ получить положительной величины ни для какого возможнаго перемѣщенія (См. EQUILIBRE). И такъ, надлежитъ найти этотъ моментъ. Очевидно,

что отъ силы тяжести, получимъ моменты

$$g(m'z + m'z' + m''z'' + \dots).$$

Что касается до силъ, происходящихъ отъ взаимодѣйствія частицъ, то, для опредѣленія ихъ моментовъ, изобразавъ для удобства знаменитіемъ (m, m') разстояніе между двумя частицами m и m' . Взаимное дѣйствіе двухъ частицъ m и m' изобразавъ произведеніемъ $mm'q(m, m')$, а моментъ этого дѣйствія выраженіемъ $mm'q(m, m')\delta(m, m')$; для другихъ частицъ системы найдутся подобные члены. Введенная нами функція q изобразавъ законъ притяженія частицъ; законъ можетъ измѣняться съ свойствомъ разстояніемъ частицъ. Такъ напирѣтъ, если жидкость заключена въ сосудѣ, то дѣйствіе частицъ, составляющихъ стѣны сосуда, на смежныя съ ними частицы жидкости, изобразавъ функцію оплывающую отъ той, которая выражаетъ взаимодѣйствіе двухъ частицъ, принадлежащихъ жидкости.

И такъ полный моментъ будетъ:

$$g(m'z + m'z' + m''z'' + \dots) + mm'q(m, m')\delta(m, m') + mm''q(m, m'')\delta(m, m'') + m'm''q(m', m'')\delta(m', m'') + \dots$$

Это выраженіе ни для какого возможнаго перемѣщенія не должно получить значенія положительнаго. Если, для краткости, изобразимъ чрезъ $\psi(m, m')$ сумму $Sq(m, m')\delta(m, m')$, то предыдущій рядъ можно будетъ написать въ видѣ

$$\delta \left\{ g(m'z + m'z' + m''z'' + \dots) + mm'\psi(m, m') + mm''\psi(m, m'') + m'm''\psi(m', m'') + \dots \right\}$$

Такъ какъ это выраженіе ни въ какомъ случаѣ не должно быть положительнымъ, то оно необходимо будетъ *maximum*, по особеннаго рода, при которомъ дифференціалъ вышего того, чтобы обращаться постоянно въ нуль, можетъ имѣть и значенія *отрицательныя*. См. MAXIMUM. И такъ, теорія волосныхъ явленій приводится такимъ образомъ къ задачѣ о разскакии наибольшей величины изъ какой функціи.

Мы не будемъ вдаваться въ дальнѣйшія изслѣдованія по сему предмету: доспашочно того, что показали какимъ образомъ теорія волосныхъ явленій подчинилась анализу. Отсылаемъ читателей къ сочиненіямъ:

Mecanique celeste, par Laplace. Supplément au X^{me} livre.

Gauss: Principia generalia theoriae fluidorum in statu aequilibrii. Геттингенъ 1831.

Nouvelle Théorie de l'Action Capillaire, par Poisson 1831.

CAPILLARITÉ. (Мех.) **ВОЛОСНОСТЬ, КАПИЛЛЯРНОСТЬ.** Смол. предыдущую статью.

CAPITAL. **КАПИТАЛЪ;** стар. **ИСТИННИКЪ** (*principal*). Смол. **INTÉRÊT.**

CAPRICORNE. (Астр.) **КОЗЕРОГЪ.** Десятый знак зодиака. Смол. **ZODIAQUE.** *Tropique du capricorne, тропикъ козерога.*

CAPUCIN (LE). Смол. **CADRAN UNIVERSEL PAR LES HAUTEURS DU SOLEIL.**

CARACTÈRE. (Анал.) **ЗНАКЪ.** Вообще въ Математикѣ подъ *знаками* разумѣютъ начертанія, или письма, употребляемыя для сокращенія речей и для упрощенія вычислений.

CARACTÈRES NUMÉRIQUES или **CHIFFRES.** Числительные знаки или цифры. Знаки, употребляемые для изображенія чиселъ.

CARACTÈRES COMMUNS или **CARACTÈRES ARABES.** Арабскія цифры, которыя нынѣ вошли почти во всеобщее употребленіе. Арабскія цифры изображаются посредствомъ слѣдующихъ десяти знаковъ: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

CARACTÈRES ROMAINS. Римскія цифры, изображаются посредствомъ семи прописныхъ буквъ Латинскаго алфавита, а именно: I, V, X, L, C, D, M. I, изображаетъ *единицу*; V, *пять*; X, *десять*; L, *пятидесять*; C, *сто*; D, *пять сотъ*; M, *тысячу*. Посредствомъ этихъ буквъ, числа изображаются слѣдующимъ образомъ: 1 = I, 2 = II, 3 = III, 4 = IV, 5 = V, 6 = VI, 7 = VII, 8 = VIII, 9 = IX, 10 = X, 11 = XI, 12 = XII, и проч. 20 = XX, 50 = LXX, 40 = XL, 50 = L, и проч. 100 = C, 200 = CC, 1000 = M. Сверхъ сихъ буквъ, употребляли иногда нѣкоторые сокращительные знаки.

CARACTÈRES OU CHIFFRES GRECS, HEBRAÏQUES. Греческія, Еврейскія цифры. Буквы Греческаго, Еврейскаго алфавита, имѣющія также условное численное значеніе.

Алфавитъ цифръ. Письмена Славянскаго алфавита употребляются для счисленія слѣдующимъ образомъ: единица изображается чрезъ Ѧ, два, Ѣ; три, і; четыре, Ѧ; пять, і; шесть, Ѣ; семь, Ѣ; восемь, Ѣ; девять, Ѣ; десять, і; одиннадцать, Ѧ; и проч. двадцать, Ѣ; двадцать одинъ, Ѧ; тридцать, Ѧ; тридцать одинъ, Ѧ; сорокъ, Ѧ; пятидесять, Ѣ; шестидесять, Ѣ; семьдесятъ, Ѣ; восьмидесять, Ѣ; девяносто, Ѣ; сто, Ѣ;

сто одинъ, Ѧ; сто одиннадцать, Ѧ; сто двадцать, Ѣ; сто двадцать одинъ, Ѧ; двести Ѣ; триста, Ѣ; четыреста, Ѣ; пять сотъ, Ѣ; шесть сотъ, Ѣ; семь сотъ, Ѣ; восемь сотъ, Ѣ; девять сотъ, Ѣ; тысяча, Ѧ; двѣ тысячи, Ѧ; три тысячи, Ѧ и проч. Иногда эти письма пишутся и безъ шиповъ.

CARACTÈRES FRANÇAIS или **CHIFFRES DE COMPTÉ, DE FINANCE.** Финансовыя цифры. Римскія цифры, употребляемыя Французами въ Контрольной части, также казначеями, пріемщиками и проч. Вместо прописныхъ Латинскихъ буквъ, пишутъ строчныя, именно: i, j, v, s, l, c, d, m. Напримѣръ, 18 пишется слѣдующимъ образомъ: xviii.

Въ Анализѣ, первыя буквы алфавита a, b, c, изображаютъ обыкновенно данныя или постоянныя величины. И такъ, эти буквы суть *знаки постоянныхъ величинъ или неизмѣняемыхъ*. Последнія, то есть x, y, z и проч. присвоены величинамъ неизвѣстнымъ или переменнымъ. Буквы l, m, n, часто означаютъ показателъ; напримѣръ, пишутъ: x^l , y^m , z^n ,

+ *плюсъ*, $+$ (*plus*). Знакъ положительнаго количества. См. **POSITIF.** — *минусъ*, $-$ (*moins*). Знакъ отрицательнаго количества. Смол. **NÉGATIF.** = *знакъ равенства* (*signe de l'égalité*). Этотъ знакъ, поставленный между двумя количествами, означаетъ, что они равны между собою. Напримѣръ $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$, $7-3 = 9-5$, $x^3 - 3x + 1 = 0$. — Прежніе алгебристы означали *равенство* знакомъ ∞ .

Знаки \times , . изображаютъ умноженіе; а χb или $a.b$ значить, что a умножено на b . \div , : *знаки дѣленія*. Напримѣръ $a \div b$, $a:b$ изображаетъ частное, получаемое чрезъ раздѣленіе величинъ a на b , то есть, дробь $\frac{a}{b}$.

$>$ и $<$ *знаки неравенства*; $a > b$ означаетъ, что a больше b , а $a < b$ значить, что a менѣе b . Прежде употребляли въ томъ же значеніи знаки] и [.

Знакомъ ∞ , поставленнымъ между двумя количествами, изображали неизвѣстную разность между ними. — Также иногда выражающіе эти же знаки подобіе двухъ геометрическихъ фигуръ со *знакъ безконечности*. Смол. **INFINI.**

✓ *коренной знак, радикал (radical)*. В от-
версии пишут *степень* извлекаемого корня в
знаков вид: $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{a}$ и проч. При извле-
чении *квадратного* корня, пишут просто \sqrt{a} ,
без показателя 2. Корни изображаются также
дробными показателями; вместо $\sqrt{a+b}$, пишут
 $(a+b)^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[n]{a+b}$ изображаются чрез $(a+b)^{\frac{1}{n}}$,
и проч.

Знак *арифметической пропорции*, которую
пишут следующим образом: 8:5:7.2.

∴, ≡ *знаки геометрической пропорции*, ~~или~~
бражаемой таким образом: $a:b::c:d$, или $a:b::c:d$,
или еще $a:b=c:d$. Иные писали также $a/b|c/d$.

≡ *знаки равносоставленности*, введенный мате-
матиком Гауссом. Смол. CONGRU.

Восклицательный знак (!), поставленный послѣ
цѣлаго числа, изображаетъ произведение всѣхъ цѣ-
лыхъ чиселъ до даннаго, включительно. И такъ
5! изображаетъ произведение 1.2.3.4.5 = 120.

Въ Дифференціалномъ Исчисленіи употре-
бляютъ знакъ d для изображенія дифференціала,
Интегралъ изображается знакомъ \int .

Въ Исчисленіи Разностей обозначаютъ раз-
ности Греческою буквою Δ , а сумму, или инте-
гралъ въ разностяхъ, буквою Σ .

Вариацию означаютъ буквою δ .

Англичане изображаютъ часто дифференціалъ
переменной x знакомъ \dot{x} ; интегралъ $\int x dx$ чрезъ
 $\dot{F}x$. Смол. FLUXION и FLUENTE.

Лагранжъ изображалъ производныя перваго,
втораго, третьяго..... порядка функцией $f(x)$,
слѣдующимъ образомъ: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$
Это знаменитіе и нынѣ употребляется всѣми.
Смол. DÉRIVÉE.

По введенію Г-мъ *Фурье* знаменитію, ин-
тегралъ $\int F(x) dx$, взятый между предѣлами a и b ,
изображается чрезъ $\int_a^b F(x) dx$, и произносится
такъ: *интегралъ отъ а до b функции F(x), по-
мощенной на dx*.

Въ Геометріи знакъ \parallel или $\#$ означаетъ, что
двѣ линіи, или плоскости *параллельны* между собою.

Знакомъ \perp выражаютъ равенство сторонъ въ
какой нибудь фигурѣ.

\angle *знакъ угла*.

Кругъ означаютъ знакомъ \bigcirc .

\perp изображаетъ *прямой уголъ* а также и *пер-
пендикуляръ*.

\triangle *означаетъ равенство угловъ*.

Знакъ \triangle изображаетъ *треугольникъ*.

Знакъ \triangle *прямоугольный треугольникъ*.

Знакъ \square присвоенъ *квадрату* (геометрической
фигурѣ), а также и *квадратному числу*.

\square *означаетъ прямоугольникъ*.

\square *Параллелограммъ*.

\triangle *Пирамиду*.

\square *Кубъ*.

\square *Прямоугольный параллелепипедъ*.

\square *Параллелепипедъ*.

Знаки $^{\circ}$, $'$, $''$, $'''$, $''''$ означаютъ по порядку
градусы, минуты, секунды, терціи, кварты....
Напримѣръ: 20° , $7'$, $25''$, $4'''$ читается: *двадцать
градусовъ семь минутъ двадцать три секунды
четыре терціи*.

Исчислить всѣ знаки, бывшіе въ употребленіи
у математиковъ въ разныя времена, почти не-
возможно. Здѣсь ограничимся мы главными изъ
нихъ; даже, изъ числа приведенныхъ нами, мно-
гіе уже рѣдко употребляются, въ особенности
же геометрическіе.

CARACTÈRE или CRITÈRE. ПРИЗНАКЪ. *Ca-
ractères de la divisibilité des nombres; признаки дели-
мости чиселъ*.

**CARACTÉRISTIQUE. ЗНАКЪ, ХАРАКТЕРИ-
СТИКА.** Смол. CARACTERE.

**CARACTÉRISTIQUE. (Анг.) ХАРАКТЕРИСТИКА,
ЦИФРОУКАЗАТЕЛЬ.** Такъ называется цѣлое
число, входящее въ логарифмъ. Напримѣръ, *ха-
рактеристика* обыкновеннаго логарифма отъ
5432 есть 5, ибо $\text{Log}(5432) = 5,7349598$ Ха-
рактеристика измѣняется вообще съ сисемкою
логарифмовъ, и можетъ быть какъ положитель-
нымъ такъ и отрицательнымъ числомъ, а такъ
же и нулемъ. Смол. LOGARITHME.

CARACTÉRISTIQUE D'UNE SURFACE. (Геом.)

ХАРАКТЕРИСТИКА ПОВЕРХНОСТИ. Когда
поверхность, посплошнаго или перегибнаго вида,
движется по какому либо закону, то предѣлъ
пространства, занимаемаго ею во всѣхъ ея поло-
женіяхъ, называется *обертывающею поверхностью*
(*surface enveloppe*). Очевидно, что обертывающая
поверхность будетъ геометрическое мѣсто кривыхъ
последовательныхъ пересѣченій движущейся
поверхности. *Монжъ* назвалъ каждую изъ
сихъ кривыхъ *характеристикою* обертывающей

поверхности: так, например, характеристика поверхности вращения есть *круг*. Действительно, пусть будут x, y, z координаты движущегося шара, и положим что его диаметр движется по оси z . Если изобразить через α абсциссу центра при каком-либо сечении шара, а через $\varphi(\alpha)$ переменный радиус сего последнего, то получимъ

$$(1) \quad (x - \alpha)^2 + y^2 + z^2 = [\varphi(\alpha)]^2.$$

Изменивъ α въ $\alpha + d$, найдемъ уравнение шара, занимающаго положение смежное съ предшесствующимъ; очевидно будетъ

$$(x' - \alpha - d\alpha)^2 + y'^2 + z'^2 = [\varphi(\alpha)]^2 + d \cdot [\varphi(\alpha)]^2.$$

Для точек пересечения обоих шаровъ въ записанныхъ ими двухъ положенияхъ, должно быть $x' = x, y' = y, z' = z$; следовательно

$$(2) \quad x - \alpha + \varphi(\alpha) \varphi'(\alpha) = 0.$$

Но это уравнение принадлежитъ плоскости перпендикулярной къ оси z ; пересечение этой плоскости съ шаровою поверхностью, то есть, *характеристика* поверхности вращения очевидно будетъ *круг*. Уравнение огибающей поверхности найдемъ чрезъ исключение количества α между (1) и (2). Изъ ур-н. (1) выводимъ

$$y^2 + z^2 = [\varphi(\alpha)]^2 - (x - \alpha)^2;$$

но, въ слѣдствіе ур-н. (2), α есть некоторая функция переменной x , поэтому

$$y^2 + z^2 = f(x),$$

а это уравнение, какъ извѣстно, принадлежитъ поверхностямъ вращенія.

Замѣтимъ, что характеристику можно принимать за *производную* огибающей поверхности. Для дальнѣйшихъ подробностей отсылаемъ къ статьямъ: SURFACE, FAMILLE DE SURFACES, GENERATION DES SURFACES, ARÊTE DE REBROUSSEMENT и проч.

TRIANGLE CARACTÉRISTIQUE или DIFFÉRENTIEL. (Диф. Исч.) ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ, ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИКЪ.

Безконечно малый прямоугольный треугольникъ, коего гипотенуза есть элементъ или дифференціалъ кривой линіи, а катеты, дифференціалы координатъ. На черт. 5 (ящикъ III) $mn'q$ есть дифференціальный треугольникъ; гипотенуза его равна $mn' = ds$, одинъ изъ катетовъ $m'q = dx$, а другой $m'q = dy$.

САВАСТЕРИСТИКА. ОТЛИЧТЕЛЬНЫЙ.

Свойственный одному разсматриваемому предмету.

Equation, propriété caractéristique; отличительное уравнение, свойство. Напримеръ, изобразивъ чрезъ x и y прямоугольныя координаты плоской кривой, $x^2 + y^2 = r^2, b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ будутъ соответственно отличительными уравненіями круга и эллипса, ибо каждое изъ нихъ, при допущенныхъ условіяхъ, выражаетъ отличительное свойство той кривой, которую опредѣляетъ.

CARDAN (RÈGLE DE) или règle de Scipion Ferreo.

(Алг.) **КАРДАНОВО ПРАВИЛО**; *правило Сципіона Феррео*. Такъ называется правило для рѣшенія уравненій третьей степени, открытое Италіянцемъ Сципіономъ Феррео. После Феррео, Тарталлеа или Тарталія дополнѣли это правило, распространивъ его на всѣ случаи, представляющіеся при рѣшеніи уравненій третьей степени. Карданъ, современникъ Тарталлеа, жившій въ XVI вѣкѣ, изложилъ упомянутое рѣшеніе въ сочиненіи своемъ *de arte magna* *), и поэтому многие приписываютъ ему открытіе, неопредѣляемое принадлежащее Феррео и Тарталлеа. Впрочемъ, должно отдать справедливость Кардану въ томъ отношеніи, что онъ первый записалъ неприводимый случай, о которомъ будетъ упомянуто ниже.

Предполагая, что полное уравненіе третьей степени освобождено отъ втораго члена, будетъ

$$(1) \quad x^3 + px + q = 0.$$

Положимъ

$$x = u + v,$$

найдемъ

$$x^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + 3uv(u + v) + v^3 = u^3 + v^3 + 3uvx,$$

$$\text{или} \quad x^3 - 3uv \cdot x - u^3 - v^3 = 0.$$

Чтобы всѣ три корня этого уравненія были одинаковы съ корнями ур-н. (1), должно быть

$$(2) \quad \begin{cases} -3uv = p \text{ или } u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ -(u^3 + v^3) = q \text{ или } u^3 + v^3 = -q. \end{cases}$$

Для опредѣленія u и v изъ сихъ уравненій, положимъ

$$(3) \quad u^3 = z_1, \quad v^3 = z_2.$$

Такъ какъ по уравненіямъ (2) сумма $z_1 + z_2$ и произведеніе z_1z_2 имѣютъ извѣстныя, то можемъ составить уравненіе 2-й степени, котораго кор-

*) Эта книга напечатана въ 1545 году; она содержитъ въ себѣ кнѣзства въ то время принца Алгебры.

ни будут x_1 и x_2 . Очевидно, что для определения их получим уравнение

$$x^2 + qx - \frac{p^2}{27} = 0,$$

которое называют *разрешающим* (*la réduite, la résolvante*). Корни его будут

$$x_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}$$

$$x_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}$$

и, в следующие ур-ия (3), найдем

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}} \cdot \sqrt[3]{1}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}} \cdot \sqrt[3]{1}.$$

Изобразим через α один из мнимых корней $\sqrt[3]{1}$; другой будет α^2 ; если сверх того положим для краткости

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}} = U$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}} = V.$$

то найдем для u следующую три величины:

$$U, \alpha U, \alpha^2 U.$$

Чтобы найти значения v , соотносившуюся с тем же значением u , заметим, что произведение $UV = -\frac{p}{3}$, а равным образом, в силу первого из ур-в.

(2), должно быть и вообще $uv = -\frac{p}{3}$. Помножив на α^2 последнее уравнение, найдем $\alpha^2 UV = -\frac{p}{3}$, доставляющее следующую три соединения: $UV = (\alpha U)(\alpha^2 V) = (\alpha^2 U)(\alpha V)$. Отсюда заключаем, что значения v , соотносившуюся приведенным значениям u , будут

$$V, \alpha^2 V, \alpha V.$$

И так, изобразив через x_1, x_2, x_3 три корня предложенного уравнения, найдем

$$x_1 = U + V$$

$$x_2 = \alpha U + \alpha^2 V$$

$$x_3 = \alpha^2 U + \alpha V$$

или, по подстановке на место U, V их значений,

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}} \\ x_2 = \alpha \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}} + \alpha^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}} \\ x_3 = \alpha^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}} + \alpha \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}} \end{cases}$$

$$\text{Здесь } \alpha = -\frac{1 - \sqrt[3]{-1}}{2}, \alpha^2 = -\frac{1 + \sqrt[3]{-1}}{2}.$$

См. BINOMES (ÉQUATIONS).

Выражение для x_1 в ур-и (4) собственно называется *Кардановою формулою*.

Для примера, возьмем уравнение

$$x^3 - 6x - 9 = 0;$$

здесь $p = -6, q = -9$; следовательно

$$x_1 = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 3$$

$$x_2 = \alpha \sqrt[3]{8} + \alpha^2 \sqrt[3]{1} = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt[3]{5}}{2} \cdot \sqrt[3]{-1}$$

$$x_3 = \alpha^2 \sqrt[3]{8} + \alpha \sqrt[3]{1} = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt[3]{5}}{2} \cdot \sqrt[3]{-1}.$$

Когда величина $\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}$, находящаяся под квадратными корнями, будет положительная, то легко видеть из формулы (4), что один корень предложенного уравнения, именно x_1 , будет *вещественный*, а остальные два, x_2 и x_3 , *мнимые*.

Когда $\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27} = 0$, то усматриваем из этих же формул, что все три корня *вещественные*, и сверх того $x_2 = x_3 = (\alpha + \alpha^2) \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, ибо $\alpha + \alpha^2 = -1$. Наконец, когда при величине p отрицательной, будет $\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27} < 0$, то все три корня x_1, x_2, x_3 , *вещественные и неравные*. Все эти обстоятельства обнаруживаются, когда придем к соображению, что при $\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27} > 0$ имеем

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}} = a + b,$$

где a и b вещественны величины. Когда $\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27} = 0$, то

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}} = a$$

разумя под a также количество вещественное.

Наконец, если $\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27} < 0$, то

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}} = a + b\sqrt{-1}.$$

Так как алгебристы обратили особенное внимание на последний случай, то войдем по этому предмету в некоторые подробности.

Мы предполагаем коэффициент у x отрицательным; следовательно получим уравнение вида

$$(5) \quad x^3 - px + q = 0,$$

где $p > 0$, и сверх того $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$. В следующее первой из формул (4) одна корень уравн. (5) выразится чрез

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}},$$

и, полагая для краткости

$$-\frac{q}{2} = A, \quad \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = B,$$

найдем

$$x_1 = \sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}.$$

Несмотря на видный вид этого последнего выражения, легко убедиться чрез разложение в ряд каждого радикала третьей степени (или иным способом), что оно изображает действительное. Для нахождения этой величины, алгебраисты, со времени Кардана, пытались назвать обозначенные в величинах x_1 кубические корни; но все их усилия остались безуспешны. По сей-то причине этот случай и назван *неразрешимым* или *неприводимым* (*cas irreductible*).

Хотя досел невозможно выразить в вещественном вид корни уравн. (5) и не доказана, но весьма вероятно, что сии корни, по свойству определяющего их уравнения, не могут быть выражены иначе, как посредством мнимых формул. Несмотря на то, что корни уравнения третьей степени, в неразрешимом случае, не могут быть выражены алгебраически в вещественном виде, можно однакож, посредством тригонометрических формул, найти их значения. Действительно, вспоминая что вообще

$$\cos^3 \varphi = \frac{1}{4} \cos 3\varphi + \frac{3}{4} \cos \varphi,$$

откуда

$$\cos^3 \varphi - \frac{3}{4} \cos \varphi - \frac{1}{4} \cos 3\varphi = 0,$$

и, поживив на неопределенную величину φ^3 , получим

$$(\varphi \cos \varphi)^3 - \frac{3\varphi^3}{4} (\cos \varphi) - \frac{\varphi^3}{4} \cos 3\varphi = 0.$$

Если теперь сравним почленно это уравнение с предложенным

$$x^3 - px - q = 0,$$

то найдем

$$x = \varphi \cos \varphi, \quad p = \frac{3\varphi^2}{4}, \quad q = \frac{\varphi^3}{4} \cos 3\varphi,$$

откуда выведем

$$\varphi = 2\sqrt{\frac{p}{3}}, \quad \cos 3\varphi = \frac{4q}{\varphi^3} = \frac{4q}{2p\sqrt{\frac{p}{3}}}.$$

Легко видеть, что величина $\frac{4q}{2p\sqrt{\frac{p}{3}}}$, равная $\cos 3\varphi$, имеет единицы; и в самом деле, возникая в квадранте получаем выражение $\frac{2\sqrt{3}q}{4p}$, которое, в следующее условие $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$, будет < 1 . Но из уравнения

$$\cos 3\varphi = \frac{4q}{2p\sqrt{\frac{p}{3}}},$$

выводим три значения для φ , именно:

$$\varphi_1 = \frac{\vartheta}{3}$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi + \vartheta}{3}$$

$$\varphi_3 = \frac{2\pi - \vartheta}{3},$$

когда для краткости примем

$$\vartheta = \arccos \frac{4q}{2p\sqrt{\frac{p}{3}}},$$

разумя под ϑ наименьшую положительную дугу, удовлетворяющую последнему уравнению.

И такъ, изобразив чрез x_1 , x_2 , x_3 корни предложенного уравнения, найдем, по причине $x = \varphi \cos \varphi$,

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \cos \frac{\vartheta}{3}$$

$$x_2 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi + \vartheta}{3} \right)$$

$$x_3 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi - \vartheta}{3} \right).$$

Возьмем например уравнение

$$x^3 - 3x + \sqrt{2} = 0;$$

найдем $p = 3$, $q = -\sqrt{2}$; следовательно $\varrho = 2$, $\cos 3\varphi = -\sqrt{\frac{1}{2}}$, и $\vartheta = \arccos (\cos = -\sqrt{\frac{1}{2}}) = \frac{3}{4}\pi$. Подставляя эти величины в предыдущия формулы, получим

$$x_1 = 2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$x_2 = 2 \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{\frac{1}{2}}(\sqrt{3} + 1)$$

$$x_3 = 2 \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{\frac{1}{2}}(\sqrt{3} - 1)$$

CARDINAUX (POINTS). (Астр.) ЧЕТЫРЕ СТРАНЫ СВѢТА, то есть, *сверх, низ, восток и запад*.
CARNOT (THEOREME DE). (Мех.) ТЕОРЕМА КАРНО. Теорема, найденная Французскимъ ма-

механикомъ Карно, и относился къ потерѣ изъ которой части живой силы системой тѣла, когда она подвергнута какой либо быстрой перемѣнѣ, напримѣръ, взаимному соударенію. Карно доказалъ, что *сумма живыхъ силъ есть постоянная, до удара, равна суммѣ живыхъ силъ, относившихся къ скоростямъ, потерянны въ остальны точками системы.* И такъ, если изобразимъ чрезъ m какую нѣ есть массу разширенной системы, чрезъ v и V ея скорости до удара и послѣ удара, то аналитическое выраженіе теоремы Карно будетъ

$$\sum mv^2 = \sum mV^2 = \sum mu^2,$$

разумѣя подъ знакомъ \sum суму произведеній массы на квадратъ скорости относительно всѣхъ точекъ системы, такъ что $\sum mv^2 = mv^2 + m'v'^2 + m''v''^2 + \dots$; и проч. —

Новѣйшіе геометры сомнѣваются въ справедливости какъ самой теоремы, такъ и доказательства предложеннаго Карно. Смол. FORCE VIVE, SNOG.

CARQUOIS. КОЛЧАНЪ. Родъ солнечныхъ часовъ, изобрѣтенныхъ *Аполлоніемъ.*

CARRABLE. (Геом.) СПЛОЩАДИМЫЙ. *Courbes carrables; сплюсцимыми кривыи.* Такъ называли прежніе авторы тѣ кривыя линіи, концы площади могутъ быть выражены посредствомъ функций алгебраическихъ, логарифмическихъ и круговыхъ, напримѣръ, *параболу, гиперболу, эллипс* и проч. Это опредѣленіе не можетъ быть ничѣмъ оправдано, почему, кажется, лучше называть *сплюсцимостью, такую кривую, коей площадь выражается алгебраически, а тѣ кривыя, концы площади изображающіяся какими бы то ни было трансцендентными функциями, назывались несплюсцимыми (non-carrables)* — Въ томъ же смыслѣ относительно *спрямленія* кривыхъ линій употребилось слово RECTIFIABLE (Смол.).

CARRÉ или QUARRÉ. (Геом.) КВАДРАТЪ. Четырехугольная фигура, заключающая всѣ стороны равныя между собою, а углы прямые. *Квадратъ* служитъ мѣрою площадей плоскихъ фигуръ, а такъ же и кривыхъ поверхностей. И такъ, найми какую либо площадь значить, ссысать сколько разъ заключается въ ней площадь опредѣленнаго квадрата, прикинутого за единицу. Смол. FIGURE, MESURE, QUADRATURE, AIRE.

CARRÉ GÉOMÉTRIQUE. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КВАДРАТНЫЙ СТОЛИКЪ, КВАДРАТНАЯ МЕНСУЛА. Приборъ, въ родѣ обыкновенной менсулы, который употребляли для съѣмки плановъ. Смол. PLANCHETTE.

CARRÉ (ТРАП). (Геом.) ПРЯМОУГОЛЬНЫЯ ЛИНІИ. Такъ называются въ какихъ либо чертежахъ, напримѣръ въ энкорахъ Натершательной Геометріи, двѣ линіи, взаимно перпендикулярныя, и раздѣляющія листъ бумаги на четыре прямоугольника, почти равные между собою. Одна изъ этихъ линій вообще изображаетъ пересѣченіе вертикальной плоскости съ горизонтальною, а другая, слѣдъ плоскости, перпендикулярной въ одно время къ сказаннымъ двумъ.

CARRÉ или NOMBRE CARRÉ. (Ариф. и Алг.) КВАДРАТЪ, КВАДРАТНОЕ ЧИСЛО. Произведеніе двухъ равныхъ множителей; напримѣръ $9 = 3 \times 3$, $a^2 = a \times a$, $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)(a+b)$ и проч. *Elev. r au carré; возвыситъ въ квадратъ.*

Квадраты четныхъ чиселъ дѣлятся на-цѣло на 4, ибо $(2k)^2 = 4k^2$; что касается до квадрата нечетнаго числа, то легко видѣть, что опирая единицу на что-либо квадрата, получимъ число, дѣлящееся на 8. Дѣйствительно $(2k+1)^2 = 1 + 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$; но одинъ изъ двухъ множителей k или $k+1$ будетъ необходимо четное число; следовательно $4k(k+1)$ будетъ дѣлиться на 8.

Разсматривая цѣлыя числа вида $3k+1$ и $3k+2$, замѣчаемъ, что $(3k+1)^2 = 1 + 3k(3k+2)$, $(3k+2)^2 = 1 + 3(k+1)(3k+1)$; следовательно, квадраты чиселъ обоихъ видовъ $3k+1$ и $3k+2$, по опущеніи единицы, дѣлятся на 3. Легко изъ этого усмотрѣть, что цѣлыя числа вида $3k+2$ никогда не могутъ быть точными квадратами.

RACINE CARRÉE. Квадратный корень. Квадратный кореньъ изъ какого нѣ есть числа именуется такая величина, которая будучи умножена сама на себя, произведетъ данное число. И такъ, 3 есть *квадратный корень* изъ 9, ибо $3 \times 3 = 9$; $a+b$ изображаетъ квадратный корень изъ $a^2 + 2ab + b^2$, ибо $(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$. *Extraire la racine carrée; извлечь квадратный корень.* Дѣйствіе извлеченія квадратнаго корня обозначается знакомъ $\sqrt{\quad}$; и такъ $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a+b$. Смол. EXTRACTION.

CARRÉ-CARRÉ. ВКВАДРАТЬ, ЧЕТВЕРТАЯ СТЕПЕНЬ. Carré-cube, пятая степень. Carré-carré-cube, седьмая степень. Carré-cube-cube, восьмая степень. Carré du cube, шестая степень. Carré-carré-carré, восьмая степень. Carré du sursolide, десятая степень.

CARRÉE (PARENTHÈSE). КВАДРАТНАЯ СКОБКА. Скобки вида [], употребляемые в формулах, несколько сложных. См. PARENTHÈSE.

CARRÉS (ÉQUATIONS AUX — DES DIFFÉRENCES). (Алг.) УРАВНЕНИЕ ВЪ КВАДРАТАХЪ РАЗНОСТЕЙ. Такъ называется уравнение, имеющее корнями своими квадраты разностей между всеми корнями предложенного уравнения. Пусть будетъ $f(x) = 0$ предложенное уравнение, m его степеней, и a какой ни есть его корень; полагая $x = a + z$, найдемъ:

$$f(a + z) = f(a) + f'(a)z + \frac{f''(a)}{1 \cdot 2} z^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} z^m = 0;$$

но $f(a) = 0$, следовательно

$$f'(a) + \frac{f''(a)}{1 \cdot 2} z + \dots + \frac{f^{(m)}(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} z^{m-1} = 0;$$

исключая изъ сихъ двухъ уравнений неопредѣленный корень a , получимъ уравнение въ z -хъ, которое изобразимъ чрезъ $F(z) = 0$.

Легко видѣть что это уравнение, называемое *уравнениемъ въ разностяхъ корней (équation aux différences des racines)*, по причинѣ $z = x - a$, будетъ $m(m-1)$ -ой степени; и действительно, известно, что m количествъ (въ нашемъ случаѣ m корней уравненія $f(x) = 0$), совокупляемая по два, дають $m(m-1)$ соединенийъ. Теперь замѣтимъ, что уравнение $F(z) = 0$ будетъ такого свойства, что каждому его корню z , соотвѣтствующей другой $-z$, ибо, изобразивъ чрезъ a и b два какие ни есть корни уравненія $f(x) = 0$, найдемъ два разности $a - b$ и $b - a = -(a - b)$, которые оба удовлетворяють уравненію $F(z) = 0$. И такъ, $F(z)$ состоятъ изъ множителей вида $[z - (a - b)][z + (a - b)] = z^2 - (a - b)^2$, и следовательно заключаемъ въ себя только четныя степени независимой z , почему

$$F(z) = z^{m(m-1)} + Az^{m(m-1)-2} + Bz^{m(m-1)-4} + \dots + Hz^2 + K = 0,$$

гдѣ A, B, \dots, H, K суть раціональныя функціи

коэффициентовъ уравненія $f(x) = 0$. Полагая $z^2 = y$, найдемъ уравнение

$$y^{\frac{m(m-1)}{2}} + Ay^{\frac{m(m-1)}{2}-1} + By^{\frac{m(m-1)}{2}-2} + \dots + Hy + K = 0,$$

называемое *уравненіемъ въ квадратахъ разностей*.

Напротивъ, пусть будетъ

$$z^2 - 7z + 7 = 0;$$

полагая $x = a + z$ найдемъ

$$a^2 + 5az + 5az^2 + z^3 - 7a - 7z + 7 = 0.$$

Но, по предположенію, a есть корень данного уравненія; почему

$$a^2 - 7a + 7 = 0,$$

въ слѣдствіе чего

$$5a^2 + 5az + z^3 - 7 = 0.$$

Исключая a изъ двухъ послѣднихъ уравненій, получимъ

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0.$$

Возмъ уравнение въ разностяхъ корней; чтобы получить уравнение въ *квадратахъ разностей*, сполнимъ только предположить $z^2 = y$, и найдемъ $y^3 - 42y^2 + 441y - 49 = 0$.

Баринъ (Barin) первый разсматривалъ уравнение въ квадратахъ разностей; впоследствии *Лагранжъ* показалъ употребленіе его для опредѣленія корней въ данномъ уравненіи. Возмъ способъ Лагранжа въ короткихъ словахъ.

Изобразимъ чрезъ a, b, \dots вещественные корни уравненія $f(x) = 0$, и чрезъ $a \pm \beta \sqrt{-1}, a' \pm \beta' \sqrt{-1}, \dots$ его мнимые корни. Корни уравненія въ квадратахъ разностей необходимо будутъ одного изъ слѣдующихъ видовъ:

- 1°. $(a - b)^2$ для двухъ вещественныхъ корней.
- 2°. $(a - a' \pm \beta \sqrt{-1})^2$ для одного вещественнаго и одного мнимаго корня.
- 3°. $[(a - a') \pm (\beta - \beta') \sqrt{-1}]^2$ для двухъ мнимыхъ сопряженныхъ корней.
- 4°. $(2\beta \sqrt{-1})^2 = -4\beta^2$ для двухъ мнимыхъ сопряженныхъ корней.

Первый изъ сихъ видовъ соотвѣтствуетъ вещественнымъ положительнымъ корнямъ уравненія въ квадратахъ разностей; второй и третій, мнимымъ, развѣ только $a = a'$ или $a = a' = \dots$; въ такомъ случаѣ уравнение въ квадратахъ разностей будетъ имѣть равные корни. Наконецъ, четвертый видъ соотвѣтствуетъ вещественнымъ отрицательнымъ корнямъ. И такъ, если не будемъ принимать въ расчетъ равныхъ корней у-

решения в квадратах разностей, но уяснитъ, что оно будетъ имѣть столько отрицательныхъ корней, сколько предложенное уравненіе $f(x) = 0$ имѣетъ различныхъ отрицательныхъ корней. Если найдемъ наименьшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія въ квадратахъ разностей, то корни квадратный изъ сказаннаго предѣла будутъ не менѣе наименьшей разности корней предложеннаго уравненія. Изобразимъ чрезъ ε эцонъ квадратный корень, и составимъ рядъ чиселъ $\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, 4\varepsilon, \dots$; подставляя поочередно сн послѣдніа въ данное уравненіе, узнаемъ, по знакамъ получаемыхъ выводовъ, между какими предѣлами заключается каждый положительный его корень. Чтобы получить числа, между которыми заключаются отрицательные корни предложеннаго уравненія $f(x) = 0$, очевидно стоитъ только измѣнить x въ $-x$, и съ уравненіемъ $f(-x) = 0$, поступать точно такъ, какъ было показано выше. Предѣлы положительныхъ корней уравненія $f(-x) = 0$, будутъ предѣлами отрицательныхъ корней предложеннаго уравненія $f(x) = 0$.

Это правило въ теоретическомъ отношеніи удовлетворительно; но въ приложеніяхъ, по причинамъ сложныхъ выкладокъ, неизбежныхъ при составленіи уравненія въ квадратахъ разностей, оно почти не можетъ быть употреблено. Нынѣ имѣются другіе способы, несравненно удобнѣшіе, для опредѣленія корней. См. STURM (THEORÈME DE), FOURIER (MÉTHODE DE).

САРРЭ (MÉTHODE DES MOINDRES). (Ист. Вар.) СПОСОБЪ НАИМЕНЬШИХЪ КВАДРАТОВЪ.

Этотъ способъ, изобрѣтенный Лекандромъ, по обширности приложеній своихъ, весьма важенъ въ наукахъ, основанныхъ на наблюденіи. Онъ преимущественно употребляется въ томъ случаѣ, когда, по приближеннымъ значеніямъ элементовъ, имѣемъ въ виду опредѣлить величины сихъ послѣднихъ еще съ болѣею точностію посредствомъ наблюденій. Для этого, составляють такъ называемыя условныя уравненія (*équations de condition*), замѣняя каждую величину элемента, выведенную изъ наблюденія, этою самою величиною увеличенною количествомъ весьма малымъ, которое изображаетъ погрѣшность наблюденія. Условное уравненіе, относящееся къ каждому наблюденію, опредѣляетъ погрѣшность наблюденія въ функциіа исконыхъ элементовъ; послѣ того, вѣ-

сно каждому изъ элементовъ, подставляють приближенную его величину, сложенную съ поправкою, которая будетъ вообще количествомъ весьма малое; дажѣ, можно будетъ предположить, мало удаленная отъ истины, что погрѣшность каждого наблюденія изображается линейною функциею поправки элементовъ. Допуская опредѣленные значенія для сихъ поправокъ, найдутся опредѣленные же величины для погрѣшностей наблюденія. Но въ Анализѣ Вѣроятностей доказываютъ, что самыя выгодныя поправки суть тѣ, которыя обращаютъ въ наименьшую величину сумму квадратовъ погрѣшностей. Для доказательства сего предложенія описываетъ читатель въ сочиненіи Лапласа: *Théorie analytique des Probabilités*.

Дабы пояснить сказанное нами о способѣ наименьшихъ квадратовъ, мы приведемъ здѣсь предложеніе его къ опредѣленію одного элемента. — Положимъ, что требуется опредѣлить какую либо величину α . Приближенное значеніе этой величины намъ извѣстно, но мы желаемъ опредѣлить элементъ α почти посредствомъ многочисленныхъ наблюденій. Изобразимъ приближенное значеніе количества α чрезъ a , и чрезъ $a + x$ точную его величину. Предположимъ, что не имѣемъ возможности извѣрять непосредственно элементъ α , но можемъ опредѣлить другія величины $F_1(\alpha), F_2(\alpha), F_3(\alpha), \dots$, зависящія извѣстнымъ образомъ отъ α . Пусть будутъ соответственно A_1, A_2, A_3, \dots величины функций $F_1(\alpha), F_2(\alpha), F_3(\alpha), \dots$, найденныя посредствомъ наблюденій. Если бы сіа наблюденія были совершенно точны, то имѣли бы $F_1(\alpha) = A_1, F_2(\alpha) = A_2, F_3(\alpha) = A_3, \dots$; но такъ какъ это въ строгомъ смыслѣ невозможно, то предыдущія равенства надобно будетъ замѣнить уравненіями

$$\begin{aligned} F_1(\alpha) &= A_1 + \varepsilon_1 \\ F_2(\alpha) &= A_2 + \varepsilon_2 \\ F_3(\alpha) &= A_3 + \varepsilon_3 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

гдѣ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ изображаютъ неизвѣстныя погрѣшности, происходящія отъ несовершенства наблюденій. Подставляя въ послѣднія уравненія вѣсто α равную ей величину $a + x$, и наблюдая, что по причинѣ x весьма малой, $F(a+x)$ можно замѣнять суммою $F(a) + F'(a)x$, получимъ

$$\begin{aligned} F_1(a) + F'_1(a)x &= A_1 + \varepsilon_1 \\ F_2(a) + F'_2(a)x &= A_2 + \varepsilon_2 \\ F_3(a) + F'_3(a)x &= A_3 + \varepsilon_3 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Предполагая же для краткости

$$F_1(a) - A_1 = \lambda_1 \quad F_1'(a) = u_1$$

$$F_2(a) - A_2 = \lambda_2 \quad F_2'(a) = u_2$$

$$F_3(a) - A_3 = \lambda_3 \quad F_3'(a) = u_3$$

найдем

$$\epsilon_1 = \lambda_1 + u_1 x$$

$$\epsilon_2 = \lambda_2 + u_2 x$$

$$\epsilon_3 = \lambda_3 + u_3 x$$

Для различных предположений относительно погрешностей $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$ которые могут произойти отъ несовершенства наблюдений, найдем также и различные поправки x . Но мы сказали выше, что посредством Истисления Вероятностей доказываютъ, что величина x , которую надлежитъ предпочесть въмъ другимъ, обращающъ въ *наименьшую возможную* сумму квадратовъ погрешностей, то есть сумму

$$\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \dots = (\lambda_1 + u_1 x)^2 + (\lambda_2 + u_2 x)^2 + (\lambda_3 + u_3 x)^2 + \dots$$

по правиламъ Дифференціального Истисленія находить, что последнее выражение получить наименьшее значеніе, уравнивъ нулю его производную; следовательно

$$\mu_1(\lambda_1 + u_1 x) + \mu_2(\lambda_2 + u_2 x) + \mu_3(\lambda_3 + u_3 x) + \dots = 0,$$

откуда

$$x = - \frac{\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3 + \dots}{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \dots}$$

Вотъ поправка, которую должно предпочесть всякой другой. И такъ, для отысканія поправки одного или многихъ элементовъ, получаемихъ посредствомъ наблюдений, надобно будетъ приписать поправкамъ такіа величина, которые бы обращали сумму квадратовъ погрешностей въ *наименьшую*.— Для сличенія, опишемъ знаменитый къ славѣ: AVANTAGEUX (RESULTATS LES PLUS).

CARRÉ MAGIQUE. (Теор. Чис.) **ВОЛШЕБНЫЙ, МАГИЧЕСКИЙ КВАДРАТЪ.** Раздѣливъ квадратную фигуру на квадратами или клетки, и написавъ въ нихъ послѣднихъ натуральныи числа 1, 2, 3, 4... по порядку, получится такъ называемый *натуральный* или *естественный квадратъ*; таковъ, напримеръ, слѣдующій:

A	c	c'	c''	B
a	1	2	3	b
a'	4	5	6	b'
a''	7	8	9	b''
C	d	d'	d''	D

Но если въ клеткахъ расположить нѣ же числа такъ, что бы суммы, получаемыя чрезъ сложеніе чиселъ въ каждомъ изъ горизонтальныхъ рядовъ $ab, a'b', a''b'', \dots$ вертикальныхъ $cd, c'd', c''d'', \dots$ и по двумъ діагоналямъ AD, BC , были равны между собою, то въ такомъ случаѣ квадратъ называется *магическимъ*. Вотъ примеры:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

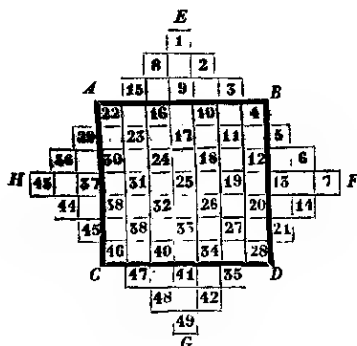
16	14	8	2	25
3	22	20	11	9
15	5	4	23	17
24	18	12	10	1
7	5	21	19	13

Въ первомъ квадратѣ сумма каждаго изъ горизонтальныхъ, вертикальныхъ и діагональных рядовъ равна 15, во второмъ 34, а въ третьемъ 65.

Въ вѣка суевѣрія, такому искусственному расположенію чиселъ приписывали различныя волшебныя свойства, и часто употребляли на мажикствахъ. Вотъ, безъ сомнѣнія, причина, по которой никакого рода квадраты названы *волшебными*. Волшебные квадраты раздѣляюши на *нечетные* и *четные*. Мы ограничимся краткими изложеніемъ способа для составленія каждаго изъ сихъ двухъ родовъ квадратовъ. Начнемъ съ нечетныхъ, для которыхъ построеніе проще нежели для четныхъ.

Составленіе нечетныхъ волшебныхъ квадратовъ. *Башетъ-де-Мезириакъ*

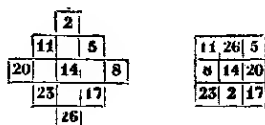
в своих *Problèmes plaisans et delectables*, напечатанных в 1624 году, предлагает следующий способ, который приложим к квадрату от 7, то есть к 49. — Составить квадрат *ABCD*



и разложим его на 49 квадратиков или клеток. На каждом из четырех боков квадрата строим усугубленные треугольники *ABE*, *BDF*, *DCG*, *CAH*, и получаем таким образом новый, усугубленный квадрат *EFGH*; в этом квадрате пишем в рядах, параллельных диагонали *AD*, числа 1, 2, 3, 4, ... до 49 по порядку, так как являются из нашего чертежа. Потом, опускаем фигуру *ABE* до *CD*; цифры 1, 8, 2, 15, 9, 3 займут пустые клетки в нижней части квадрата *ABCD*. Фигуру *CDG* поднимаем так, чтобы *CD* совпала с *AB*, и числа 47, 41, 35, 48, 42, 49 займут опять пустые клетки первоначального квадрата. Двигаем то же самое с фигурой *BDF*, то есть, не переворачивая ее, переносим так, чтобы линия *BD* совпала с *AC*, а фигуру *CAH* двигаем до совпадения стороны *AC* с *BD*; таким образом все пустые клетки квадрата *ABCD* наполнятся цифрами, находящимися в усугубленных треугольниках, и мы получим следующий волшебный квадрат:

22	47	16	41	10	35	4
5	25	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

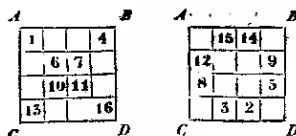
Башеи присовокупил к этому, что вместо ряда натуральных чисел 1, 2, 3, ... можно брать какую угодно арифметическую прогрессию. Например, положим, что желаем составить волшебный квадрат из девяти чисел 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26; по его правилу найдешь шестнадцать



Можно заметить, что для каждого квадратного числа членов арифметической прогрессии существует множество различных волшебных квадратов. Например, из чисел 1, 2, 3, ... до 25 составляются между прочими следующие волшебные квадраты:

1	20	25	16	5	11	24	17	10	3	17	24	1	8	15
4	18	9	12	22	4	12	25	18	6	23	5	7	14	16
15	7	15	19	11	7	5	15	21	19	4	6	15	20	22
24	14	17	8	2	20	8	1	14	22	10	12	19	21	3
21	6	3	10	25	23	16	9	2	15	11	18	26	2	9

Составление четных волшебных квадратов. Во первых заметим, что четный волшебный квадрат из четырех чисел 1, 2, 3, 4 невозможен; простейший после $2^2 = 4$ будет $4^2 = 16$, который допускает множество видов; и так как волшебный квадрат из 16 чисел служит основанием дальнейшим четным волшебным квадратам, мы сперва покажем один из способов, служащих для его составления. — В квадрат *ABCD*



наполняем сперва диагональными клетками, считая по порядку 1, 2, 3, ... до 16 от угла *A*, и пропуская числа 2, 5, 8, 9, 13, 14, 15, не находящиеся на диагоналях. Чтобы заполнить остальные квадратники, начинаем с угла *D*, и считаем от правой руки к левой 1, 2, 3, 4, 5, ... пропуская те числа, которые уже были напи-

саны. Соединяя эти два квадрата, получился следующий волшебный квадрат для 16:

(A)

1	15	14	4
12	6	7	9
5	10	11	5
13	3	2	16

Этот квадрат, как уже сказано выше, служил для построения других чётных. Очевидно, что вместо чисел 1, 2, 5, ... до 16, можно взять 16 чисел сразу из какой угодно арифметической прогрессии, и составить из них, по предложенному сейчас правилу, волшебный квадрат. Например, если бы взяли следующие 16 чисел: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, то поставив их в квадрат (A) 11 вместо 1, 12 вместо 2, 13 вместо 3, ... 26 вместо 16, наша бы:

(B)

11	25	24	14
22	16	17	19
18	20	21	15
23	13	12	26

в котором сумма каждого горизонтального, вертикального и диагонального ряда равна 74. Положим теперь что желаем построить волшебный квадрат для 36. Для этого, составляем волшебный квадрат из шестнадцати средних чисел в ряду 1, 2, 3, ... до 36. Первое из этих средних чисел очевидно получится разделив разность 36—16 на 2, и прибавить к частному единицу. Таким образом найдутся следующие шестнадцать средних чисел: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, которые уже были сейчас расположены в волшебном порядке. Крайние 20 чисел располагаем в двух рядах

(1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

(2) 36, 35, 34, 33, 32, 31, 30, 29, 28, 27

так, чтобы сумма двух соответствующих чисел равнялась 37. — Теперь заключаем квадрат (B) в рамку *abcd*

a	1	35	34	30	5	6	b
33	11	25	24	14	4	4	
8	22	16	17	19	29		
9	18	20	21	15	28		
27	23	13	12	26	40		
31	2	3	7	32	16		d
c							

С небольшими изменениями заметим, как этим образом должны быть расположены члены в клетках, составляющих рамку *abcd*. Пишем 1 и 6 по углам *a* и *b* и соответствующим числам 36 и 31 в противоположных углах *d* и *c*, дабы суммы по двум диагоналям рамки были одинаковы, именно 37. Так как теперь имеем уже внизу два больших числа из ряда (2), то пишем сверху два ближайших больших числа 35 и 34, а внизу соответствующих им 2 и 5. Помогая спавшим внизу большое число 32, а сверху 5 и 30, внизу же 7; таким образом горизонтальные ряды *ab* и *cd* наполнены, и сумма каждого из них равна 111. Боковые клетки рамки наполняются уже самыми простыми образом: оставшиеся числа в (1) и (2) рядах размещают так, чтобы с левой стороны было столько больших, сколько и малых, то есть, в настоящем случае по-три. То же самое должно разуться и о боковых клетках с правой стороны. При этом должно наблюдать: чтобы против каждого числа стояло соответствующее ему, например, 33 против 4, число 29 против 8, и так далее, и чтобы сумма каждого бокового ряда равнялась 111. Все эти условия выполнены в приведенном сейчас квадрате. Руководствуясь показанными правилами, легко построить магический квадрат для 64, основываясь уже на найденном квадрате 36. Помогая для квадрата 100, и так далее. Приведенный способ придуман *де ла Гиром*. Когда известно арифметической прогрессии применяем геометрическую, и будем числа сей последней распределять в квадрат, по изложенным сейчас правилам, то получим так называемые *геометрические волшебные квадраты* (*carrés magiques géométriques*); свойство их будет такое, что произведение полученных трех перемножение всех чисел, составляющих каждый горизонтальный, вертикальный и диагональный ряд, будут равны между собою. Положим, что даны 9 членов геометрической прогрессии 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, и желаем составить из них геометрический волшебный квадрат. Так как 9 число нечетное, то употребляем предложенное для этого случая построение:

		3		
	81		9	
2187		243		27
	6561		729	
		19683		

отъ котораго переходимъ къ квадрату

81	19683	9
27	243	2187
6561	3	729

Для чётнаго геометрическаго волшебнаго квадрата, возьмемъ 16 чиселъ сряду, наприимъ, изъ геометрической прогрессии 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768; но объясненными правилами находимъ сперва

1			8
	32	64	
	512	1024	
4096			32768

а потомъ

1	16384	8192	8
2048	32	64	256
128	512	1024	16
4096	4	2	32768

Есть еще волшебные квадраты въ гармонической пропорции. Смолт. HARMONIQUE. Говоря о волшебныхъ квадратахъ, мы должны упомянуть, что математикъ Соверъ (Sauveur) разсматривалъ также и волшебные кубы. Подъ этимъ названіемъ онъ разумѣлъ кубъ, состоящій изъ кубическихъ элементовъ, которыми наполняютъ числами такія образцы, что суммы всѣхъ чиселъ, заключающихся въ каждой изъ слоевъ, параллельныхъ тремъ основаніямъ куба, были равны между собою, а также и каждой изъ суммъ, получаемыхъ чрезъ сложение чиселъ принадлежа-

щихъ шести слоямъ или плоскостямъ, проходящимъ чрезъ двѣ діагонали противоположныхъ основаній. Геометрическій волшебный кубъ то же самое въ отношеніи арифметическаго куба, что геометрическій волшебный квадратъ въ разсужденіи арифметическаго. Чашапи, желающіе ознакомиться съ симъ предметомъ, найдутъ въ надлежащихъ подробностяхъ въ Mémoires de l'Académie Royale des sciences, за 1710 годъ, въ статьѣ подъ заглавіемъ: Construction générale des quarrés magiques; par M. Sauveur. — Диамундъ Москопулъ (Moscopule), Греческій писатель, жившій въ XIV или XV вѣкѣ, сколько извѣстно, первый писалъ о волшебныхъ квадратахъ. Его сочиненіе, въ рукописи, находится въ Парижской Королевской Библіотекѣ. Въ книгѣ Агриппы, жившаго въ XVI вѣкѣ, и котораго современники подовѣряли въ магію, находимъ семь волшебныхъ квадратовъ для чиселъ отъ 3 до 9. Эти числа были предпочтены другимъ потому, что, по системѣ Агриппы, ихъ квадраты суть планетныя. Квадратъ 3-хъ принадлежалъ Сатурну; 4-хъ, Юпитеру; 5-ти, Марсу; 6-ти, Солнцу; 7-ми, Венерѣ; 8-ми, Меркурию; и наконецъ, квадратъ 9-ти, Лунѣ. Башетъ де-Мезириакъ, имѣя только въ виду названные квадраты Агриппы, ибо рукопись Москопула не была ему извѣстна, занялся изслѣдованіемъ волшебныхъ квадратовъ, и нашелъ способъ для составленія нечѣтныхъ волшебныхъ квадратовъ; но для чѣтныхъ, онъ не могъ придумать ничего удивительнаго. Послѣ Башета, Френкль (Frenicle), извѣстный своею особенною проницательностію въ разсужденіяхъ о свойствахъ чиселъ, предпринялъ новыя изслѣдованія по предмету волшебныхъ квадратовъ, и усовершенствовалъ ихъ теорію. При составленіи волшебныхъ квадратовъ, сверхъ обыкновенныхъ условій, онъ вводилъ еще новыя требованія, которыя дѣлали задачу болѣе затруднительною. Его упражненія о волшебныхъ квадратахъ были изданы уже послѣ его смерти де-ла Гиролью, въ 1695 году. Въ 1703 году Брюссельскій Каноникъ Пуаньяръ (Poignard), издалъ книгу о волшебныхъ квадратахъ, названную имъ carrés sublimes. Въ этомъ сочиненіи заключаются очень остроумные приемы для построения волшебныхъ квадратовъ изъ чиселъ составляющихъ прогрессію арифметическую, геометрическую и гармоническую.

De la Hire (de la Hire) въ *Mémoires de l'Académie Royale des sciences* за 1705 годъ, предложилъ общій способъ для составления нечетныхъ и четныхъ квадратовъ; онъ основывался на построении ихъ и другихъ на разложеніи предложеннаго квадрата на два другіе, которые называютъ *первоначальными* (*primitifs*). Г-нъ *Coséer* (*Sauveur*) занимался также этимъ предметомъ; изслѣдованія его помѣщены въ *Mémoires de l'Académie Royale des sciences*, 1710 года, въ страницѣ подъ заглавіемъ: *Construction générale des quarrés magiques*. Наконецъ, въ 1750 году, математикъ *d'Ons-ан-Бра* (*d'Ons-en-Bray*) предложилъ новый способъ для составления четныхъ волшебныхъ квадратовъ, а послѣ него *Ралье-дез-Урмъ* (*Rallier-des-Ourmes*) усовершенствовалъ еще и обобщилъ прежніе способы. — Въ новѣйшее время аналиты оставили этотъ предметъ безъ вниманія, и, сколько намъ извѣстно, не сдѣлано никакихъ новыхъ попытокъ для усовершенствованія этой теоріи, довольно трудной, и въѣшъ съ тѣмъ доселѣ совершенно бесполезной.

CARRER, или, употребительнѣе, **ÉLEVER AU CARRÉ**. (Арм. и Алг.) **ВОЗВЫСИТЬ ВЪ КВАДРАТЪ**. Возвысить въ квадратъ какое нибудь число или количество значить, помножить по числу или количеству само на себя. Напримеръ, для возвышенія 3 въ квадратъ, умножаемъ 3 на 3, и получаемъ число 9, изображающее квадратъ 3-хъ. Квадратъ двуукленного количества $a + b$ будетъ:

$$(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2,$$

то есть: *квадратъ двуукленного количества равенъ квадрату первой части, плюсъ удвоенному произведенію первой на вторую, и плюсъ квадрату второй части*.

CARRER. (Геом.) **ОПРЕДѢЛИТЬ, НАЙТИ ПЛОЩАДЬ, СМОЩАДНТЬ**. *Carrer un triangle*, найти площадь треугольника; *carrer une portion de la cycloïde*, найти площадь части циклоиды. Смол. AIRE.

CARTE. (Мат. Геогр.) **КАРТА**. Чертежъ, составленный по извѣстнымъ правиламъ проецированія, изображающій земную поверхность, или нѣкоторую ея часть, съ означеніемъ морей, острововъ, государствъ, городовъ, озеръ, рѣкъ, горъ и проч.

Изобрѣтеніе географическихъ картъ относится къ VI столѣтію до Р. X., и приписываютъ *Анаксимандру*, преемнику *Валеса*, основавшаго въ Греціи Іонійскую Школу. *Страбонъ* повѣствуетъ, что Анаксимандръ представлялъ своимъ соотечественникамъ черномъ смракъ и морей, посѣщаемыхъ Греческими путешественниками. Въпъ, по мнѣнію большей части авторовъ, происхожденіе *географическихъ картъ*.

CARTES UNIVERSELLES или **MARÉMONDES**. Всеобщія карты или полушарія. Карты, на коихъ изображена вся поверхность земли.

CARTES PARTICULIÈRES или **CARTES SPÉCIALES**. Частныя, спеціальныя карты, изображающія цѣлое Государство или нѣкоторую его часть. — Эти двѣхъ родовъ картъ назывались *Географическими*, для означенія ихъ былъ *Гидрографическіе* или *Морскіе* карты, на коихъ изображаютъ моря, острова, берега, мели, подводныя камни, явки, и проч.

CARTES DE MERCATOR. Меркаторскія карты. Смол. RÉDUTES (CARTES).

CARTE ITINÉRAIRE. Путевая, дорожная, почтовая карта. **CARTES CÉLESTES**; Небесныя карты. **CARTE MILITAIRE**; Военная карта.

CARTESIANISME. КАРТЕЗИАНИЗМЪ. Система Физики, предложенная *Декартомъ*, и извѣстная подъ наименованіемъ *системы вихрей*. Смол. **TOURBILLONS (SYSTÈME DES)**.

CARTÉSIENS. КАРТЕЗИАНЫ. Последователи ученію *Декарта*. Смол. выше.

CAS IRREDUCTIBLE DU TROISIÈME DEGRÉ или просто, **CAS IRREDUCTIBLE**. (Алг.) **НЕПРИВОДИМЫЙ, НЕРАЗРѢШИМЫЙ СЛУЧАЙ**. Смол. **CARDAN (RÈGLE DE)**.

CAS. (Ист. Вѣр.) **СЛУЧАЙ**. *Cas favorables*, благоприятные случаи; *cas défavorables*, неблагоприятные случаи. Смол. **PROBABILITÉS, CHANCE**.

CASCADES (MÉTHODE DES). **СПОСОБЪ КАСКАДЪ, УСТУПОВЪ**. Такъ назвалъ Французскій математикъ *Ролл* придуманный имъ способъ для рѣшенія численныхъ алгебраическихъ уравненій. Такъ какъ способъ каскадъ примѣняется самъ по себѣ, въ особенностяхъ когда примѣнъ въ соображеніи несовершенствъ алгебраическаго анализа того времени, къ которому онъ

неспеша его опирались, и какъ съ другой стороны, въ одинъ мигора, сколько намъ извѣстно, не писалъ объ немъ удовлетворительнымъ образомъ, что мы думали, что наши читатели не сочтутъ великими нѣтъ подробности, въ которыхъ мы ведемъ по сему предмету. При такомъ изложении, мы будемъ по возможности придерживаться изъ наименований, употребляемыхъ въ *)).

Прежде всего Ролль употребляетъ предложенное уравненіе такъ, чтобы коэффициенты у высшей степени неизвѣстной, равнялся единицу, и чтобы коэффициенты того уравненія, расположеннаго по нисходящимъ степенямъ неизвѣстной, были попеременно положительныя и отрицательныя.

Напримѣръ, если бы имѣли уравненіе

$$2x^5 - 5x^4 - 5x + 10 = 0,$$

то помноживъ его на $2^3 = 8$, и положивъ $2x = y$, получили бы

$$y^5 - 5y^4 - 10y + 40 = 0.$$

Теперь, для преобразованія данного уравненія въ такое, въ которомъ бы коэффициенты были попеременно положительныя и отрицательныя, сносимъ только взявъ положительнымъ образомъ наибольший изъ отрицательныхъ коэффициентовъ, и придавъ къ нему единицу; помножь положимъ неизвѣстную данного уравненія, равно найденному числу, безъ новой неизвѣстной. И такъ, въ настоящемъ случаѣ, въ которомъ наибольший отрицательный коэффициентъ есть 10, получимъ

$$y = 11 - z.$$

Подстановка этой величины у въ предыдущее уравненіе дадутъ намъ въ слѣдующее:

$$z^5 - 30z^4 + 287z - 898 = 0,$$

въ которомъ дѣйствительно знаки передъ коэффициентами удовлетворяютъ требуемому условию.

Очевидно, что послѣ такого преобразованія, уравненіе не можетъ имѣть корней отрицательныхъ; они только могутъ быть или положительныя, или нулевыя.

Теперь условимся въ некоторыхъ наименованіяхъ, употребляемыхъ Роллемъ.

*) Способъ, о которомъ идетъ рѣчь, изложенъ со всеми возможными подробностями въ сочиненіи Ролля: *Traité d'Algèbre, ou principes généraux pour résoudre les questions de Mathématique*. Par M. Rolle, de l'Académie Royale des Sciences, et Professeur en Mathématiques. Paris 1790.

Онъ называетъ туль *малую гипотезу* (*petite hypothèse*); *большая гипотеза* (*grande hypothèse*) получается, придавъ единицу къ наибольшему изъ отрицательныхъ коэффициентовъ предложеннаго уравненія, взятому съ положительнымъ знакомъ; и такъ, *большая гипотеза* предыдущаго уравненія есть 899. Если коэффициенты у высшей степени неизвѣстной не единица, а другое число, напримѣръ a , то большая гипотеза получается, раздѣливъ наибольший изъ отрицательныхъ коэффициентовъ, взятыхъ положительнымъ образомъ, на a , и придавъ къ частному единицу, или, если покажется удобнѣе, число большее единицы. Замѣтимъ, что *малая* и *большая гипотезы* не иное что, какъ пределы положительныхъ корней данного уравненія.

Средними гипотезами (*hypothèses moyennes*) уравненія называются числа такого свойства, что между каждыми двумя смежными изъ нихъ заключается только одинъ корень предложеннаго уравненія. И такъ, если, сверхъ двухъ крайнихъ гипотезъ, будутъ извѣстны и всѣ среднія, то, выражаясь по нумеру, корни уравненія будутъ отдѣлены.

Наименьшая изъ всѣхъ гипотезъ, то есть *нуль*, называется *первою гипотезою*, ближайшая — *второю*; непосредственно слѣдующая за второю — *третьею*, и такъ далѣе, до большой гипотезы.

Недостаточными корнями (*racines défailantes*) Ролль называетъ мнимые и равные вещественные корни; въ послѣднемъ случаѣ, онъ принимаетъ всѣ равные корни за одинъ, и называетъ ихъ *недостаточными корнями первого рода*, а мнимые корни называетъ *недостаточными второго рода* (*racines défailantes de première et de seconde espèce*).

Возьмемъ теперь уравненіе

$$(1) \quad ax^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - \dots \pm gx^2 \mp hx \pm i = 0;$$

показывая каждый членъ изъ показателя неизвѣстной x , помножь раздѣливъ всѣ члены на x , и уравнивъ нулю проведшее отъ нихъ дѣйствіе выраженіе, получимъ

$$(2) \quad mx^{m-1} - (m-1)ax^{m-2} + (m-2)bx^{m-3} - \dots \pm 2gx \mp h = 0.$$

Производя надъ этимъ уравненіемъ тѣ же дѣйствія, и раздѣля еще на 2, получимъ

$$(3) \quad \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} - \frac{(m-1)(m-2)}{2} ax^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{2} bx^{m-4} - \dots \pm g = 0.$$

Повторяя ту же самую действительность, и разделив на 3, найдемъ

$$(4) \frac{m(m-1)(m-2)}{3 \cdot 5} x^{m-3} - \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 5} a x^{m-4} + \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{3 \cdot 5} b x^{m-5} - \dots = 0,$$

и такъ далѣе, пока не дойдемъ до линейнаго выраженія относительно x .

Уравненія (1), (2), (3), (4) ... называются *каскадами*. Уравненіе первой степени именуется *первою каскадою*, второй степени — *второю каскадою*, третьей степени — *третьею каскадою*, и такъ далѣе. Напримѣръ уравненіе

$$x^4 - 24x^3 + 198x^2 - 648x + 475 = 0$$

доставляетъ слѣдующія каскады, которыя располагаются такъ образомъ:

$$\begin{aligned} \text{Первая каскада} & \dots\dots\dots 4x - 12 = 0 \\ \text{Вторая каскада} & \dots\dots\dots 6x^2 - 72x + 198 = 0 \\ \text{Третья каскада} & \dots\dots\dots 4x^3 - 72x^2 + 396x - 648 = 0 \\ \text{Четвертая каскада} & x^4 - 24x^3 + 198x^2 - 648x + 475 = 0. \end{aligned}$$

Замѣтимъ мимоходомъ, что если изобразимъ предложенное уравненіе чрезъ $f(x) = 0$, и предположимъ, что оно степени m , то, употребляя знаменитое произвольное функцій, послѣдовательныя каскады предложеннаго уравненія будутъ

$$\begin{aligned} 1\text{-ая каскада} & \dots\dots\dots \frac{f^{(m-1)}(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)} = 0 \\ 2\text{-ая каскада} & \dots\dots\dots \frac{f^{(m-2)}(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-2)} = 0 \\ 3\text{-ья каскада} & \dots\dots\dots \frac{f^{(m-3)}(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-3)} = 0 \\ & \dots\dots\dots \\ (m-2)\text{-ая каскада} & \dots\dots\dots \frac{f''(x)}{1 \cdot 2} = 0 \\ (m-1)\text{-ая каскада} & \dots\dots\dots \frac{f'(x)}{1} = 0 \\ m\text{-ая каскада} & \dots\dots\dots f(x) = 0. \end{aligned}$$

Условившись въ сихъ наименованіяхъ, приведемъ изъ Алгебры Ролля самое употребленіе каскадовъ для рѣшенія уравненій:

„Корни каждой каскады принимаются за среднія ипопезы слѣдующей каскады.

„Когда всѣ ипопезы одной каскады будутъ извѣстны, то беремъ первую ипопезу со второю; вторую съ третьей, третью съ четвертою, и такъ далѣе; каждое дѣйствіе такого рода будетъ служить для опредѣленія корней слѣдующихъ каскадовъ.

„Примѣръ. Если бы имѣли уравненіе $x^5 - 57x^4 + 936x^3 - 3780x^2 = 0$ *, то получили бы слѣдующія три каскады:

$$\begin{aligned} 3x - 57 &= 0 \\ 3x^2 - 114x + 936 &= 0 \\ x^3 - 57x^2 + 936x - 3780 &= 0. \end{aligned}$$

„Назъ первой каскады выволимъ $x = 19$. И такъ, 19 есть средняя ипопеза слѣдующей каскады; крайнія ея ипопезы сумъ: 0 и 39. И такъ 0, 19, 39 сумъ ипопезы каскады $3x^2 - 114x + 936 = 0$.

„Посредствомъ двухъ первыхъ ипопезъ 0 и 19 найдемъ, что 12 есть одинъ изъ корней второй каскады; когда возьмемъ два ипопезы 19 и 39, то усмотримъ, что другой ея корень равенъ 26; и такъ 12 и 26 сумъ корней второй каскады. Такъ какъ сія послѣдняя могутъ быть принимаемы за среднія ипопезы третьей каскады, для которой крайнія ипопезы будутъ 0 и 3781, то, для этой третьей каскады, совокупность ипопезъ будетъ 0, 12, 26, 3781. Число, бы найши ея корни, рассматриваемъ пары ипопезъ 0, 12; 12, 26; 26, 3781. Первая пара доставляетъ корень 6, вторая даетъ 21, а третья, 30. И такъ 6, 21 и 30 сумъ корни третьей каскады, или, что все равно, предложеннаго уравненія.

„Когда каскада имѣетъ действительные корни (*casus effectivus***), то ипопезы этой каскады доставляютъ попеременно + и —.

„Если совокупность действительныхъ корней будетъ число четное, то первая средняя ипопеза доставивши —, вторая +, третья —, четвертая +, и такъ далѣе до послѣдней средней ипопезы, доставляющей знакъ —.

„Но ежели совокупность действительныхъ корней выражается числомъ нечетнымъ, то первая средняя ипопеза доставляетъ +, вторая —, третья +, четвертая —, и такъ далѣе до послѣдней средней ипопезы, которая должна доставить знакъ —.

*) Роль въ уравненіяхъ вмѣсто знака равенства =, употреблялъ слѣдующій: ∞ ; вмѣсто 0 (нуля) онъ писалъ \emptyset .

**) Подъ наименованіемъ *casus effectivus* Роль разумѣлъ корни *вещные* и *нечетные*, и, сверхъ того, *положительные*. И такъ, уравненіе $x^3 - 4x^2 + 6x - 3$ имѣетъ въ этомъ смыслѣ только два *корня действительныхъ*, именно 1 и 2.

„Если расположить знаки по два в знаков

„порядок:

Для четных степеней: $- + | - + | -$ и проч.

Для нечетных степеней: $+ - | + - | +$ и проч.

„то должно будет заметить, что если два
„ипотезы, которые должны бы привести к
„одной из этих пар знаков, таковы, что на
„или другая не доставляет $+$ или $-$, против-
„но сказанному, то каскада, для которой это
„случилось, будет иметь недостаточные корни
„(*racines défectives*). Сии последние бывают
„двух родов.

Недостаточные корни первого рода.

„Если случилось, что гипотезы доставляют
„о вместо $+$ или $-$, то каждая из сих ипо-
„тез будет корнем той каскады, в которую
„производился подстановка; в знаков слу-
„чай эта каскада будет иметь столько недо-
„статочных корней первого рода, сколько бу-
„дет различных гипотез, обращающих ее в
„0. И так, бесполезно будет сравнивать на-
„кую гипотезу с следующей; очевидно также,
„что для следующей каскады число гипотез у-
„меньшится.

„Пример. Пусть будет уравнение $z^5 - 15z^3$
„ $+ 72z - 103 = 0$; найдутся следующие каскады:

$$z - 5 = 0$$

$$z^2 - 10z + 24 = 0$$

$$z^3 - 15z^2 + 72z - 108 = 0.$$

„Первая из них доставляет $z = 5$; и так,
„получим для гипотез второй каскады 0, 5, 11.
„Посредством 0 и 5 находим $z = 4$, а посред-
„ством 5 и 11, $z = 6$ для корней второй каскады.
„Следовательно, гипотезы 3-й каскады будут 0,
„4, 6, 109. Употребляя гипотезы 0 и 4, нахо-
„дим корень $z = 3$; но когда споем рассматри-
„вать гипотезы 4 и 6, то увидим, что 6 есть
„корень 3-ей каскады; и так, гипотезы 4 и 109
„длаются излишними, потому что они смежны
„с 6. Отсюда заключаем, что предложенное
„уравнение имеет только два корня 5 и 6; третий
„же корень недостаточный *).

Недостаточные корни второго рода.

„Если подстановка гипотезы, в противность
„сказанному выше, не доставит ни нуля ни

*) Очевидно, что этот корень равен также 6; и так,
три корня предложенного уравнения суть 3, 6 и 6.

„плюса или минуса, то должно будет считать
„два недостаточных корня в той каскаде, в
„которую были подставлены эти гипотезы;
„столько же недостаточных корней будет в
„каждой из следующих каскад, и для каждой
„пары знаков, для которой это случилось; и
„так, если иметь три пары знаков, то дол-
„жно будет считать шесть недостаточных
„корней в каждой из следующих каскад. На
„практике, достаточно обращать внимание толь-
„ко на ту каскаду, в которую подставляли ипо-
„тезы. Корни, недостающие таким образом,
„называются недостаточными корнями второ-
„го рода.

„Пример. Имя уравнение $z^3 - 9z^2 + 28z - 30$
„ $= 0$, составим его каскады

$$z - 3 = 0$$

$$z^2 - 6z + 9 = 0$$

$$z^3 - 9z^2 + 28z - 30 = 0;$$

„из первой выводим $z = 3$; и так 0, 3, 7 бу-
„дут гипотезы второй каскады. Но вторая
„гипотеза, то есть 3, доставляет $+$ вместо
„ $-$; следовательно, рассматривание гипотез 3 и
„7 длается излишним, и мы заключаем, что
„уравнение $z^2 - 6z + 9 = 0$, а равно и следующее
„за ним, имеют два корня недостаточных
„второго рода. И так, третья каскада имеет
„столько один действительный корень.

„Но в практике достаточно знать, что вто-
„рая каскада ничего не доставляет прешей,
„так что, для определения корня 3-ей каскады,
„имеем только ее крайние гипотезы. Эти ипо-
„тезы суть 0 и 31, посредством которых на-
„ходим $z = 3$. И так 3 есть единственный
„действительный корень предложенного урав-
„нения.

К этой выписке прибавим, что Ролье, в
своей *Алгебре*, предлагает два способа для опре-
деления корня рационального, заключающегося ме-
жду двумя смежными гипотезами. Эти способы,
основанные на рассматривании так называемых
имя: *moitiés accommodantes*, собственно говоря, не
иное что, как последовательным подстановле-
нием средних чисел между двумя гипотезами, вы-
водимых по вышеизложенным правилам. Ролье на-
зывает *первую accommodанную половину* (*pre-
mière moitié accommodante*) какого либо числа, бли-
жайшее целое число, заключающееся в полови-

из последней цифры с левой стороны, с помощью нулей, сколько цифр в предложенном числе, без одной. И так, первая приравненная половина числа 8755, 9708 есть 4000. Можно также принять 5000 за первую приравненную половину числа 9708. Когда выстроим одной цифры с левой стороны прикинем в соображение два, три и проч., то получим *вторую, третью... приравненную половину*. И так

1-ая приравненная половина числа 8755 есть 4000
2-ая
3-ья
4-ая

Для определения рационального корня уравнения складываем гипотезы, заключающие искомым корень, и от сужим их берущи первую приравненную половину, которая изобразит новую гипотезу. То же самое должно будет происходить над двумя ближайшими гипотезами, доставляющими противные знаки, и продолжать эти действия до тех пор, пока не определится искомым корень. Если бы первая приравненная половина, после некоторого числа действий, привели нас к полученным уже прежде гипотезам, то надлежало бы употребить вторую половину, а в случае недостаточности сечь последние, третью и дальнейшие половины.

Для определения иррациональных корней, Ролля предлагает способ, который объясним на следующем примере:

Пусть будет уравнение

$$x^3 - 6x + 5 = 0;$$

полагаем $x = \frac{z}{10}$ или $\frac{z}{100}$ или $\frac{z}{1000}$ и проч. смотря на степень точности, с которою желаем определить корни. Положим, что довольствуемся приближением до *сотых* частей, почему принимаем $x = \frac{z}{100}$. И так

$$\left(\frac{z}{100}\right)^3 - 6\left(\frac{z}{100}\right) + 5 = 0 \text{ или } z^3 - 600z + 30000 = 0.$$

Составляя каскады, получаем

$$z - 300 = 0$$

$$z^3 - 600z + 30000 = 0.$$

Гипотезы второй каскады будут 0, 300, 601. Посредством 0 и 300 находим, что $z = 55$ обращает 2-ую каскаду в количество положи-

тельное, а $z = 56$, в количество отрицательное, откуда заключаем, что z падает между 55 и 56; следовательно, x будет падать между $\frac{55}{100} = 0,55$ и $\frac{56}{100} = 0,56$. И так, величина x , равная 0,55; втрое до тысячных. Для определения третьей десятичной цифры, надлежало бы принять $x = \frac{z}{1000}$, четвертой, $x = \frac{z}{10000}$, и так далее.

Чтобы сделать способ каскад удовлетворительным, по крайней мере в теоретическом отношении, основалось еще разрешить один случай, состоящий в следующем: Положим, что корень какой ни есть каскады A , известный нам только по приближению, будучи подставлен в следующую каскаду B , не доставляет много знака, который надлежало бы получить. Отсюда заключаем, или что корень каскады A не вычислен еще с достаточною точностью, или, что каскада B имеет два недостаточные корни второго рода. По как означить эти два случая один от другого? Вот правило, предлагаемое Роллем для достижения сей цели:

Если, по подставлении в каскаду B вместо меньших приближенных величин корни каскады A , получатся выходы с одинаковыми знаками, и выходы с теми противными знаку, который бы надлежало получить, и если, сверх того, первая цифра трех результатов подстановления будут одинаковы, а число превосходящих цифр во втором результате равно степени уравнения, а в третьем, удвоенной степени, то каскада B имеет *недостаточные корни второго рода*.

Полсим это правило примем, который записуем из Алгебры Ролля.

Дано уравнение

$$x^3 - 27x^2 + 257x - 504 = 0;$$

составляем его каскады

$$x - 9 = 0$$

$$x^3 - 18x + 72 = 0$$

$$x^3 - 27x^2 + 257x - 504 = 0.$$

Гипотезы второй каскады суть 0, 9, 18, посредством которых находим для пера один корень между 7 и 8, а другой между 10 и 11. Принять 7 или 8 за одну среднюю гипотезу третьей каскады, получаем знак +; но подставляя 10 или 11 не находим —. Из этого мы еще ничего не можем заключить о корнях третьей

каскады; надобно будет уточнить корень каскады $x^2 - 18x + 79 = 0$, заключающийся между пределами 10 и 11. Положив $x = \frac{z}{10}$, найдем

$$z^2 - 180z + 7900 = 0$$

$$z^2 - 270z + 23700 = 50400 = 0.$$

Корень первой из сих каскад заключается между 104 и 105. Подставляя сія двѣ величины въ следующую каскаду, опять не находимъ знака —, и, сверхъ того, выводъ подстановленія 104 въ каскаду шрепей степени будетъ +165344.

Предполагая $z = \frac{z'}{10}$, найдемъ что каскада 2-й степени въ z' , будетъ имѣть корень, заключающийся между числами 1041 и 1042, которые опять не доставляютъ отрицательнаго знака. Число 1041, подставленное въ каскаду 3-ей степени въ z' , доставляетъ +165343221. Полагая еще $z' = \frac{z''}{10}$, найдемъ числа 10415 и 10416, не доставляющія —, а выводъ подстановленія меньшей гипотезы 10415 въ каскаду шрепей степени въ z'' , будетъ +165345151997. И такъ, получимъ сѣдующія три числа:

$$165344$$

$$165343221$$

$$165345151997.$$

Здѣсь усматриваемъ: 1) что каждый изъ сихъ результатовъ начинается числомъ 16534; 2) второй результатъ заключается три цифры лѣншія противъ перваго, а третій, противъ втораго; при чемъ и уравненіе, въ которое подставляемся гипотезы, есть шрепей степени. Отсюда заключаемъ о невозможности набить знакъ —, и слѣдовательно имѣя самыя удостовренія въ присутствіи двухъ недостаточныхъ корней втораго рода. И такъ, предложенное уравненіе имѣетъ только одинъ дѣйствительный корень, коего гипотезы, какъ мы видѣли выше, суть 0 и 7.

Приводя это правило, Ролль сознается, что оно выведъ его только по наведенію. Любопытно подвергнуть способъ каскадъ, въ этомъ отношеніи, широкому изслѣдованію, ибо, если послѣднее правило окажется справедливымъ (что впрочеѣ весьма сомнительно), то должно будетъ заключить, что уже въ концѣ XVII столѣтія Алгебра обладала способомъ правильнымъ, и удовлетворительнымъ, въ теоретическомъ отношеніи, для рѣшенія алгебраическихъ уравненій.

Если сравнимъ сказанное о способѣ каскадъ, то увидимъ, что этотъ способъ основанъ на слѣдующемъ предложеніи, называемомъ иногда теоремою Ролля.

ТЕОРЕМА. Пусть будетъ

$f(x) = x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_{m-1}x + a_m = 0$ предложенное уравненіе и $f'(x)$, $f''(x)$ первая, вторая производная отъ функціи $f(x)$. Если уравненіе $f'(x) = 0$ имѣетъ въ свои корни $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ вещественные, и если сверхъ того первообразная функція $f(x)$ и оталал въ производная $f''(x)$, для каждаго изъ этихъ корней, будутъ имѣть противныя знаки, то въ корни уравненія $f(x) = 0$ будутъ также вещественные; сверхъ того, предположивъ что $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \mu$ изображаютъ корни уравненія $f'(x) = 0$, написанные по порядку изъ величинъ, начиная съ наименьшей, то между каждыми двумя смежными членами будетъ заключаться одинъ корень предложеннаго уравненія $f(x) = 0$, такъ что изобразивъ чрезъ M и N наименьшій и наибольшій изъ корней, а чрезъ $a, b, c, \dots, l, \mu, N$, въ остальные, расположенные по порядку изъ величинъ, получимъ рядъ

$$M, \alpha, a, \beta, b, \gamma, c, \dots, l, \mu, N,$$

въ которыхъ $M < \alpha < a < \beta < b < \dots < l < \mu < N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Примемъ въ соображеніе корни α и β уравненія $f'(x) = 0$. Мы предпологаемъ $f'(\alpha) = 0$ и $f'(\beta) = 0$, и сверхъ того $f(\alpha) \cdot f''(\alpha) < 0$ и $f(\beta) \cdot f''(\beta) < 0$.

Переименовавъ послѣдніа два неравенства, получимъ

$$f(\alpha) f(\beta) f''(\alpha) f''(\beta) > 0.$$

Но легко видѣть, что $f'(\alpha)$ и $f'(\beta)$ будутъ съ противоположными знаками; и дѣйствительно, изъ уравненій

$$f'(\alpha + \varepsilon) = \varepsilon f''(\alpha) + \frac{\varepsilon^2}{1.2} f'''(\alpha) + \dots$$

$$f'(\beta) = 0$$

$$f'(\beta + \omega) = \omega f''(\beta) + \frac{\omega^2}{1.2} f'''(\beta) + \dots$$

въ которыхъ ε и ω изображаютъ весьма малыя положительныя количества, усматриваемъ, что такъ какъ $f'(x)$, обращающіяся одинъ разъ въ нуль между пределами $\alpha + \varepsilon$ и $\beta + \omega$, то $f'(\alpha + \varepsilon)$ и $f'(\beta + \omega)$ должны быть съ противоположными знаками, а слѣдовательно то же самое можно сказать и о членахъ $\varepsilon f''(\alpha)$ и $\omega f''(\beta)$, или, что все равно, о производныхъ втораго порядка $f''(\alpha)$ и $f''(\beta)$. И такъ

$$f''(\alpha) f''(\beta) < 0,$$

из следствия чего выведенное выше неравенство обратится в явное:

$$f(\alpha) f(\beta) < 0.$$

Так как $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ с противными знаками, то заключаем, что $f(x)$ будет обращаться в нуль между пределами $x = \alpha$ и $x = \beta$. Следовательно, уравнение $f(x) = 0$ может иметь, между пределами α и β , нечётное число вещественных корней, и, во всяком случае, по крайней мере один. Точно таким образом увидим, что между β и γ , γ и δ , ... заключаем, по меньшей мере, по одному вещественному корню того же уравнения. Но если примем в соображение, что степень функции $f'(x)$ только одною единицею ниже степени функции $f(x)$, и если сверх того, докажем существование крайних корней M и N , то надобно будет заключить, что между каждым парой α и β , β и γ , γ и δ , ... заключится только один вещественный корень уравнения $f(x) = 0$.

Чтобы доказать существование корня M , возьмем известную формулу $f(x - h) = f(x) - hf'(x - \lambda h)$, в которой $\lambda > 0$ и $\lambda < 1$ [Смол. TAYLOR (THÉORÈME DE)], и подставим в нее, на место x , один из корней уравнения $f(x) = 0$, заключающийся между пределами α и β ; пусть α этот корень. Следовательно, по причине $f(\alpha) = 0$, получим:

$$f(\alpha - h) = -hf'(\alpha - \lambda h).$$

Но очевидно, что заменив поспешно h , произведение λh будет также измѣняться, и можно будет выбрать для h такую величину, какъ бы она впрочемъ велика не была, что разность $\alpha - \lambda h = \alpha$, разуня подъ α наименьший корень уравнения $f'(x) = 0$. И такъ, въ этомъ предположеніи $f'(\alpha - \lambda h) = 0$, а следовательно и $f(\alpha - h) = 0$; отсюда заключаемъ, что $\alpha - h$ есть корень уравнения $f(x) = 0$, и именно тотъ, который изображенъ у насъ буквою M , ибо, по свойству числа λ , очевидно будетъ $[\alpha - h = M] < [\alpha - \lambda h = \alpha]$.

Точно такимъ образомъ докажемъ существованіе корня N . Изобразивъ чрезъ l корень уравнения $f(x) = 0$, непосредственно мѣньшій наибольшаго корня μ уравнения $f'(x) = 0$, будемъ $f(l) = 0$, и следовательно

$$f(l + \lambda) = hf'(l + \lambda h),$$

гдѣ, какъ и выше, $\lambda > 0$ и $\lambda < 1$. Выбравъ теперь h такъ, чтобы $l + \lambda h = \mu$, найдемъ $f'(l + \lambda h) = 0$,

изъ сдѣланіе чего $f(l + h) = 0$, откуда $N = l + h$ и $[l + h = N] > [l + \lambda h = \mu]$. —

Ролль, въ своей Алгебрѣ, предлагаетъ также способъ для рѣшенія уравненій съ несколькими известными. Препототительными правилами его способа имѣютъ цѣль расположить въ удобномъ порядкѣ какъ искомыя величины, такъ и самыя уравненія. На сей конецъ Ролль составляетъ такъ называемое *дерево направленія* (*arbre de direction*). Помощь, отъ древа направленія, отъ отдѣленія известныхъ разрядовъ уравненій, и для рѣшенія эпихъ уравненій, составляетъ, для каждаго разряда, особое дерево. Каждое изъ нихъ Ролль называетъ *дерево возвратна* (*arbre de retour*).

Объяснимъ въ короткихъ словахъ смыслъ эпихъ выраженій, и начнемъ съ древа возврата.

О ДРЕВА ВОЗВРАТА.

Когда имѣемъ нѣсколько уравненій (A), (B), (C)... съ столькими же неизвестными x, y, z, \dots и ежели эти уравненія такого вида, что одно изъ нихъ, напримѣръ (A), заключаетъ въ себѣ только одну неизвестную, положимъ x , другое (B) двѣ неизвестныя x и y , третье (C) три неизвестныя x, y и z , и такъ далѣе, то уравненія (A), (B), (C)... располагаются посредникомъ *древа возвратна*. Пусть будутъ даны, напримѣръ, слѣдующія три уравненія, удовлетворяющія означеннымъ сей часъ условіямъ:

$$(A) \quad x^2 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

$$(B) \quad y^2 - 8y + x + 10 = 0$$

$$(C) \quad z^2 - 20z + y + x = 0.$$

Уравненіе (A) ишущее на основанія A древа возврата, какъ показано на чертѣжѣ 2 (Листъ III). Такъ какъ это уравненіе имѣетъ три корня, то отъ него произойдутъ три вѣтви, идущія въ тремъ узлахъ B, C, D. Въ каждомъ изъ сихъ узловъ имѣемъ въпорое уравненіе (B), и какъ оно второй степени, то каждому узлу B, C, D, будутъ соопвѣтствовать двѣ вѣтви. Такимъ образомъ получится степя новыхъ узловъ, которыми означимъ буквами E, F, G, H, I, K. Последнее уравненіе (C) пишемъ во всѣхъ послѣднихъ узлахъ; каждый изъ нихъ доставляетъ опять по двѣ вѣтви, ибо уравненіе (C) второй степени. Очевидно, что послѣднее число вѣтвей (въ насчитаемъ случаѣ 12) изобразитъ число рѣшеній, допускаемыхъ предложенными уравненіями.

Сославив такимъ образомъ древо возврата, рѣшаемъ сначала первое уравненіе A , и находимъ $x=1$, $x=2$, $x=3$; пишемъ эти рѣшенія вдоль вѣтвей, какъ показано на чертѣжѣ. Подставляемъ потомъ 1 вѣтви x во все уравненія, принадлежащія къ первой вѣтви, то есть, въ B , E и F ; 2 вѣтви x въ C , G и H ; 3 вѣтви x въ D , I и K .

Послѣ сихъ подстановленій, рѣшаемъ уравненія B , C , D , и, написавъ ихъ корни по вѣтвямъ, идущимъ отъ нихъ, подставляемъ эти самые корни въ зависящія отъ нихъ уравненія, именно: одинъ корень уравн. B въ E , а другой въ F ; одинъ корень уравн. C въ G , а другой въ H ; одинъ корень уравн. D въ I , а другой въ K . Помогъ рѣшаемъ уравненія E , F , G , H , I , K , и пишемъ ихъ корни по послѣднимъ вѣтвямъ. Этимъ оканчивается разрѣшеніе предложенныхъ уравненій. Напримѣръ, положимъ, что разсматриваемъ изъ двѣнадцати только два рѣшенія, соответствующія вѣтвямъ, означеннымъ номерами 5 и 6, то есть предполагаемъ, что идемъ по ACG ; находимъ двѣ основныя дѣлители для x , u и z , именно $x=2$, $u=2$, $z=10-\sqrt{96}$ и $x=2$, $u=2$, $z=10+\sqrt{96}$. Точно такимъ образомъ получимъ остальные десяти рѣшеній, соответствующія пупкамъ ABE , ABF , ACH , ADI и ADK .

О ДРЕВѢ НАПРАВЛЕНІЯ.

При нѣсколькихъ уравненіяхъ съ такимъ же числомъ неизвѣстныхъ, входящихъ произвольнымъ образомъ въ предложенныя уравненія, Роль употреблѣна *дерева направленія*, направляющее такъ сказать порядокъ дѣйствій, для постепеннаго исчисленія неизвѣстныхъ.

Положимъ, напримѣръ, что имѣемъ шесть уравненій съ шестью неизвѣстными x , y , z , u , v , w , входящими въ нихъ въ какой угодно степени. Пусть, $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=0$, $E=0$, $F=0$ будутъ эти уравненія. Пишемъ ихъ въ первомъ узлѣ A (черт. 1. Листъ III), и составляемъ по этому узлу B . Изъ уравненій $A=0$, $B=0$ и проч. изображаемъ тѣ, которыя не заключающъ въ себѣ неизвѣстной x ; пусть будутъ $C=0$, $B=0$, $F=0$ эти уравненія; пишемъ ихъ въ узлѣ B .

Ищемъ общаго дѣлителя между выраженіями A , B , E , расположенными относительно z ; если начнемъ разыскивать наибольшій общій дѣлитель между A и B , и предположимъ что оста-

токъ, не заключающій въ себѣ x , есть H , то должно будетъ сдѣлать $H=0$, и записать это уравненіе въ узлѣ B .

Помогъ, беремъ выраженіе E , заключающее также x , и, употреблѣя послѣдній дѣлитель предыдущаго дѣйствія, продолжаемъ разыскиваніе наибольшаго общаго дѣлителя, по x -у, до тѣхъ поръ, пока эта неизвѣстная не уничтожится. Предположимъ, что послѣднее дѣленіе дало остатокъ K , дѣлѣмъ $K=0$; и пишемъ это уравненіе въ узлѣ B . Такъ какъ неизвѣстная x , по предположенію, не входитъ въ другія уравненія, то должно будетъ уравнять нулю дѣлителя послѣдняго произведеннаго нами дѣленія. Пусть будетъ L этотъ дѣлитель; пишемъ $L=0$ вдоль вѣтви, соединяющей узлы A и B .

Если уравненія узла B имѣютъ надлежащій видъ для того, чтобы можно было расположить ихъ на деревѣ возврата, то, прежде нежели приступимъ къ ихъ разрѣшенію, присовокупляемъ къ нимъ уравненіе $L=0$.

Но ежели уравненія узла B не имѣютъ требуемаго вида, и если напримѣръ неизвѣстная u находится въ уравненіяхъ $D=0$ и $H=0$, то составляемъ новый узелъ C , и пишемъ въ немъ остающіеся $C=0$, $F=0$, $K=0$.

Разыскивая общаго дѣлителя между D и H , и предположивъ что остатокъ, заключающій въ себѣ u , есть M , дѣлѣмъ $M=0$, и записываемъ это уравненіе въ узлѣ C .

Такъ какъ u уже не входитъ въ другія уравненія, то изобразивъ чрезъ N дѣлителя этого дѣленія, при которомъ уничтожился u , пишемъ $N=0$, и пишемъ это уравненіе на вѣтви, соединяющей узлы B и C .

Если бы уравненія узла C могли быть рѣшены на деревѣ возврата, то надлежало бы написать $L=0$, $N=0$ въ началѣ тѣхъ уравненій. Если же они не удовлетворяютъ предписаннымъ на сей конецъ условіямъ, то составляемъ новый узелъ D .

Принимаемъ, напримѣръ, F и M для разысканія между ними общаго дѣлителя. Если, послѣ такого дѣйствія, найдемъ, что остатокъ не заключающій въ себѣ z , равенъ нулю, то поступаемъ слѣдующимъ образомъ: отъ узла C проводимъ другую вѣтвь, и составляемъ новый узелъ F , въ которомъ пишемъ уравненіе $C=0$.

Изобразив чрез P общего наибольшего делителя между F и M , и означив чрез $Q = \frac{F}{P}$, $R = \frac{M}{P}$, пишемъ уравненія $Q = 0$, $R = 0$ въ одномъ изъ узловъ D, F , напряміръ въ D . Въ такомъ случаѣ сплыветъ уравненіе $P = 0$ къ узлу F .

Съ каждымъ узломъ D и F должно поступать отдѣльно, принимая каждый изъ нихъ особеннымъ древомъ направленія. Если бы уравненія котораго нибудь изъ сихъ узловъ могли быть рѣшены посредствомъ древа возврата, то къ заключающимся уже въ томъ узлѣ уравненіямъ, надлежало бы присоединить еще слѣдующія: $L = 0$, $N = 0$. Въ противномъ случаѣ, продолжаемъ объясненныя выше дѣйствія, пока не достигнемъ предполагаемой цѣли.

Если эта сплывка покажется слишкомъ длиною, то скажемъ въ свое оправданіе, что мы желали ознакомить нашихъ читателей съ нѣкоторыми приемами, бывшими въ употребленіи у прежнихъ алгебристовъ; подробности такого рода представляють всегда занимательности, и даже бывають поучительны при изученіи исторіи науки.

CASSINOIDE или ÉLLIPSE CASSINIENNE. (Астр.) КАСНИНОВА или КАСНИНОВЪ ЭЛЛИПСЪ.

Названіе, данное кривой линіи, предложенной *Неоломъ Доминикомъ Кассини* для изображенія орбиты планетъ около солнца. Но такъ какъ астрономическія наблюденія весьма рѣдко согласующіяся съ такимъ видомъ орбиты, то кривая, о которой говоримъ, и оставлена безъ вниманія. Отличительное свойство Кассиніева эллипса состоятъ въ томъ, что произведеніе радіусовъ векторовъ fM на $f'M$ (черт. 4, N. 1, Л. III), проведенныхъ изъ двухъ фокусовъ, f и f' къ какой нѣ есть точкѣ M кривой, есть постоянное, и равноется произведенію $Af \times Af' = Bf' \times Bf$. N° 1, 2, 3, 4 и 5 (Черт. 4, Листъ III) представляютъ виды, въ которые переходитъ послѣдовательно Кассиніевъ эллипсъ по мѣрѣ того, какъ увеличивается отношеніе разстоянія фокусовъ ff' къ Af или Bf . Кривая N° 1 довольно похожа на обыкновенный эллипсъ; N° 2 и 3 совершенно различествуютъ отъ сего послѣдняго; N° 4 представляетъ два сопряженные эллипса, а N° 5 двѣ сопряженные точки. Кассиоида описана въ *Éléments d'Astronomie par M. Cassini le fils* стр. 149.

Названіе Кассиніева эллипса принято по причтѣ аналогіи этой кривой съ обыкновеннымъ эллипсомъ, въ которомъ сумма радіусовъ векторовъ постоянная.

CATACAUSTIQUE. Смоч. CAUSTIQUE

CATACOUSTIQUE или CATAPHONIQUE. КАТАКУСТИКА, КАТАФОНИКА.

Часть Акустики, занимающаяся законами отраженія звуковъ. И такъ, теорія *отголосковъ (échos)* и вообще звуковъ не право, но чрезъ отраженіе входящихъ до нашего слуха, составляютъ предметъ Катакустики. Эта наука въ отношеніи къ Акустикѣ, имѣетъ то же значеніе, что *Катоптрика* въ отношеніи къ Оптикѣ. Смоч. ACOUSTIQUE, ÉCHO, SON.

CATADIOPTRIQUE. прилаг. (Опш.) КАТАДИОПТРИЧЕСКИЙ.

Подъ сими наименованіемъ разумѣютъ всё то, что относится вышѣ къ Катоптрикѣ и къ Диоптрикѣ, то есть, къ теоріи отраженія и преломленія свѣта. И такъ, оптическіе приборы, основанные на законахъ отраженія и преломленія свѣта, называющіеся *катодиоптрически*.

CATALOGUE D'ÉTOILES (Астр.) КАТАЛОГЪ, СПИСОКЪ ЗВѢЗДЪ.

Главнымъ сплывъ, входящій въ каталоги звѣздъ, суть именъ звѣздъ и созвѣздія, къ которымъ сія звѣзды принадлежатъ; величина звѣздъ, ихъ среднее прямое восхожденіе и склоненіе, годовая прецессія и собственное ихъ движеніе въ прямомъ восхожденіи и склоненіи. Извѣстнѣйшіе каталоги звѣздъ:

Каталогъ 1022 звѣздъ *Иппарха*, почтенный въ Птолемеевомъ Алмагестѣ, есть древнѣйшій изъ всѣхъ, какіе намъ извѣстны.

Въ 18 столѣтіи лучшіе каталоги:

Лаланда: Histoire Céleste 1801 г. содержитъ 50000 звѣздъ.

Бодэ: Himmels-Atlas, содержитъ 17240 звѣздъ.

Пайер: Praecipuarum stellarum inerrantium positiones mediae, содержитъ 7000 звѣздъ.

Бесселя: Fundamenta Astronomiae 1818 года содержитъ 3222 звѣзды.

Байли (Baily): New tables for facilitating the computation of praecession, aberration and nutation 1827 г. содержитъ 2281 звѣзду.

Штурге: Stellarum duplicium et multiplicium mensurae micrometricae, Petropoli, 1837 in-folio.

CATARHONIQUE. Слосн. CATACOUSTIQUE.

CATARULTE. СТРЕЛОМЕТЪ, КАТАУЛЬТЪ.

Древнее военное орудіе, служившее для бросанія большихъ стрѣлъ.

CATARACTE. КАТАРАКТА. Такъ называѣ Лютомъ кривую, описываемую частотами жидкости, вытекающей изъ горизонтальнаго отверстія сосуда. — Водонадъ, порога.

CATENAIRE или CHAINETTE. (Мех.) ЦѢПНАЯ ЛИНІЯ. Слосн. CHAINETTE.

CATNETE. (Геом.) КАТЕТЪ. Подъ симиъ словомъ разумѣютъ, преимущественно въ Капотриикѣ, прямую линію, перпендикулярную къ другой линіи, или, вообще, къ какой нибудь поверхности. — Чаще всего называютъ *катетами* перпендикуляры между собою стороны въ прямоугольномъ треугольникѣ.

CATEOLIQUE (RÈGLE). КАТОЛИЧЕСКИМЪ или ВСЕОБЩИМЪ ПРАВИЛОМЪ называлось правило, придуманное *Исперомъ*, для ршенія всѣхъ случаевъ, представляющихся въ сѣрическихъ иррациональныхъ треугольникахъ. Это правило изложено въ книгѣ *Elementa matheseos universalis*, соч. *Валлиса*.

CATOPTRIQUE. КАТОПТРИКА. Часнѣ Оптики, занимающаяся законами отраженія свѣта. Это слово происходитъ отъ Греческаго *kata*, противъ, и *opticos*, вижу.

Капотприка преимущественно занимается законами лучей, отраженныхъ полированными поверхностями. Въ поверхности, въ большей или меньшей степени, отражаютъ свѣтъ. Но, между твердыми тѣлами, только нѣкоторыя металлы и нѣкоторые соединенія ихъ способны принимать хорошую полировку. Даже отражающее свойство обыкновенныхъ зеркалъ, должно быть отнесено не къ поверхности стекла, а къ соршупкѣ, покрывающей одну изъ его сторонъ.

Основной законъ Капотприки состоитъ въ равенствѣ угла паденія и угла отраженія. Для нѣкоторыхъ подробностей объ статьяхъ, входящихъ въ составъ Капотприки, описываютъ чмъ пателей къ словамъ: OPTIQUE, INCIDENCE (ANGLE D'), MIROIRS, ARC-EN-CIEL, TÉLESCOPE и проч.

Изъ числа авторовъ, занимавшихся Капотпикой, въ древности, можно привести *Ари-*

меда (Слосн. MIROIR ARDENT), *Аллизона* и *Вителлизона* въ XI и XII столѣтіяхъ; въ позднѣйшія времена, *Такъ* (Tasquet), *Фабри*, *Аюва Грегори*, *Нютона*, *Исаака Баррова* (Barrow), *Гершеля*, *Шмита* и нѣкоторыхъ другихъ.

CATOPTRIQUE. КАТОПТРИЧЕСКИЙ. Относился къ Капотприкѣ; происходящій чрезъ отраженіе лучей. *Télescope catoptrique*, *капотптрическій телескопъ*.

CAUSE. (Мех.) ПРИЧИНА. Слово, часно употребленное въ Механикѣ, и подъ которымъ разумѣютъ все то, что только можетъ измѣнить состояніе тѣла въ отношеніи къ его движенію или покою. Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что въ Механикѣ, слова *причина* и *сила* должны быть принимаемы въ одномъ и томъ же значеніи. Для объясненія смысла, въ которомъ надлежало бы понимать эти слова въ Механикѣ, мы приведемъ здѣсь мнѣніе нашего знаменитаго геометра о движущихъ *причинахъ* или *силахъ*. Вотъ его слова: *)

„Нѣкоторые авторы думаютъ, что движущія „причины (*causes motrices*) могутъ быть подѣлены той же самой жерѣ, какая допущена для „ихъ дѣйствія. Но эти *мысли*, *причины дѣйствія* „быть пропорціональна дѣйствію, и *сдѣла* „тельно, отношеніе двухъ дѣйствій, равно от- „ношенію силъ, производящихъ эти самыя дѣй- „ствія. Что касается до насъ, то, находясь въ „совершенномъ невѣдѣніи относительно движу- „щихся *причинъ*, изъ различія или равенства дѣй- „ствій, мы не выводимъ никакого сдѣйствія въ „разсужденіи *причинъ*, и не только *не выводимъ* „за истину пропорціональности *причинъ* изъ дѣй- „ствій, но даже не утверждаемъ, что силы „суть величины. Правда, двѣ силы, каково бы „ни было ихъ свойство, могутъ быть предполо- „жены равными, если одна изъ нихъ можетъ, во „всякомъ случаѣ, заставить другую, не производя „никакой перемѣны; но что будетъ такое *сила* „большая или меньшая другой? Двѣ силы, рав- „ныя въ объясненіи ихъ сейчасъ смыслѣ, конечно „произведутъ одинаковыя дѣйствія, если будутъ „приложены къ одному и тому же тѣлу при оди- „наковыхъ обстоятельствахъ; но изъ равенства

*) Cours de Mécanique à l'usage des élèves de l'Institut des Voies de Communication, § 4. Par M. Ostrogradsky. Этотъ курсъ авторизованъ.

„действий, произведенных на одно и то же тѣло, при одинаковомъ же его состояніи, можно ли что заключить относительно причинъ? Силы, произвѣда равныя дѣйствія, могутъ одинаковы, по самой сущности своей, различествовать между собою въ другихъ отношеніяхъ.

„Если намъ скажутъ, что нѣтъ въ виду сравненіе силъ только въ отношеніи произведенныхъ ими дѣйствій, и сравниваютъ именно силы, а не дѣйствія, то мы возражимъ на это, что никакъ не можемъ допустить пропорціональности дѣйствій къ силамъ, развѣ только опредѣлять дѣйствія не такъ, какъ мы ихъ опредѣляемъ; ибо, по нашему опредѣленію, дѣйствіе можемъ зависѣть не только отъ силы, но еще и отъ состоянія тѣла, то есть, отъ скорости и отъ направленія движенія, коимъ тѣло шло бы въ слѣдствіе своей инерціи. Въ такомъ случаѣ, одна и та же причина, какъ двѣ причины одинаковыя во всѣхъ отношеніяхъ, могутъ произвести различныя дѣйствія, ибо онѣ не измѣняютъ одинаковымъ образомъ двухъ различныхъ состояній одного и того же тѣла. „Опсудя слѣдуетъ, что, по нашему опредѣленію дѣйствія, мы можемъ принимать различныя двѣ силы равныя, или, рассматривая одну и ту же силу какъ неравную самой себѣ, и, напротивъ того, допускаемъ равными двѣ силы различныя между собою, если, дѣйствуя на два различныя состоянія тѣла, онѣ будутъ вызывать эти состоянія одинаковымъ образомъ.

„И такъ, если непременно хотимъ, чтобы игра дѣйствія примечательна и причинъ, то надобно будетъ допускать игру дѣйствія, отличную отъ принятой нами, или, въ нашей мѣрѣ, найти то, что принадлежитъ силѣ и что зависитъ отъ состоянія тѣла; первый часъ этой игры будемъ причисловать какъ силѣ, такъ и дѣйствію. Но разысканіе, о которомъ говоримъ, не относится къ Механикѣ; должно предположить его метафизикомъ. Для насъ, имѣя никакой надобности знать, какинъ образомъ сила примѣняется къ состоянію тѣла для произведенія своего дѣйствія: главное состояніе въ опредѣленіи положенія тѣла, побуждаемаго какою либо силой, и мы думаемъ, что игра дѣйствія, принятая нами, удовлетворяетъ во всѣхъ отношеніяхъ этому требованію.“

Чтобы смыслъ этой выкладки былъ ясенъ для нашихъ читателей, то они должны прочитать первые три урока Курса Механики, о которыхъ упомянуто выше.

CAUSES FINALES. (Методъ.) КОНЕЧНЫЯ ПРИЧИНЫ. Начало конечныхъ причинъ состоитъ въ опредѣленіи какихъ либо дѣйствій въ природѣ основываясь на цѣли, которую природа имѣла въ виду достигнутаго произвѣда сія самыя дѣйствія.

Приложеніе этого начала почти невозможно, ибо весьма трудно открыть цѣль по усматриваемымъ нами дѣйствіямъ. Напримѣръ, при движеніи, природа стремилась употребить наименьшую живую силу; но эта цѣль не прежде могла быть угадана, какъ по опредѣленіи общихъ законовъ движенія, то есть, когда познаніе сказанной цѣли сдѣлалось для насъ совершенно извѣстнымъ. Начало, о которомъ говоримъ, было въ большомъ употребленіи у прѣжнихъ философовъ и физиковъ: они объясняли различныя явленія природы основываясь на началахъ метафизическихъ, иногда совершенно неопредѣленныхъ; такъ, напримѣръ, восхожденіе воды въ насосахъ объяснялось *отращеніемъ природы отъ пустоты*.

Несмотря на злоупотребленіе начала конечныхъ причинъ, оно можетъ быть иногда полезно, если только будемъ употреблено съ большою осмотрительностію. Дѣйствительность этого можетъ служить примѣръ *Лейбница*, который, въ своемъ: *Unicum opticæ, catoptricæ, et dioptricæ principium* Act. erud. 1682, вывелъ законы движенія свѣта на основаніи этого способа усмотрѣнія.

CAUSTIQUE (SURFACE). (Опти.) КОСТИЧЕЧЕСКАЯ, ЗАЖИГАТЕЛЬНАЯ, ЖГУЧАЯ ПОВЕРХНОСТЬ. Когда лучи, исходяще изъ одной

точки, или параллельныя между собою, заходятъ на кривую поверхность зеркала, то они, по отраженіи или по преломленіи, взаимно пересѣкаются, и точки ихъ пересѣченія образуютъ такъ называемыя *костическія поверхности*. Въ случаѣ отраженія лучей, геометрическое мѣсто ихъ пересѣченій называется *костическою поверхностію чрезъ отраженіе*, или *катакостическою поверхностію* (*surface caustique par réflexion* или *catactique*), а въ случаѣ преломленія лучей, образуемая поверхность называется *костическою поверхностію чрезъ преломленіе* или *диакостическою*

поверхностию (surface caustique par réfraction или diacaustique).

СОВАВЪ СВАСТИКЪ, или просия, CAUSTIQUE.

Зажигающаяся, жгучая или костическая кривая. Кривая, образуемая пересечением лучей, отраженных или преломленных какою нибудь кривою, начерченной на поверхности зеркала. Космическая кривая бывает также двух родов: *космическая чрезъ отражение или катакостика*, и *космическая чрезъ преломление или диакостика*.

Для ближайшаго объясненія космических кривыхъ, приведемъ здѣсь аналитическое рѣшеніе одной задачи, относящейся къ ихъ теоріи. Положимъ, что дана плоская кривая LMK (черт. 6, Листъ III); на возгнутую часть этой кривой падаютъ лучи, параллельные оси OY; таковы, напримеръ лучи PM, *ит.* Лучъ PM, падающій на кривую, отражается отъ нея, и уголъ паденія равенъ углу отраженія; Смот. INCIDENCE (ANGLE D°); если проведемъ въ точкѣ M кривой касательную TT', то уголъ паденія будетъ PMT; составимъ покомъ уголъ T'MN, равный углу PMT; линія MN изображаетъ отраженный лучъ. Сверхъ того, пусть будетъ MN нормальная къ предложенной кривой въ точкѣ M; очевидно, что углы PMN и MNM будутъ равны между собою. Если примемъ въ соображеніе безконечно близкій лучъ *pm*, параллельный линіи PM, то проведемъ нормальную *pn*, и сдѣлавъ уголъ *pmh*, равный углу *pmn*, получимъ отраженный лучъ *mh*, который пересѣчется съ MN въ точкѣ B; геометрическое мѣсто подобныхъ точекъ пересѣченія каждаго двухъ смежныхъ отраженныхъ лучей, называется *катакостикою* или *космическою кривою чрезъ отраженіе*. Легко видѣть, что отраженные лучи будутъ всѣ касательныя къ катакостикѣ CBD.

Приступимъ теперь къ опредѣленію уравненія катакостики. Пусть будетъ $y = f(x)$ уравненіе предложенной кривой LMK, описанной къ прямоугольнику осья OX, OY. Разсмазривая точку M на кривой, будемъ OP = x , PM = y , $\tan(PMN) = \frac{dy}{dx}$. Будемъ искать теперь уравненіе отраженного луча MN; такъ какъ онъ проходитъ чрезъ точку M, то, изобразивъ чрезъ X и Y перевертывающія координаты прямой MN, найдемъ для нея уравненіе

$$Y - y = A(X - x),$$

гдѣ A изображаетъ тригонометрическій тангенсъ угла MNH = α . И такъ $A = \tan \alpha$. Для опредѣленія $\tan \alpha$ замѣчаемъ, что $\alpha = 90^\circ + 2\varphi = (90^\circ + \varphi) + \varphi$, разума подъ φ половину угла PMH; отсюда $\tan \alpha = \frac{\tan(90^\circ + \varphi) + \tan \varphi}{1 - \tan(90^\circ + \varphi)\tan \varphi}$; но $\tan(90^\circ + \varphi) = -\frac{1}{\tan \varphi}$; следовательно

$$\tan \alpha = \frac{-\frac{1}{\tan \varphi} + \tan \varphi}{1 + \frac{1}{\tan \varphi} \tan \varphi} = \frac{\tan^2 \varphi - 1}{2 \tan \varphi},$$

и какъ $\tan \varphi = \frac{dy}{dx}$, то получимъ

$$A = \tan \alpha = \frac{\frac{dy^2}{dx^2} - 1}{2 \frac{dy}{dx}} = \frac{dy^2 - dx^2}{2 dx dy}.$$

И такъ, уравненіе отраженного луча MN будетъ

$$Y - y = \frac{dy^2 - dx^2}{2 dx dy} (X - x),$$

или

$$(1) \quad 2 dx dy (Y - y) = (dy^2 - dx^2) (X - x).$$

Чтобы перейти теперь къ уравненію слежнаго отраженного луча *mh*, надобно въ уравненіи (1) замѣнить x въ $x + dx$, y въ $y + dy$, dy въ $dy + d^2y$. Что касается до величинъ X и Y, то онѣ должны быть принимаемы постоянными, ибо мы имѣемъ въ виду опредѣленіе координаты точки B, общей обоимъ лучамъ MN и *mh*. И такъ положимъ OA = ξ , AB = η , и подставивъ ξ и η на мѣсто X и Y въ уравн. (1), надобно будетъ дифференцировать сіе послѣднее, принявъ для простоты dx постояннымъ. Следовательно

$$(2) \quad 2 dx dy (\eta - y) = (dy^2 - dx^2) (\xi - x) \text{ и } 2 dx d^2y (\eta - y) - 2 dx dy^2 = 2 dy d^2x (\xi - x) + dx (dy^2 - dx^2);$$

послѣднее уравненіе, по сокращеніи, доставитъ

$$(3) \quad \eta - y = \frac{dy}{dx} (\xi - x) + \frac{dy^2 + dx^2}{2 dx^2 y}.$$

Уравненія (2) и (3) опредѣляютъ координаты ξ и η точки B въ функціи x и y . Изъ нихъ выводимъ

$$(4) \quad \begin{cases} \xi = x - \frac{dx dy}{d^2y} \\ \eta = y - \frac{dy^2 - dx^2}{2 d^2y} \end{cases}$$

Совокупля эти формулы съ уравненіемъ предложенной кривой

$$(5) \quad y = f(x),$$

найдемъ уравненіе между ξ и η , которое будетъ принадлежать искомой катакостикѣ.

Возьмем напередъ обыкновенную параболу, определяемую уравнениемъ

$$y = \frac{1}{p} x - \frac{x^2}{2p};$$

p изображаетъ полу-параметръ, а l перпендикулярное разстояніе ея вершины B (черт. 7, л. III) отъ оси OY . Положимъ, что направленіе падающихъ лучей перпендикулярно къ оси OX . Таковъ лучъ PM , отражающійся по направленію MF . Дифференцируя предложенное уравненіе, найдемъ

$$dy = \frac{1-x}{p} dx$$

$$dx^2 y = -\frac{dx^2}{p};$$

подставляя эти величины въ уравненіе (4), получимъ

$$\xi = x - \frac{\frac{1-x}{p} \cdot dx^2}{-\frac{dx^2}{p}} = l$$

$$\eta = y - \frac{\left(\frac{1-x}{p}\right)^2 dx^2 - dx^2}{-2 \frac{dx^2}{p}} = y + \frac{(1-x)^2 - p^2}{2p};$$

последнее выраженіе, въ слѣдствіе даннаго уравненія параболы, обратится въ $\frac{l^2}{2p} - \frac{p}{2}$; но замѣтимъ, что $\frac{l^2}{2p}$, по свойству параболы, равняется линіи AB . Следовательно, опомѣнивъ буквою F фокусъ параболы, найдемъ $\eta = AF$, и какъ сверхъ того $\xi = l$, но очевидно, что каукаостика предложенной параболы будетъ точка, совпадающая съ ея фокусомъ.

Легко показать, что каукаостика полуциклоиды ABC (черт. 8 листъ III) есть цѣлая циклоида ADE . Дѣйствительно, уравненіе циклоиды ABC , описанной къ прямоугольнымъ осямъ AX , AY , будетъ

$$x = a \cdot \arcsin \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a} - \sqrt{2ay - y^2},$$

гдѣ a изображаетъ радіусъ круга производящаго; См. CYCLOIDE. Следовательно

$$dy = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y} \cdot dx$$

$$dx^2 y = -\frac{a}{y^2} \cdot dx^2,$$

и уравненія (4) примутъ видъ

$$\xi = x - \frac{\frac{\sqrt{2ay - y^2} \cdot dx^2}{y}}{-\frac{a}{y^2} dx^2} = x + \frac{y}{a} \sqrt{2ay - y^2}$$

$$\eta = y - \frac{\frac{2ay - y^2}{y^2} \cdot dx^2 - dx^2}{-2 \frac{a}{y^2} dx^2} = \frac{2ay - y^2}{a}$$

откуда

$$\sqrt{2ay - y^2} = \sqrt{ay} \text{ и } x = \xi - \frac{y}{a} \sqrt{ay};$$

следовательно

$$\xi - \frac{y}{a} \sqrt{ay} = a \cdot \arcsin \sqrt{\frac{y}{a}} - \sqrt{ay} \text{ и}$$

$$\xi = a \cdot \arcsin \sqrt{\frac{y}{a}} - \frac{a-y}{a} \sqrt{ay};$$

но $a-y = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a-y}$, почему предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$\xi = a \cdot \arcsin \sqrt{\frac{y}{a}} - \sqrt{a(y-y^2)},$$

и если вмѣсто $a \cdot \arcsin \sqrt{\frac{y}{a}}$ поставимъ равную ей величину $\frac{1}{2} a \cdot \arcsin \frac{\sqrt{ay-y^2}}{\frac{1}{2}a}$, то получимъ

$$\xi = \frac{1}{2} a \cdot \arcsin \frac{\sqrt{ay-y^2}}{\frac{1}{2}a} - \sqrt{a(y-y^2)}.$$

Это уравненіе очевидно принадлежитъ прямой, имѣющей относительно предложенной ABC , положеніе ADE . Радіусъ круга производящаго послѣдней, равенъ половинѣ радіуса a , но есть, полуоснованіе AE полуциклоиды ABC , равно цѣлому основанію циклоиды ADE .

Основываясь на подобныхъ соображеніяхъ, докажемъ, что каукаостика и диакустика *логарифмической спирали* (См. SPIRALE LOGARITHMIQUE) суть также спирали логарифмическія, что было найдено *Якобомъ Бернулли*.

Если бы лучи свѣта не были параллельны между собою, а исходили изъ постоянной точки, то, слѣдуя способу подобнаго тому, который сей-часъ былъ изложенъ, нашли бы уравненія каукаостики; и въ этомъ случаѣ уравненіе *каукаостики* выводился бы такой же образомъ, какъ и выше, только вмѣсто \arcsin , чтобы выразить уголъ отраженія равнаго углу паденія, надлежитъ выразить, что отношеніе *синусовъ* этихъ угловъ постоянно. Примѣчательнѣйшее геометрическое свойство косиническихъ кривыхъ состоитъ въ томъ, что когда кривая линія, производящая косиническую кривую, будетъ *алгебраическая* (См. COURBE ALGÈBRIQUE), то сама косиника будетъ *справедлива*, то есть, можно найти прямую линію, равную какой угодно дуги ея.

Для подробностей описаннаго чинамелей къ сочинителю *Джона Бернулли* (за 1692 годъ), къ *Разсужденію Карре (Carré)*, помѣщенному въ *Mémoires de l'Académie Royale des sciences* за 1703 годъ, а также къ извѣстному сочиненію *Analyse des infinites petits*, par M. le Marquis de l'Hôpital, 1768 г.

Изобрѣшателемъ космическихъ кривыхъ считается *Цирнгаузенъ (Tschirnhaus)*, который, въ 1682 году, представилъ въ Парижскую Академію Наукъ способъ для построения этого рода кривыхъ; способы его были предложены безъ доказательства.

Названіе космическихъ (*astronomiques*) кривыхъ взято отъ Греческаго *χαιμα, χαιμα*, пощому что солнечные лучи, собираясь на нихъ въ большее количество, нежели во всякомъ другомъ мѣстѣ, могутъ зажигать, если космика занимаетъ довольно малое пространство, какъ наприимѣръ въ параболическихъ зеркалахъ, для которыхъ космика совпадаетъ съ *фокусомъ* параболы, когда падающіе лучи предполагаются параллельными между собою.

CAVALIERI (METHODE DE). КАВАЛЕРИЕВЪ СПОСОБЪ, СПОСОБЪ НЕДѢЛИМЫХЪ. См. INDIVISIBLE.

CAVE. Стар. сл. **ВОГНУТЫЙ**, то же, что CONCAVE (Смол.).

CE.

CÉLÉRITÉ (Mex.) ПОСПѢШНОСТЬ, БЫСТРОТА, СКОРОСТЬ. Смол. **VITESSE.** Слово *célérité* рѣдко употребляется для означенія скорости, съ которою движется тѣло; оно, какъ въ Русскомъ языкѣ *поспѣшность*, употребляется только въ обыкновенномъ разговорѣ.

CENT. (Арх.) СТО.

CENTAINÉ. (Арх.) СОТНА.

CENTÉSIMALE (DIVISION). (Арх.) СТОГРАДУСНОЕ ДѢЛЕНІЕ. Въ новой Французской метрической системѣ принимаютъ четверть окружности за единицу, и раздѣляютъ ее на 100 равныхъ часіей, именующихъ *градусами (grades)*; или, употребительнѣе у насъ, *градусами*. И такъ, вся окружность по новой системѣ раздѣляется на 400 градусоваго мѣсто 360. *Градусъ* по новой метрической системѣ подраздѣляютъ на 100 *милю*, или на 100 *секундъ*, и такъ далѣе. — Стоградусное дѣленіе хотя и было употреблено

въ нѣкоторыхъ европейскихъ извѣстныхъ математикахъ, но, несмотря на это, никакъ выходяще изъ употребленія, и, весьма вероятно, будетъ со временемъ совсѣмъ оставлено.

CENTIÈME. (Арх.) СОТАЯ. Одна часть цѣлаго, раздѣленнаго на сто равныхъ часіей. *Un centième, deux, trois centièmes; одна сотая, два, три сотыя.*

CENTIGRADE. СТОГРАДУСНЫЙ. *Division centigrade du cercle; стоградусное дѣленіе круга; См. CENTESIMALE. — Thermometre centigrade; стоградусный, Целсіевъ термометръ.* Смол. **THERMOMETRE.**

CENTIGRAMME.

CENTILITRE.

CENTIME.

CENTIMÈTRE.

См. MÉTRIQUE (NOUVEAU SYSTÈME).

CENTRAL. (Mex.) ЦЕНТРАЛЬНЫЙ, СРЕДОТОЧНЫЙ; къ центру относящійся. Смол. **CENTRE.**

CENTRALES (FORCES). (Mex.) ЦЕНТРАЛЬНЫЯ, СРЕДОТОЧНЫЯ СИЛЫ. Такъ называется одна или нѣсколько силъ, дѣйствующихъ на матеріальную точку, или на систему точекъ, когда эти силы направляются къ неподвижному центру. Смол. **FORCE.**

Со времени Ньютона, геометры много занимались изслѣдованіемъ свойствъ тѣхъ кривыхъ; то есть кривыхъ линій, описываемыхъ матеріальною точкою, побуждаемою къ одному или двумъ неподвижнымъ центрамъ. Уже Ньютонъ рѣшилъ съ особеннымъ искусствомъ первый изъ сихъ двухъ вопросовъ; онъ показалъ, что опредѣленіе свойства кривой, а также времени, въ которое она бываетъ описана, приводится къ квадратурамъ. Предполагая въ частности, что центральная сила обратно пропорціональна квадрату расстоянія, получился для тѣхъ кривыхъ коническая кривая. Чинамели найдутъ почти во всѣхъ прапматахъ о Механикѣ доказательство этого предложенія.

Другой вопросъ, въ которомъ предполагается также, что дѣйствующія силы обратно пропорціональны квадратамъ расстояній, но направлены къ двумъ неподвижнымъ центрамъ, представляетъ несравненно большія затрудненія. Первый рѣшилъ его *Эйлеръ*; онъ показалъ, что тѣхъ кривыхъ въ этомъ случаѣ есть прѣвая прап-

еще не зависящих от эллиптических функций. Решение Эйлера было признано одним геометрически верным методом геометрии.

Геометрия занималась также решением вопросов обратных, именно, определением центральных сил по данным обстоятельствам движения. Ньютоном разрешены многие вопросы такого рода. Вот, для пояснения, одна задача относившаяся к атому случаю.

Тело движется по кругу, и при таком движении, радиус вектора тела описывает площади, пропорциональные временам, около некоторой точки A, находящейся внутри круга. Найти центральную силу, побуждающую тело к точке A?

Мы говорим к точке A, ибо легко доказать, что если площади, описываемые радиусом вектором тела около некоторой точки, пропорциональны временам, то сила, побуждающая движущееся тело, будет направлена к этой самой точке, предполагая однако, что траектория есть плоская кривая.

Действительно, положим, что точка A есть та, около которой радиус вектор r тела, движущегося по кривой BC, в плоскости ABC заключенной, описывает площади, пропорциональные временам. И так, если принять начало координат в точке A, и изобразить чрез x и y прямоугольные координаты тела по истечении времени t, то пропорциональность описанных площадей к временам выразится, как известно из Геометрии, следующей формулой:

$$xdy - ydx = cdt^2,$$

в которой c изображает постоянное количество. Дифференцируя последнее уравнение, находим

$$xd^2y - yd^2x = 0,$$

или, что все равно,

$$\frac{xd^2y - yd^2x}{rdt^2} = 0;$$

но выражение $\frac{xd^2y - yd^2x}{rdt^2}$ есть не иное что, как проекция ускорительной силы, побуждающей тело по направлению перпендикулярному к радиусу вектору (Смол. FORCE), и так как эта проекция, в настоящем случае, равна нулю, то отсюда заключаем, что самая сила направлена к радиусу вектору, то есть, к точке A.

Мы не будем останавливаться на решении приведенной сейчас частной задачи, а разищем прямо общее выражение центральной силы, когда тело описывает какую ни есть плоскую кривую.

Проекция ускорительной силы на радиус вектора выражается чрез

$$\frac{xd^2y + yd^2x}{rdt^2};$$

сверх того, так как $x^2 + y^2 = r^2$, то $xdx + ydy = rdr$; дифференцируя это уравнение, найдем

$$xd^2x + yd^2y + dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2dr.$$

Но $dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2dr^2$, разделив под r углом, составляемый радиусом вектором r с осью x-овъ. Следовательно

$$\frac{xd^2x + yd^2y}{rdt^2} = \frac{dr^2}{dt^2} - r \frac{dr^2}{dt^2}.$$

И так $\frac{dr^2}{dt^2} - r \frac{dr^2}{dt^2}$ изображает проекцию ускорительной силы по направлению радиуса вектора или самую эту силу, ибо эта последняя совпадает с своею проекцией на радиус вектора. Но, в следствие пропорциональности описываемых площадей к временам,

$$xdy - ydx = r^2dr = cdt,$$

откуда

$$r^2dr^2 = c^2dt^2 \text{ и } r \frac{dr^2}{dt^2} = \frac{c^2}{r^2};$$

следовательно, выражение ускорительной силы будет

$$\frac{dr^2}{dt^2} - \frac{c^2}{r^2}.$$

*) Действительно, положим что траектория пересекать ось x-овъ на расстоянии a от точки A. Площадь сектора, описанная радиусом вектором тела, будет состоять из треугольника $\frac{xy}{2}$ и криволинейной площади, для которой абсцисса равняется a - x, а ордината y. Эта последняя криволинейная площадь выразится чрез $\int yda$ (a - x) = - $\int ydx$, Смол. AIRE. Следовательно, площадь сектора

будет $\frac{xy}{2} - \int ydx$, которая, по условию вопроса, должна быть пропорциональна времени t. И так

$$\frac{xy}{2} - \int ydx = Ct,$$

разделив под C величину постоянную. Дифференцируя последнее уравнение, найдем формулу

$$xdy - ydx = 2Cdt,$$

которая одинакова с приведенною выше, когда примем 2C = c.

Видно того, чтобы размахивать dt постоянно, будем принимать p за переменную независимую; въ такомъ предположеніи надобно записатьъ $\frac{dr}{dt}$ выраженіемъ $\frac{1}{dt} d\left(\frac{dr}{dt}\right)$. Но

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dp} \cdot \frac{dp}{dt} = \frac{dr}{dp} \cdot \frac{c}{r^2} = -c \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dp};$$

следовательно

$$\frac{d\left(\frac{dr}{dt}\right)}{dt} = -\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dp^2} \cdot \frac{dp}{dt} = -\frac{c^2}{r^2} \cdot \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dp^2}.$$

Итакъ, ускорительная сила выразится чрезъ

$$-\frac{c^2}{r^2} \left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dp^2} + \frac{1}{r} \right).$$

Если предположимъ, что шло описываетъ эллипсъ около одного изъ его фокусовъ, то получимъ уравненіе (Смол. ELLIPSE)

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos p},$$

въ которомъ a изображаетъ большую полу-ось эллипса, а e его эксцентриситетъ; изъ этого уравненія выведемъ послѣдовательно

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1 + e \cos p}{a(1 - e^2)} \\ \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dp^2} &= -\frac{e \cos p}{a(1 - e^2)} \\ \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dp^2} + \frac{1}{r} &= \frac{1}{a(1 - e^2)}. \end{aligned}$$

Итакъ, въ этомъ случаѣ, центральная сила бу-

детъ

$$-\frac{c^2}{a(1 - e^2)} \cdot \frac{1}{r^2};$$

знакъ — показываетъ, что эта сила сослываетъ съ радіусомъ векторомъ уголъ въ 180° , то есть, что она притягательная; сверхъ того, изъ найденнаго выраженія заключаемъ, что искома сила обратно пропорціональна квадрату разстоянія шло отъ притягательнаго центра, въ фокусѣ эллипса находящагося.

Размахиваніе центральныхъ силъ, въ наше время, не представляеть уже той степени занимательности, какую имѣло для современниковъ Ньютона и для геометровъ, непосредственно послѣ него жившихъ. Механика обладаетъ нынѣ формулами, которыми опредѣляютъ движеніе точекъ, побуждаемыхъ какими ни есть силами, наравленными къ неподвижнымъ центрамъ, или

имѣющими какія угодно направленія, непрестанно измѣняющіяся.

CENTRALE (RÈGLE). ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПРАВІЛО. Способъ изображеній Англичаинъ математикомъ Бакеромъ (*Baker*) для геометрическаго поискованія вещественныхъ корней полныхъ уравненій третьей и четвертой степени. Этотъ способъ основанъ на опредѣленіи центра и радіуса круга, переѣкающаго данную параболу въ точкахъ, коихъ абсциссы изображаютъ искомыя корни. Для подробностей отсылаемъ къ *Philosophical Transactions* N° 157.

CENTRE (Геом.) ЦЕНТРЪ, СРЕДОТОЧІЕ. Отъ

Греческаго слова *κέντρον*, точка. Въ обширномъ смыслѣ, центръ называется точка, которая представляеть какую либо особенность. Иногда даже центръ есть точка, произвольно взятая между многими другими, подлежащими нашему разсмотрѣнію по своему вопросу. Это опредѣленіе объясняется слѣдующими частностями:

CENTRE D'UN CERCLE. Центръ круга. Точка,

равно удаленная отъ всѣхъ точекъ окружности.

CENTRE D'UNE COURBE. Центръ кривой линіи.

Такая точка въ плоскости кривой, что каждая прямая, проведенная чрезъ нее до встрѣчи съ кривою линіею, раздѣляется въ этой точкѣ на двѣ части, равныя между собою. Многія кривыя совсѣмъ не имѣютъ центра; другія имѣютъ только одинъ центръ, а нѣкоторыя, нѣсколько точекъ такого свойства.

Изъ этого опредѣленія весьма легко заключить, что для разысканія центра кривой, опредѣленной уравненіемъ $f(x, y) = 0$, надлежитъ разсмотрѣть, возможно ли удовлетворить въ одно время двумъ уравненіямъ

$$f(a + x, \beta + y) = 0 \quad \text{и} \quad f(a - x, \beta - y) = 0,$$

разумѣя подъ a и β координаты искомаго центра кривой. И такъ, если желаемъ узнать, который изъ коническихъ кривыхъ имѣютъ центръ, то въ общее уравненіе второго порядка

$$Ax + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 = 0,$$

подставляемъ на мѣсто x и y сперва $a + x$ и $\beta + y$, а потомъ $a - x$ и $\beta - y$, и размахиваемъ, могутъ ли два уравненія, полученные такимъ образомъ, быть приведены къ тождественному виду, и въ какомъ именно случаѣ. Эти два уравненія будутъ

$$A + B\alpha + C\beta + D\alpha^2 + E\alpha\beta + F\beta^2 + (B + 2D\alpha + E\gamma)x + (C + 2F\beta + E\alpha)\gamma + D\gamma^2 + E\gamma x + F\gamma^2 = 0$$

$$A + B\alpha + C\beta + D\alpha^2 + E\alpha\beta + F\beta^2 - (B + 2D\alpha + E\gamma)x - (C + 2F\beta + E\alpha)\gamma + D\gamma^2 + E\gamma x + F\gamma^2 = 0.$$

Для тождества этих двух уравнений, должно быть $B + 2D\alpha + E\gamma = 0$ и $C + 2F\beta + E\alpha = 0$,

откуда
$$\alpha = \frac{CE - \Delta BF}{\Delta DF - E^2}$$

$$\beta = \frac{BF - \Delta CD}{\Delta DF - E^2}.$$

Эти величины α и β возможны, пока не уничтожится знаменатель $\Delta DF - E^2$. Если же $\Delta DF - E^2 = 0$, то α и β обращаются в бесконечные величины, и следовательно кривая, соответствующая случаю $\Delta DF - E^2 = 0$, то есть *парабола*, не имеет центра. И такъ, между коническими кривыми, одна только парабола не имеет центра.

Легко усмотреть, что если уравнение кривой будетъ четной степени, и сверх того такого свойства, что въ каждомъ членѣ сумма показателей надъ x и y изобразитъ четное число, то кривая ланія будетъ иметь центръ въ началѣ координатъ. То же самое можно сказать и объ уравненіи нечетной степени, въ которомъ сумма показателей во всѣхъ членахъ будетъ число нечетное. Для примѣра на эти два случая, предлагаемъ двѣ кривыя, определяемы уравненіями

$$x^4 - x^2y^2 + y^4 - b^4 = 0 \text{ и } x^3 - xy^2 + ay^3 - y^4 = 0.$$

Кривыя двойкой кривизны рѣдко имѣютъ центры. Что касается до кривыхъ поверхностей, то ихъ центры имѣютъ то же значеніе, какъ и въ плоскихъ кривыхъ, и определяются подобнымъ образомъ. Положимъ, напримѣръ, что желаемъ найти центръ кривой поверхности второго порядка, определяемой общимъ уравненіемъ

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy + Gx + Hy + Iz = K.$$

Подставляемъ въ это уравненіе на мѣсто x, y, z суммы $\alpha + x, \beta + y, \gamma + z$, и получаемъ

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy + 2(A\alpha + F\beta + E\gamma + G)x + 2(F\alpha + B\beta + D\gamma + H)y + 2(E\alpha + D\beta + C\gamma + I)z = K - (A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2E\alpha\gamma + 2F\alpha\beta + G\alpha + H\beta + I\gamma).$$

Это уравненіе, для существованія центра, не должно имѣться, когда, вмѣсто x, y, z , подста-

вимъ въ него $-x, -y, -z$. И такъ, коэффициенты предъ x, y, z должны обратиться въ нуль, почему

$$A\alpha + F\beta + E\gamma + G = 0$$

$$F\alpha + B\beta + D\gamma + H = 0$$

$$E\alpha + D\beta + C\gamma + I = 0,$$

откуда

$$\alpha = \frac{(BC - D^2)G + (DE - CF)H + (FD - BE)I}{ABC - D^2A - E^2B - F^2C + \Delta DEF},$$

$$\beta = \frac{(DE - CF)G + (CA - E^2)H + (EF - AD)I}{ABC - D^2A - E^2B - F^2C + \Delta DEF},$$

$$\gamma = \frac{(FD - BE)G + (FF - AD)H + (AB - F^2)I}{ABC - D^2A - E^2B - F^2C + \Delta DEF}.$$

Вотъ величины координатъ центра разсматриваемой поверхности. Ясно, что пока знаменатель, входящій въ эти дроби, не обратится въ нуль, то получится одна, совершенно опредѣленная система координатъ α, β, γ . Но если

$$ABC - D^2A - E^2B - F^2C + \Delta DEF = 0,$$

то разстояніе центра отъ начала координатъ сдѣлается бесконечнымъ, то есть, поверхность не будетъ имѣть центра, развѣ только числители предыдущихъ дробей сами обратятся въ нуль; въ этомъ послѣднемъ случаѣ поверхность допустить бесконечное число центровъ.

CENTRE GÉNÉRAL D'UNE COURBE. Общій центръ кривой ланія. Когда всѣ диаметры пересѣкаются въ одной точкѣ, то сія точка называется *общимъ центромъ той кривой*. См. **DIAMÈTRE**.

CENTRE D'UNE SPHÈRE. Центръ шара. Точка, равно удаленная отъ всѣхъ точекъ поверхности шара.

CENTRE D'UN POLYÈDRE RÉGULIER. Центръ правильнаго многоугольника. Точка соединенія всѣхъ апотемъ въ правильномъ многоугольнике.

CENTRE DE FIGURE. Центръ фигуры. Такая точка въ плоскости фигуры, что каждая прямая, проведенная чрезъ нее до встрѣчи съ периметромъ той фигуры, раздѣляется въ этой точкѣ на двѣ части, равныя между собою.

CENTRE DES MOYENNES DISTANCES. Центръ средняго разстоянія. Положимъ, что имѣемъ сколько угодно точекъ m, m', m'', \dots , определяемыхъ координатами $x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' \dots$. Пусть будетъ n число данныхъ точекъ. Если опредѣлимъ координаты ξ, η, ζ такъ, чтобы

$$\xi = \frac{x + x' + x'' + \dots}{n}$$

$$\eta = \frac{y + y' + y'' + \dots}{n}$$

$$\zeta = \frac{z + z' + z'' + \dots}{n}$$

то определяемая ими точка принимает название *центра среднего расстояния*. Очевидно, что ξ, η, ζ будутъ соответственно не иное что, какъ *среднія арифметическія* между величинами координатъ $x, x', x'' \dots; y, y', y'' \dots; z, z', z'' \dots$

CENTRE DE GRAVITÉ, D'INERTIE, DE MASSE или **DE FIGURE**. (Mex.) **ЦЕНТРЪ ТЯЖЕСТИ**, **ИМЕРЦІИ**, **МАССЫ** или **ФИГУРЫ**. См. GRAVITÉ (CENTRE DE).

CENTRE DES FORCES PARALLÈLES. **ЦЕНТРЪ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХЪ СИЛЪ**. Положимъ, что имѣемъ систему параллельныхъ силъ $P, P', P'' \dots$, соотвѣстственно приложенныхъ къ точкамъ $m, m', m'' \dots$. Равнодѣйствующая R этихъ силъ равна ихъ суммѣ $P + P' + P'' + \dots$, параллельна общему ихъ направленію, и проходитъ чрезъ извѣстную точку O , называемую *центромъ параллельныхъ силъ*. Свойство этой точки таково, что если измѣнимъ направленіе силъ $P, P', P'' \dots$ такъ, чтобы и въ измѣненномъ положеніи онѣ оставались параллельными между собою, и сохранили прежнія точки приложенія $m, m', m'' \dots$, то равнодѣйствующая R пройдетъ чрезъ прежнюю точку O . Изъ сказаннаго въ слѣдствіе: COMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES легко удостоверить, что въ этомъ свойствѣ.

И такъ, *центръ параллельныхъ силъ* есть точка, въ которой пересѣкаются послѣдовательныя направленія равнодѣйствующей, въ предположеніи, что составляющія силы обращаются около своихъ точекъ приложенія, оставаясь при томъ параллельными между собою.

Сображаясь съ спосібомъ, предложеннымъ въ слѣдствіе: COMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES, не трудно будетъ опредѣлить аналитически положеніе центра параллельныхъ силъ. Опредѣлимъ систему параллельныхъ силъ $P, P', P'' \dots$, приложенныхъ къ точкамъ $m, m', m'' \dots$ къ тремъ прямоугольнымъ осямъ x -овъ, y -овъ, z -овъ. Пусть будутъ соотвѣстственно $x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' \dots$ координаты точекъ $m, m', m'' \dots$. Изобразимъ чрезъ ξ, η, ζ координаты

центра параллельныхъ силъ. Разстоянія ξ, η, ζ опредѣлятся слѣдующими формулами:

$$\xi = \frac{Px + P'x' + P''x'' + \dots}{P + P' + P'' + \dots}$$

$$\eta = \frac{Py + P'y' + P''y'' + \dots}{P + P' + P'' + \dots}$$

$$\zeta = \frac{Pz + P'z' + P''z'' + \dots}{P + P' + P'' + \dots}$$

Въ тяжелыхъ тѣлахъ, центръ параллельныхъ силъ принимаетъ названіе *центра тяжести*. См. GRAVITÉ (CENTRE DE).

CENTRE FIXE. **ИММОБИЛЬНЫЙ ЦЕНТРЪ**.

CENTRE D'ACTION или **CENTRE D'ATTRACTION**. **ЦЕНТРЪ ПРИТЯЖЕНІЯ**. См. ATTRACTION.

CENTRE DES MOMENTS. **ЦЕНТРЪ МОМЕНТОВЪ**. Точка, относительно которой берутся моменты. См. MOMENT.

CENTRE D'ÉQUILIBRE. **ЦЕНТРЪ РАВНОВѢСІЯ**. Точка, чрезъ утвержденіе которой, система приводится въ равновѣсіе. Въ рычагѣ, напримѣръ, точка подпоры одно и то же, что *центръ равновѣсія*.

CENTRE DE SUSPENSION. **ЦЕНТРЪ ПРИВЯЗАНІЯ**, **ЦЕНТРЪ ПРИВѢСА**; точка, около которой маятникъ производитъ свои качанія.

CENTRE D'OSCILLATION. **ЦЕНТРЪ КАЧАНІЯ**. Когда тяжелое тѣло, имѣющее какой угодно видъ, или вообще неизмѣняемая система тѣлъ, совершаетъ качанія около горизонтальной оси, то внутри этого тѣла или системы находится безчисленное множество такихъ точекъ, коихъ движеніе не отличается отъ того движенія, которое бы онѣ имѣли, если бы были совершенно сходными отъ другихъ точекъ сего тѣла. Подобныя точки именуются *центрами качанія*, и всегда бывають расположены на прямой, параллельной оси качанія. См. PENDULE COMPOSÉE.

CENTRE DE PRESSION. **ЦЕНТРЪ ДАВЛЕНІЯ**. Такъ называется точка, чрезъ которую проходитъ равнодѣйствующая давленій, производимыхъ тѣломъ жидкостью на какую либо плоскую фигуру. Легко усмотрѣть, что центръ давленія бываетъ всегда ниже центра тяжести. См. PRESSION.

CENTRE DE MOUVEMENT. Усп. вып. **ЦЕНТРЪ ДВИЖЕНІЯ**. Точка, около которой обращаются тѣла, составляющія какую либо систему.

CENTRE DE GRAVITATION. **ЦЕНТРЪ ТЯГОТѢНІЯ**. **ЦЕНТРЪ ТЯЖЕСТИ** системы нѣсколькихъ

тѣла, подверженныя закону взаимнаго притяженія. *Centre de gravitation* или *centre commun de gravité du système solaire*; *центр тяжести* или *общій центр тяжести солнечной системы*.

CENTRE D'AGITATION. Уст. выр. Центр волненія. Такъ называлъ Декартъ ту точку, которую впоследствии стали называть *центромъ качанія* (*centre d'oscillation*).

CENTRE DE PERCUSSION. Уст. выр. Центр удара. Когда неизбѣжная система тѣла движется около неподвижной оси, то въ этой системѣ есть такая точка, которая противоположаему ей препятствію, сообщаетъ ударъ сильнѣйшій, нежели въ другія; эту точку и называютъ *центромъ удара*. Смолт. PERCUSSION.

CENTRE DE CONVERSION. Уст. выр. Центр обращенія. Точка пересѣченія мгновенныхъ осей въ двухъ смежныхъ ихъ положеніяхъ. Можно допустить, что въ каждое мгновеніе, тѣло обращено около подобнаго центра, котораго положеніе непрестанно измѣняется. Бернулли называлъ эту точку *centre spontané de rotation*. Смолт. AXE INSTANTANE DE ROTATION.

PRINCIPE DE LA CONSERVATION DU CENTRE DE GRAVITÉ. Начало сохраненія движенія центра тяжести. Смолт. DYNAMIQUE.

CENTRE D'UN SABBAN. (Гном.) Центр квадрата, солнечныхъ часовъ. Основаніе указателя въ солнечныхъ часахъ. Смолт. GONOMIQUE.

CENTRIFUGE. FORCE CENTRIFUGE. ЦЕНТРОБѢЖНАЯ, СРЕДОВѢЖНАЯ СИЛА. Успѣе, изъясняемое тѣломъ, движущимся по кривой, чтобы описывать прямую линію. Мѣрою центробѣжной силы служитъ отношеніе квадрата скорости къ радіусу кривизны описываемой кривой линіи. Смолт. FORCE.

CENTRIPÈTE. ЦЕНТРОПРЯГАТЕЛЬНАЯ, ЦЕНТРОВЛЕКУЩАЯ СИЛА. Сила постоянно направленная къ движущемуся или неподвижному центру. Смолт. ATTRACTION.

CENTROBARIQUE (MÉTHODE). ЦЕНТРОБАРИЧЕСКИЙ СПОСОБЪ. Способъ, помощью котораго опредѣляется поверхность и объемъ тѣла: первый — посредствомъ производящей кривой; ея центра тяжести, а второй — посредствомъ производящей площади и ея центра тяжести.

Для поверхностей или тѣлъ вращенія, этотъ способъ заключается въ слѣдующей теоремѣ, именующейся *Гюльденовой* (*théorème de Guldin*). См. BARICENTRIQUE (CALCUL).

1°. *Поверхность, образуемая вращеніемъ плоской кривой около прямой линіи, заключающейся въ ея плоскости, равна длинѣ производящей кривой, помноженной на пространство, перемещеніе центра тяжести этой самой кривой при описаніи поверхности.*

2°. *Объемъ, образуемый вращеніемъ площади плоской кривой около прямой линіи, заключающейся въ ея плоскости, равенъ произведенію площади, помноженной на пространство, перемещеніе ея центра тяжести во время образованія тѣла.*

Эти два предложенія весьма легко доказывающіяся слѣдующимъ образомъ:

Пусть будутъ x и y прямоугольныя координаты производящей кривой, а η ордината центра тяжести дуги s этой самой кривой. По свойству центра тяжести будетъ

$$s\eta = f y ds.$$

Изобразивъ чрезъ S площадь разсматриваемой поверхности вращенія, а чрезъ π отношеніе окружности круга къ его діаметру, получимъ

$$S = 2\pi f y ds;$$

исключая въ послѣднихъ двухъ уравненіяхъ $f y ds$, найдемъ формулу

$$S = 2\pi s \eta,$$

выражающую первое изъ двухъ предложеній. Чтобы доказать второе, изобразимъ чрезъ u производящую площадь, чрезъ η ординату ея центра тяжести, а чрезъ V объемъ тѣла вращенія; образуемаго обращеніемъ этой площади. Будемъ писать двѣ формулы

$$u\eta = \frac{1}{2} f y ds, \quad V = \pi f y^2 ds;$$

но $du = y ds$ (Смолт. AIRE); следовательно, исключая $f y^2 ds$, получимъ уравненіе

$$V = 2\pi u \eta,$$

выражающее второе изъ приведенныхъ предложеній.

CERCLE. (Геом.) КРУГЪ. Площадь, ограниченная круговою линіею. Круговою линіею или окружностію круга называется такая плоская кривая, коей всѣ точки равно удалены отъ некоторой внутренней точки, именующейся *центромъ* или *средоточіемъ*, въ плоскости самой кривой находящейся.

Иногда ссылаются *круги* съ *окружностью* *круга*; но сдѣланное выше опредѣленіе устранилось всакомъ недоразумѣніи.

Каждая изъ линій *СА*, *СВ* (черт. 9, Листъ III), изъ центра *С* къ окружности проведенная, называется *радіусомъ*, *полу-діаметромъ* или *полупотеретникомъ* (*rayon, demi-diamètre*). Линія *DE*, проходящая чрезъ центръ *С*, и ограниченная съ обѣихъ сторонъ окружностію, именуется *діаметромъ* или *потеретникомъ* (*diamètre*).

Окружность круга раздѣляютъ на 360 *градусовъ*, которые изображаютъ знакомъ: °. Каждый градусъ дѣлится на 60 *минутъ*, изображаемыхъ знакомъ: ′; минута на 60 *секундъ*, означаемыхъ знакомъ: ″; секунда, на 60 *терцій*, которыми обозначаются слѣдующимъ образомъ: ′′′, и такъ далѣе. Такое раздѣленіе окружности называется *старымъ* (*ancienne division*). Въ новомъ, такъ называемомъ *стоградуснымъ* (*centigrade* или *centésimal*), четверть окружности дѣлится на *стоградусовъ*, слѣдовательно вся окружность на 400°. Впрочемъ, старое дѣленіе вѣроятно останется и впредь господствующимъ, но пріятнѣе удобности выкладки при употребленіи числа 360, имѣющаго много дѣлителей.

Уравненіе круга выводится какъ нельзя легче: положимъ, что оси, къ которымъ относимъ кругъ, суть прямоугольныя и проходятъ чрезъ его центръ. Пусть *СХ* ось абсциссъ, а *СУ* ось ординатъ; *CP = x*, *PA = y*, *CA = r*. По свойству прямоугольнаго треугольника *CPA* получимъ $\overline{CP^2} + \overline{PA^2} = \overline{CA^2}$ или $x^2 + y^2 = r^2$.

Вотъ уравненіе круга, описаннаго къ прямоугольнымъ осямъ, пересѣкающимся въ его центрѣ. Если бы начало координатъ находилось при концѣ діаметра, напримѣръ въ точкѣ *D*, то принявъ *DP = x*, *PA = y*, нашли бы уравненіе круга $y^2 = 2rx - x^2$. Вообще, предполагая центръ перенесеннымъ въ какую нѣ есть точку, опредѣляемую координатами *α* и *β*, найдемъ общее уравненіе для круга слѣдующаго вида:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

См. TRANSFORMATION DES COORDONNÉES. **CERCLE OSCULATEUR.** Сопррикасающійся кругъ, кругъ кривизны. Смол. OSCULATEUR.

CERCLES DE DEGRÉS SUPERIEURS. Круги высшихъ порядковъ. Такъ называются

кривыя, въ которыхъ абсцисса, возвышенная въ извѣстную степень, относилась къ той же степени ординаты, какъ ордината, къ постоянной линіи безъ абсциссы. Изобразивъ упомянутую степень чрезъ *m*, постоянную линію чрезъ *2a*, абсциссу чрезъ *x*, а ординату чрезъ *y*, получимъ слѣдующее уравненіе для круга *m*-го порядка:

$$y^{m+1} = 2ax^m - x^{m+1}.$$

Полагая, $m = 1$, найдемъ уравненіе $y^2 = 2ax - x^2$, принадлежащее обыкновенному кругу. Принявъ $m = 2$, будемъ $y^3 = 2ax^2 - x^3$; это уравненіе, по приведенію выше опредѣленію, принадлежащее кругу *второго порядка*.

CERCLES POISSAIRES. Часовые круги. Смол. HORRAIRE.

CÉRÈS. (Астр.) ЦЕРЕРА. Одна изъ новыхъ телескопическихъ планетъ; она открыта Палермскимъ астрономомъ *Пиацциемъ* 1-го Января 1801 года. Вотъ элементы пути Цереры:

Эпоха среди долготы 1801 г.	77°18'56",5
Долгота перигелія	146°26' 0",1
log. большой полу-оси	0,4420486
Эксцентрицитетъ 1806 г.	0,0785028
Долгота восходящаго узла	80°53'41",3
Наклоненіе пути	10°57'51",2

Перезливы цѣтшвъ Цереры въ красный, синий и бѣлый, а также полостныя туманныя оболочки, которыми эта планета иногда бываетъ окружена, между тѣмъ какъ въ другое время сіесть чистѣйшимъ свѣтомъ, заславаляютъ думать, что Церера имѣетъ значительную атмосферу, въ которой происходитъ всѣ эти перемѣны.

CERTITUDE. (Исч. Вѣр.) ДОСТОВѢРНОСТЬ, НЕСОМНѢННОСТЬ, ПОДЛИННОСТЬ, ИЗВѢСТНОСТЬ. Смол. PROBABILITÉ.

CHACUN A CHACUN. КАЖДЫЙ КАЖДОМУ.

Реченіе, употребляемое въ Геометріи для означенія равенства сравниваемыхъ частей въ двухъ или нѣсколькихъ фигурахъ. И такъ, говорятъ: Dans ces deux triangles les côtés sont égaux chacun à chacun: въ этихъ двухъ треугольникахъ стороны равны каждая каждой. — Dans ces trois pentagones les angles sont égaux chacun à chacun: въ этихъ трехъ пятиугольникахъ углы равны каждый каждому.

CHAÎNE. (Землеп.) **ЦѢПЬ.** Цѣпь, употребляемая землепашами для измѣренія линий (основаній) на участкахъ земли. Она дѣлается, но большей части, изъ желѣзныхъ или мѣдныхъ прутьевъ, которые имѣютъ обыкновенно одинъ футъ въ длину. Съ этою же цѣпью употребляютъ иногда и веревки; но такъ какъ длина сихъ послѣднихъ охотѣ сыро-сы воздуха, также отъ силы, которою ихъ на-тягивающъ, подвергается значительнымъ измѣ-неніямъ, то преимущественно оспается на споротъ неспаленныхъ цѣпей.

Что касается до употребленія землепашной цѣпи при измѣреніи основаній, то оно такъ из-вѣстно, что мы не будемъ останавливаться на немъ. Для некоторыхъ подробностей отсылаемъ читателей къ слову: **BASE.**

CHAÎNE SANS FIN. (Прикл. Мех.) Безконеч-ная цѣпь, четкл. Сомкнувшая цѣпь, ко-торая навивается на валъ какой либо машины.

CHAÎNES A GOBETS. Цѣпи съ черпалами.

CHAINETTE, CATENAIRE. (Мех.) **ЦѢПНАЯ ЛИ-НІЯ, КАТЕНАРИЯ.** Кривая, образуемая совер-шенно гибкою и нерастяжимою тяжею цѣпью или нитью, удержанною въ двухъ точкахъ. Галилей пытался опредѣлить видъ цѣпной ли-нѣи, и думалъ, но ошибочно, что парабола удо-влетворитъ вопросу. Въслѣдствіе *Яковъ Бер-нулли*, именно въ 1690 году, предложилъ современ-нымъ математикамъ найти свойства этой кривой. Въ слѣдующемъ году задача была рѣшена *Гуген-сомъ, Лейбницемъ и Иоанномъ Бернулли* (братомъ Якова). Во всѣхъ этихъ рѣшеніяхъ предполагали цѣпь во всѣхъ ея точкахъ равномерно тяжелой. Яковъ Бернулли предложилъ рѣшеніе для случая болѣе общаго, предположивъ въсѣ цѣпи измѣня-ющуюся по извѣстному закону, когда отъ одной ея точки переходить къ другой. Вслѣдъ за симъ, по аналогіи предметовъ, онъ разскалъ кри-вую, образуемую натянутымъ лукомъ, также видъ *упругой пластинки* (См. **ELASTIQUE PLAQUE**) и *линтэаріи* (Смол. **LINTÉAIRE**).

Покажемъ теперь какимъ образомъ можно най-ти уравненіе цѣпной линіи. Положимъ, что од-нородная цѣнь AhB , (Черт. 10 Листъ II) утвер-ждена своими двумя концами въ точкахъ A и B , и что она, въ состояніи равновѣсія, имѣетъ видъ означенный на чертѣжѣ. Принимая цѣпную

линію за веревочный многоугольникъ [Смол. **FU-NICULAIRE (POLY-GONE)**], состоящій изъ бес-конечнаго числа споротъ, и къ которому при-ложены силы вертикальныя, легко видѣть, что эта кривая будетъ вся заключаться въ верти-кальной плоскости, проходящей чрезъ точки A и B . Проведемъ въ этой плоскости координат-ныя оси, горизонтальную OX и вертикальную OY . Пусть будутъ $Op = x$ и $pt = y$ координаты какой нѣ есть точки m цѣпной линіи; $Oh = x_0$, и $hh = y_0$ извѣстныя координаты точки h , въ которой касательная QL къ кривой параллельна оси OX . Опишемъ теперь мысленно члени Ah и hB цѣпи, и разсмотримъ только ея дугу hm . Очевидно, что такое предположеніе позволительно, лишь бы только замѣнили дѣйствіе отяглыхъ частей цѣпи на дугу hm приличными силами. Ясно, что направленія силъ, о которыхъ гово-римъ, должны быть касательныя къ кривой въ точкахъ h и m . Пусть будутъ Q сила, дѣйст-вующая въ точкѣ h , и направляющаяся по hQ , а T , сила, замѣняющая дѣйствіе части hB , и на-правленная по mT . Эти силы называются *на-правленіемъ* цѣпи въ точкахъ h и m ; См. **TEN-SION**. Если вообразимъ менеръ, что часть hm цѣпной линіи, не измѣнилась въ своемъ видѣ, при-личествующемъ ея составу равновѣсія, сдѣла-лась *нестѣблемою* (*rigide*), то чрезъ это равно-вѣсіе не нарушилось, ибо уничтожилось въ системѣ нѣкоторыя изъ возможныхъ ея движеній. Въ та-комъ предположеніи можно будетъ замѣнить дѣ-йствіе дуги hm цѣпной линіи ея вѣсомъ, прило-женнымъ къ центру тяжести g этой самой дуги, и дѣйствующимъ по направленію вертикальной оси gn . Пусть будетъ z длина дуги hm , и масса ед-ничной длины, g сила тяжести; вѣсъ части hm цѣпи выразится чрезъ gms . Слѣдовательно, полу-чимъ неизмѣняемую систему, побуждаемую тре-мя силами, именно: 1) силою gms , дѣйствующею на точку g по направленію gn ; 2) силою Q , при-ложеною въ точкѣ h по направленію hQ ; 3) си-лою T , приложеною въ точкѣ m , и дѣйствующею по направленію mT . Вопросъ приводится къ опредѣленію условій равновѣсія этой системы.

Такъ какъ разсмаптриваемая нами теперь си-стема есть неизмѣняемая, то мы въ правѣ пере-нести точку приложения m силы T въ точку q встрѣчи ея направленія съ горизонтальною

Од, и мы покажем, что эта точка q должна непременно находиться на прямой gn . Действительно, разложим силу T , действующую в точке q по направлению qT на две силы, одну направленную по qL , которая будет $T \frac{dx}{ds}$, и другую вертикальную $T \frac{dy}{ds}$. Горизонтальная $T \frac{dx}{ds}$ должна уничтожить силу Q , противоположную ей, в следствие чего

$$(1) \quad T \frac{dx}{ds} = Q,$$

а вертикальная $T \frac{dy}{ds}$ должна уравновешивать противоположную силу $g \sin \alpha$; если бы эти две силы не были противоположны, то получила бы пара сил, которая уже ни чем не могла бы уравновеситься. Следовательно, необходимо чтобы точка q совпадала с пересечением вертикальной линией gn и горизонтальной QL , и сверх того должно быть:

$$(2) \quad T \frac{dy}{ds} = g \sin \alpha.$$

Сказанное нами приводит к следующему замечательному свойству: *если кривая такова, что если из какой ни есть ее точки m (черт. 10) провести касательную mT , и продолжим ее до пересечения с горизонтальной линией hL , то точка q совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного на hL из центра тяжести g дуги hm* . Основываясь на этом геометрическом свойстве дуги лини, очень легко вывести ее уравнение. Действительно, пусть будем $\xi = \frac{fxds}{s}$ абсцисса On центра тяжести g дуги hm . В следствие приведенного свойства дуги лини, должно быть $\overline{On} = \overline{Op} - pr = \overline{Op} - qr$; но $\overline{Op} = r$, $qr = (y - y_0) \frac{dx}{dy}$, почему $\frac{fxds}{s} = x - (y - y_0) \frac{dx}{dy}$.

Положив для краткости $\frac{dx}{dy} = p$, выводим из этого уравнения

$$fxds = sx - s(y - y_0)p,$$

или, по причине $fxds = sx - fsdx$,

$$s(y - y_0)p = fsdx;$$

дифференцируя это уравнение, находим

$$s(y - y_0)dp + spdy + (y - y_0)pds = sdx;$$

заменив дифференциал dx равно ему величиной pdy , и разделив на $(y - y_0)$, получим

$$sdp + pds = 0.$$

Но $sdp + pds = d(sp)$; следовательно $sp = a$, равная под a постоянной величине. И так

$$s = \frac{a}{p} = a \frac{dy}{dx}.$$

Это уравнение показывает, что с прямой линией дуги, считаемые от нижней точки, пропорциональны тангенсам углов, составляемых касательною с горизонтальною осью x -ов.

Подставляя $\sqrt{dx^2 + \frac{dy^2}{p^2}}$ вместо s в предыдущее уравнение (Смол. ARC), и дифференцируя пономь, получаем

$$dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = ad \left(\frac{dy}{dx} \right),$$

откуда

$$ad \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}}{\left(\frac{dy}{dx} \right)};$$

интеграл этого уравнения будет

$$x - \alpha = a \cdot \log \left(\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \right),$$

разложив под a постоянную величину. Но при $x = x_0$, $\frac{dy}{dx} = 0$; следовательно $\alpha = x_0$, и

$$\frac{x - x_0}{a} = \log \left(\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \right).$$

Отсюда выводим

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = e^{\frac{x - x_0}{a}} \text{ и}$$

$$-\frac{1}{\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}} = \frac{dy}{dx} - \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = -e^{-\frac{x - x_0}{a}}.$$

Сложив последние два уравнения, найдем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x - x_0}{a}} - e^{-\frac{x - x_0}{a}} \right),$$

откуда, по умножении на dx , получится чрез интегрирование

$$y - y_0 = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x - x_0}{a}} + e^{-\frac{x - x_0}{a}} \right).$$

Для определения β заменим, что при $x = x_0$, будет $y = y_0$; следовательно

$$y_0 - \beta = a, \text{ откуда } \beta = y_0 - a,$$

или наконец

$$(3) \quad \frac{y - y_0}{a} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x - x_0}{a}} + e^{-\frac{x - x_0}{a}} \right) - 1.$$

Вот уравнение дуги лини в прямоугольных координатах. Мы не будем останавли-

вашся на определении трех постоянных величин a , x_0 , γ_0 ; скажем только, что условия, определяющие их, суть следующие: кривая проходит через точки A и B , коих координаты Oa , Ob , iB даны, и сверх того, дана дуга s между этими двумя точками известна; легко видеть, что этих трех условий достаточно для предполагаемой кривой, и что для определения постоянных величин a , x_0 и γ_0 , надобно будет решить transcendентное уравнение в отношении к a . Это решение упрощается, когда доложим, что точки A и B находятся на горизонтальной линии, ибо в таком случае кривая будет состоять из двух частей AB и iB , совершаемых равными.

Что касается до выражения, то оно определяется из уравнения (2), дославляющего

$$T = \epsilon u \frac{ds}{dy}.$$

Заменим еще, что кривая есть кривая *распрямляемая* (*rectifiable*). И действительно, мы видели, что $s = a \frac{dy}{dx}$; но из уравнения (5) выводится

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x-x_0}{a}} - e^{-\frac{x-x_0}{a}} \right);$$

следовательно

$$s = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x-x_0}{a}} - e^{-\frac{x-x_0}{a}} \right).$$

Определяя вторую часть этого уравнения в функцию y , получим алгебраическое выражение

$$s = a \sqrt{\left(1 + \frac{\gamma - \gamma_0}{a} \right)^2 - 1}.$$

Приведен в заключение еще одно примечательное механическое свойство кривой линии. Средством Исчисления Вариаций доказывают, что из всех изопериметрических (См. ISO-PERIMÈTRE), то есть, из всех кривых равной длины, проведенных между двумя точками, центр тяжести кривой линии занимает самое низкое положение.

CHALEUR. (Мат. Физ.) ТЕПЛОТА, ТЕПЛО.

Причина, производящая явления теплоты, неизвѣстна естествоиспытателямъ. Конечно, математическая теорія теплоты вовсе не нуждается въ познаніи этой причины. Происходитъ ли тепло отъ сотрясенія атомовъ, или оно есть особенная невидимая жидкость, которую называ-

теплородомъ — для анализа все равно. Для него достаточно знать законы, по которымъ распространяется тепло. Законы, о которыхъ говоримъ, подтвержденные всѣми опытами, суть следующие:

1) *Количество тепла, равномерно распределенное по некоторому объему, пропорционально этому объему и его температурѣ.*

2) *Две частицы m и m' , безконечно малы, находясь между собою на разстояніи нечувствительно, сообщаютъ одна другой количество теплоты, которое, наприимѣръ для частицы m , пропорционально разности температуръ, соответствующихъ частицамъ m и m' , и некоторой функции ихъ взаимнаго разстоянія.*

3) *Количество тепла, проходящее чрезъ элементъ поверхности твердаго тѣла, пропорционально избытку температуры этого элемента, предъ температурою окружающей его среды.*

Отъ сотрясенія ли атомовъ, или отъ дѣйствія теплорода обнаруживаются эти законы, математическая теорія тепла остается одна и та же; ибо, повторимъ еще разъ, она не замѣнить отъ причины тепла, но отъ приведенныхъ сей-часъ законовъ *).

Чтобы вывести математическую теорію распространения теплоты въ твердыхъ тѣлахъ, рассмотримъ какое-ли есть однородное твердое тѣло, коюго всѣ точки, въ определенное мгновеніе, имѣютъ произвольныя, но зависящія температуры, и которое высвѣтлено въ средину, равномерно всѣмъ нагрѣтую. Теплоша будетъ переходить изъ частицъ болѣе нагрѣтыхъ въ тѣ, которыхъ нагрѣтъ менѣе, и въ то же время часть тепла выйдетъ изъ тѣла чрезъ его поверхность, и распространится въ окружающей средѣ. Если разсмотримъ состояніе тѣла по истеченіи известнаго времени послѣ того мгновенія, когда температуры всѣхъ его точекъ по-

*) Мы ошибды не утверждаемъ, чтобы теорія теплоты, сама по себѣ, не зависѣла отъ причинъ тепла; и дѣйствительно, нѣтъ никакого сомнѣнія, что приведенные законы, которые были найдены посредствомъ опытовъ, находятся въ полной зависимости отъ причины тепла; такъ что существо, одаренное высшимъ разумомъ, и считающее эту причину, могло бы, не основываясь на показаніяхъ опытовъ, вывести эти самые законы.

лагаются известными, то найдем совмѣстныя другія температуры; вопросъ, который имѣетъ цѣлю подчинить математическому анализу, состоятъ именно въ опредѣленіи сихъ температуръ.

Для рѣшенія задачи, положимъ что и изображаетъ температуру какой нѣ естѣ точки шѣла, опредѣляемой прямоугольными координатами x, y, z , и соответствующую времени t . Надлежитъ найти температуру u по известной ея величинѣ въ одно опредѣленное мгновеніе, которое, для простоты, предположимъ соответствующимъ времени $t = 0$. И такъ, первая данная рѣшаемаго нами вопроса, выражается условіемъ

$$(1) \quad u = f(x, y, z) \text{ когда } t = 0,$$

гдѣ подъ $f(x, y, z)$ разумеется известную функцію координатъ x, y, z . Вообразимъ теперь безконечно малый элементъ dv шѣла, заключающій въ себѣ точку (x, y, z) , и опредѣлимъ, сколько въ безконечно малое время dt этого элемента получитъ теплоты. Для этого, преждемъ въ соображеніе другую величину dv' ; пусть будутъ $x + \xi, y + \eta, z + \zeta$ ея координаты, и положимъ для простоты

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2.$$

Если изобразимъ чрезъ u' температуру элемента dv' , то въ слѣдствіе двухъ первыхъ законовъ, частица dv' въ безконечно малое время dt , получитъ приращеніе теплоты, выражающееся чрезъ

$$(u' - u) \varphi(r) dv dv' dt,$$

гдѣ $\varphi(r)$ изображаетъ функцію разстоянія r такого свойства, что величина ея, для разстоянія чувствительнаго, дѣлается неощущительною. Взявъ интегралъ предыдущаго выраженія относительно всѣхъ элементарныхъ объемовъ dv' , окружающихъ частицу dv , получимъ количество тепла, приобретаемое ею во время dt . И такъ, это количество будетъ

$$dv dt f(u' - u) \varphi(r) dv'.$$

Съ другой стороны, такъ какъ температура объема dv есть u , то, по истеченіи времени dt ,

$$u' = u + \frac{du}{dx} \xi + \frac{du}{dy} \eta + \frac{du}{dz} \zeta + \frac{1}{1.2} \left[\frac{d^2 u}{dx^2} \xi^2 + \frac{d^2 u}{dy^2} \eta^2 + \frac{d^2 u}{dz^2} \zeta^2 + 2 \left(\frac{d^2 u}{dx dy} \xi \eta + \frac{d^2 u}{dx dz} \xi \zeta + \frac{d^2 u}{dy dz} \eta \zeta \right) \right] + \dots + \frac{1}{1.2 \dots n} \left[\frac{d^n u}{dx^n} \xi^n + \frac{d^n u}{dy^n} \eta^n + \frac{d^n u}{dz^n} \zeta^n + n \left(\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1} dy} \xi^{n-1} \eta + \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1} dz} \xi^{n-1} \zeta + \frac{d^{n-1} u}{dy^{n-1} dz} \eta^{n-1} \zeta + \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1} dy dz} \xi^{n-1} \eta \zeta + \dots \right) \right] + \text{и проч.}$$

Выводя изъ этого выраженія разность $u' - u$ и подставляя ее въ интегралъ (3), получимъ

она получитъ приращеніе $\frac{du}{dt} dt$, и, въ слѣдствіе перваго изъ приведенныхъ трехъ законовъ, объёмъ dv , во время dt , приобрететъ количество тепла, пропорціональное $\frac{du}{dt} dv dt$. Пусть будетъ $C \frac{du}{dt} dv dt$ это количество; здѣсь C изображаетъ постоянную величину, которую называемъ *теплоемкостью* (*capacité spécifique pour la chaleur*). И такъ

$$C \frac{du}{dt} dv dt = dv dt f(u' - u) \varphi(r) dv',$$

или, уничтожая общіе множители,

$$(2) \quad C \frac{du}{dt} = f(u' - u) \varphi(r) dv'.$$

Вотъ уравненіе распространенія тепла внутри швердаго шѣла. Чтобы представить эту формулу въ видѣ болѣе удобномъ, стоимъ только разложить вторую ея часть. Для этого, опишемъ сферическую поверхность около точки (x, y, z) , принимаемой за центръ, радиусомъ равнымъ единицѣ, и потомъ, изъ той же точки, проведемъ ко всѣмъ точкамъ частицы dv' прямыя линіи, которыя можно продолжимъ неопредѣленно. Пусть будетъ $d\omega$ элементъ сферической поверхности, образуемый пересѣченіемъ съ нею проведенныхъ сей-часъ прямыхъ; можно будетъ, какъ извѣстно, положить $dv' = r^2 dr d\omega$. И такъ, интегралъ, который надлежитъ опредѣлить, будетъ

$$(3) \quad \int f(u' - u) \varphi(r) r^2 dr d\omega,$$

и онъ долженъ быть взятъ: 1° отъ $r = 0$, до r равнаго нечувствительной величинѣ ρ , изображающей разстояніе, на которомъ прекращается непосредственное сообщеніе тепла, и 2° относительно всѣхъ элементныхъ сферической поверхности.

Если предположимъ теперь $u = \psi(x, y, z, t)$, разукля подъ ψ неизвѣстную функцію, то полу-

$$u' = \psi(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, t),$$

или, по разложеніи,

$$\int \left[\frac{du}{dx} \xi + \frac{du}{dy} \eta + \frac{du}{dz} \zeta + \frac{1}{1.2} \left(\frac{du}{dx} \xi + \frac{du}{dy} \eta + \frac{du}{dz} \zeta \right)^2 + \dots + \frac{1}{1.2.3 \dots n} \left(\frac{du}{dx} \xi + \frac{du}{dy} \eta + \frac{du}{dz} \zeta \right)^n + \dots \right] \varphi(r) r^3 dr d\omega,$$

употребляя, для сокращения, символическія выраженія для дифференціаловъ. Смот. ANALOGIE DES PUISSANCES AVEC LES DIFFÉRENCES. Положимъ въ этомъ выраженіи $\xi = r \cos \alpha$, $\eta = r \cos \beta$, $\zeta = r \cos \gamma$; такъ какъ $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, то предыдущая формула обратится въ следующую:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int \left(\frac{du}{dx} \cos \alpha + \frac{du}{dy} \cos \beta + \frac{du}{dz} \cos \gamma \right) \varphi(r) r^3 dr d\omega + \frac{1}{1.2} \int \left(\frac{du}{dx} \cos \alpha + \frac{du}{dy} \cos \beta + \frac{du}{dz} \cos \gamma \right)^2 \varphi(r) r^4 dr d\omega \\ & + \dots \\ & + \frac{1}{1.2.3 \dots n} \int \left(\frac{du}{dx} \cos \alpha + \frac{du}{dy} \cos \beta + \frac{du}{dz} \cos \gamma \right)^n \varphi(r) r^{n+2} dr d\omega + \dots \end{aligned} \right.$$

Всѣ интегралы должны бытъ взяты, относительно r , отъ $r=0$ до $r=\rho$, а относительно α, β, γ , для всѣхъ величинъ сихъ угловъ, удовлетворяющихъ уравненію $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, и не превышающихъ π . Такъ какъ между предѣлами, о которыхъ вѣдѣтъ рѣчь, r есть количество весьма малое, то въ предыдущемъ ряду удерживаются обыкновенно только два первые члена, а нѣ, которые поименованы на r^5 и на высшія степени, откидываются. Впрочемъ мы увидимъ, что члены, заключающіе нечетныя степени количества r , обращаются въ нуль, и что слѣдовательно, удерживая первые два члена предыдущаго ряда, мы, на самомъ дѣлѣ, доводимъ приближеніе до r^5 . И такъ, имѣемъ

$$\int (u' - u) \varphi(r) r^3 dr d\omega = \int_0^\rho \varphi(r) r^3 dr \int \left(\frac{du}{dx} \cos \alpha + \frac{du}{dy} \cos \beta + \frac{du}{dz} \cos \gamma \right) d\omega + \frac{1}{2} \int_0^\rho \varphi(r) r^4 dr \int \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \cos^2 \alpha + \frac{d^2 u}{dy^2} \cos^2 \beta + \frac{d^2 u}{dz^2} \cos^2 \gamma + 2 \frac{d^2 u}{dx dy} \cos \alpha \cos \beta + 2 \frac{d^2 u}{dx dz} \cos \alpha \cos \gamma + 2 \frac{d^2 u}{dy dz} \cos \beta \cos \gamma \right) d\omega,$$

разумѣя подъ ρ радіусъ шара, при поверхности котораго прекращается непосредственное сообщеніе шенла.

Займемся сперва интегралами, относящимися къ ω . Очевидно, что

$$\int \cos \alpha d\omega = \int \cos \beta d\omega = \int \cos \gamma d\omega = 0,$$

и что вообще будетъ

$$\int \cos^i \alpha \cos^k \beta \cos^l \gamma d\omega = 0,$$

если изъ показателей i, k, l будетъ хотя одинъ нечетный. И дѣйствительно, положимъ что i число нечетное; такъ какъ разсматриваемый интегралъ долженъ бытъ распространяемъ на всѣ значенія перенѣнныхъ α, β, γ , удовлетворяющія уравненію $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ и не превосходящія π , то отсюда слѣдуетъ, что каждому элементу, для котораго $\alpha = \alpha', \gamma = \gamma', \gamma = \gamma'$, будетъ соотвѣтствовать другой, при которомъ $\alpha = \pi - \alpha', \beta = \gamma', \gamma = \gamma'$; ибо, если $\cos^2 \alpha' + \cos^2 \gamma' + \cos^2 \gamma' = 1$, то будетъ также $\cos^2 (\pi - \alpha') + \cos^2 \gamma' + \cos^2 \gamma' = 1$, и, сверхъ того, такъ какъ α' изображаетъ величину положительную, меньшую π , то и разность $\pi - \alpha'$ также положительная, а элементы, соотвѣтствующія значеніямъ $\alpha = \alpha'$ и $\alpha = \pi - \alpha'$, будутъ равны между собою, но съ противными знаками; слѣдовательно

$$\int \cos^i \alpha \cos^k \beta \cos^l \gamma d\omega = 0.$$

и поэтому

$$\int \cos \alpha \cos \beta d\omega = \int \cos \alpha \cos \gamma d\omega = \int \cos \beta \cos \gamma d\omega = 0.$$

$$\text{И такъ, получаемъ } \int (u' - u) \varphi(r) r^3 dr d\omega = \frac{1}{2} \int_0^\rho \varphi(r) r^4 dr \int \left[\frac{d^2 u}{dx^2} \cos^2 \alpha + \frac{d^2 u}{dy^2} \cos^2 \beta + \frac{d^2 u}{dz^2} \cos^2 \gamma \right] d\omega.$$

Легко произвести означенныя здѣсь интегрированія; дѣйствительно, имѣемъ

$$\int \cos^2 \alpha d\omega = \int \cos^2 \beta d\omega = \int \cos^2 \gamma d\omega,$$

и слѣдовательно

$$\int (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) d\omega = \int d\omega = 4\pi,$$

откуда заключаемъ

$$\int \cos^2 \alpha d\omega = \int \cos^2 \beta d\omega = \int \cos^2 \gamma d\omega = \frac{4\pi}{3}.$$

И такъ

$$\int (u' - u) \varphi(r) r^3 dr d\omega = \frac{2\pi}{3} \int_0^\rho \varphi(r) r^4 dr \left[\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right],$$

или, полагая для краткости,

$$\frac{2\pi}{3} \int_0^\rho \varphi(r) r^4 dr = k,$$

получимъ

$$\int (u' - u) \varphi(r) r^3 dr d\omega = k \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right),$$

и наконецъ, въ слѣдствіе формулы (3),

$$(5) \quad C \frac{du}{dt} = k \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right).$$

Вотъ уравненіе въ частныхъ дифференціалахъ, опредѣляющее распространеніе тепла внутри твердаго шара; оно было выведено въ первый разъ знаменитымъ Французскимъ математикомъ Фурье (Fourier).

Если не довольствуемся этимъ приближеніемъ, на основаніи котораго выведена формула (5), то надобно будетъ найти интегралы, составляющіе рядъ (4); полагая въ немъ для краткости $\frac{du}{dx} = a$, $\frac{du}{dy} = b$, $\frac{du}{dz} = c$, и удерживая символическое знаменное, получимъ

$$\int_0^R q(r) r^3 dr \int (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) d\omega + \frac{1}{2} \int_0^R q(r) r^5 dr \int (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma)^2 d\omega + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \int_0^R q(r) r^{n+2} dr \int (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma)^n d\omega + \dots$$

Займемся теперь опредѣленіемъ интеграла $\int (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma)^n d\omega$.

Положимъ $a = R \cos \lambda$, $b = R \cos \mu$, $c = R \cos \nu$,

онъ обратился въ слѣдующій: $R^n \int (\cos \lambda \cos \alpha + \cos \mu \cos \beta + \cos \nu \cos \gamma)^n d\omega$,

или, полагая $\cos \lambda \cos \alpha + \cos \mu \cos \beta + \cos \nu \cos \gamma = \cos \vartheta$,

получимъ $R^n \int \cos^n \vartheta d\omega$.

Здѣсь ϑ изображаетъ уголъ, составленный направлениемъ R съ r . Такъ какъ положеніе линіи R постоянно, а r измѣняетъ свое направленіе всѣми возможными образами, то и уголъ ϑ будетъ измѣняться отъ 0 до π . Если разложимъ сферическую поверхность, коей элементъ изображенъ у насъ чрезъ $d\omega$, на другіе элементъ, сперва коническими поверхностями, составляющими уголъ ϑ съ R , потомъ плоскостями, проходящими чрезъ R , и образующими съ одною изъ сихъ плоскостей уголъ ρ , то получимъ $d\omega = \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\rho$, и слѣдовательно надобно будетъ искать интегралъ

$$R^n \int \cos^n \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\rho$$

или $\vartheta = 0$ до $\vartheta = \pi$ и онъ $\vartheta = 0$ до $\vartheta = \pi$; интегрируя сперва относительно ρ , получимъ

$$2\pi R^n \int \cos^n \vartheta \sin \vartheta d\vartheta,$$

а потомъ, въ разсужденіи β , $2\pi R^n \cdot \frac{\cos^{n+1}(\vartheta) - \cos^{n+1}(\pi)}{n+1} = 2\pi \left(\frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} \right) R^n$.

Слѣдовательно, если n четное число, или $(-1)^{n+1} = -1$, тогда $R^n \int \cos^n \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\rho = \frac{4\pi}{n+1} R^n$,

а если n нечетное, то $R^n \int \cos^n \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\rho = 0$,

что впрочемъ слѣдуетъ и изъ формулы $\cos' \alpha \cos' \beta \cos' \gamma \dots = 0$, которая уже была доказана.

И такъ, разсматриваемый нами рядъ приметъ видъ

$$\frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4\pi}{3} R^2 \int_0^R q(r) r^3 dr + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{4\pi}{5} R^4 \int_0^R q(r) r^5 dr + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} \cdot \frac{4\pi}{2n+1} R^{2n} \int_0^R q(r) r^{2n+2} dr + \dots$$

Положимъ

$$\frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4\pi}{3} \int_0^R q(r) r^3 dr = K_1$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{4\pi}{5} \int_0^R q(r) r^5 dr = K_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} \cdot \frac{4\pi}{2n+1} \int_0^R q(r) r^{2n+2} dr = K_n$$

рядъ обратится въ слѣдующій: $K_1 R^2 + K_2 R^4 + \dots + K_n R^{2n} + \dots$

Но $R^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2$; слѣдовательно получимъ

$$K \left(\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2} \right) + K_2 \left(\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2} \right)^2 + \dots + K_n \left(\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2} \right)^n + \dots$$

Само собой разумѣется, что въ этомъ ряду, по разложеніи смененей, каждый членъ вида $A \frac{du^{2i}}{dx^{2i}} \cdot \frac{du^{2k}}{dy^{2k}} \cdot \frac{du^{2l}}{dz^{2l}}$ долженъ быть замѣненъ частною производною $A \frac{d^{2i+2k+2l}u}{dx^{2i} dy^{2k} dz^{2l}}$.

И такъ, уравненіе, опредѣляющее законъ распространенія тепла внутри твердаго шара, будетъ $C \frac{du}{dt} = K_1 \left(\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2} \right) + K_2 \left(\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2} \right)^2 + \dots + K_n \left(\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2} \right)^n + \dots$

Если же освободимся от символических законоположений, то получим

$$(6) \left\{ C \frac{d^4 u}{dt^4} = K_1 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right) + K_2 \left(\frac{d^4 u}{dx^4} + \frac{d^4 u}{dy^4} + \frac{d^4 u}{dz^4} + 2 \frac{d^4 u}{dx^2 dy^2} + 2 \frac{d^4 u}{dx^2 dz^2} + 2 \frac{d^4 u}{dy^2 dz^2} \right) + \dots \right. \\ \left. + K_n \left[\frac{d^{2n} u}{dx^{2n}} + \frac{d^{2n} u}{dy^{2n}} + \frac{d^{2n} u}{dz^{2n}} + n \left(\frac{d^{2n} u}{dx^{2n-2} dy^2} + \frac{d^{2n} u}{dx^{2n-2} dy^2 dz^2} + \frac{d^{2n} u}{dx^{2n-2} dy^2 dz^2} + \dots \right) \right] + \dots \right.$$

Въ этомъ уравнении численные коэффициенты $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ будутъ составлять рядъ быстро убывающій, по причинѣ возрастающихъ степеней n , входящихъ подъ интегралы, опредѣляющіе ихъ величины. Если отбросимъ $K_2, K_3, \dots, K_n, \dots$ и удержимъ только K_1 , то получимъ уравненіе (5), выведенное нами выше.

Обратимся теперь къ количеству теплоты $dvdt f(u' - u) q(r) dv'$, которое частица dv получаетъ во время dt ; это количество, чрезъ подстановленіе на мѣсто интеграла $f(u' - u) q(r) dv'$ найденнаго сей часъ значенія, обратится къ

$$dvdt \left[K_1 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right) + K_2 \left(\frac{d^4 u}{dx^4} + \dots \right) + \dots + K_n \left(\frac{d^{2n} u}{dx^{2n}} + \dots \right) + \dots \right].$$

Найдемъ интегралъ этого выраженія во всемъ пространствѣ какого нибудь объема A , воображаемаго внутри того тѣла, котораго рассматриваемъ температуру. По известнымъ формуламъ получимъ выраженіе

$$dt f \left\{ K_1 \left(\frac{du}{dx} \cos \lambda + \frac{du}{dy} \cos \mu + \frac{du}{dz} \cos \nu \right) + K_2 \left[\left(\frac{d^3 u}{dx^3} + \frac{d^3 u}{dx dy^2} + \frac{d^3 u}{dx dz^2} \right) \cos \lambda \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{d^3 u}{dy^3} + \frac{d^3 u}{dy dx^2} + \frac{d^3 u}{dy dz^2} \right) \cos \mu + \left(\frac{d^3 u}{dz^3} + \frac{d^3 u}{dz dx^2} + \frac{d^3 u}{dz dy^2} \right) \cos \nu \right] + \dots \right\} ds,$$

въ которомъ λ, μ, ν изображаютъ углы, составляемые въшнейю частию нормали къ поверхности рассматриваемаго объема съ координатными осями, а ds элементъ этой поверхности. Предыдущее выраженіе, вѣрное съ произвольнымъ знакомъ, изобразитъ количество теплоты, которое каждый элементъ объема A потеряетъ во время dt , и следовательно будетъ также равняться проходящему сквозь поверхность объема A количеству теплоты. Впрочемъ, можемъ случиться, что выраженіе

$$(7) - dt f \left\{ K_1 \left(\frac{du}{dx} \cos \lambda + \frac{du}{dy} \cos \mu + \frac{du}{dz} \cos \nu \right) + K_2 \left[\left(\frac{d^3 u}{dx^3} + \dots \right) \cos \lambda + \dots \right] + \dots \right\} ds$$

будетъ отрицательное; это значить, что въ такомъ случаѣ объемъ A не потеряетъ, а приобрететъ это количество теплоты. Та же формула изобразитъ количество тепла, которое цѣлое тѣло потеряетъ, если подъ A будемъ разумѣть объемъ всего рассматриваемаго тѣла. Впрочемъ, не худо замѣтить, что въ строгомъ смыслѣ, нельзя приложитъ вышеприведеннаго выраженія къ цѣлому объему тѣла, ибо точки, находящіяся очень близко къ поверхности, испускаютъ непосредственно теплоту въ тѣло, такъ что односмысленно съяъ точекъ нельзя будетъ употребитъ вычисленій, которыми опредѣляется количество теплоты, приобретаемое частицею dv . И такъ, для болѣея строгости, мы допустимъ, что A изображаетъ объемъ цѣлага тѣла безъ наружнаго слоя, весьма тонкаго; по-этому, формула (7) изобразитъ количество тепла, получаемого наружнымъ слоемъ отъ внутренней части тѣла. Положимъ, что окружающая середина имѣетъ постоянную температуру нуль градусовъ; следовательно, по третьему закону, элементъ ds поверхности испуститъ наружу во время dt количество теплоты, пропорциональное произведенію $hdsdt$; нульъ будетъ $hdsdt$ это количество, гдѣ h изобразаетъ постоянный коэффициентъ, именуемый *наружною проводимостію* (*conductibilité extérieure, pouvoir émissif*); и такъ, количество теплоты, испускаемое тѣломъ наружу, будетъ $hdfdsdt$. Но ясно, что разность между этою величиною и величиною (7), должна быть весьма мала, иначе наружный слой получитъ бы количество теплоты, пропорциональное только элементу времени dt , и, по причинѣ, что объемъ слоя весьма малъ, температура его сдѣлалась бы чрезвычайно высокою, а этого въ опытахъ никогда не замѣчено. И такъ, уравнивъ выраженіе (7) интегралу $hdfdsdt$, раздѣливъ на общіе множители, и уничтоживъ знакъ f , получимъ:

$$K_1 \left(\frac{du}{dx} \cos \lambda + \frac{du}{dy} \cos \mu + \frac{du}{dz} \cos \nu \right) + K_2 \left[\left(\frac{d^3 u}{dx^3} + \frac{d^3 u}{dx dy^2} + \frac{d^3 u}{dx dz^2} \right) \cos \lambda + \left(\frac{d^3 u}{dy^3} + \frac{d^3 u}{dy dx^2} + \frac{d^3 u}{dy dz^2} \right) \cos \mu \right. \\ \left. + \left(\frac{d^3 u}{dz^3} + \frac{d^3 u}{dz dx^2} + \frac{d^3 u}{dz dy^2} \right) \cos \nu \right] + \dots + hu = 0 \dots \dots \dots (8)$$

Вопнз уравненіе, которое вместе съ (8) и съ условіемъ (1), служило для опредѣленія температуры и въ функции x, y, z и t (*).

Въ обыкновенной теоріи теплоты ошбрасываютъ коэффициенты K_1, K_2, \dots а удерживаютъ только K_1 . Въ этомъ предположеніи, уравненія (6), (8) и (1), въ которыхъ вмѣсто K_1 пишемъ K , а вмѣсто h, hK , примемъ видъ:

$$(9) \quad \begin{cases} C \frac{du}{dt} = K \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right) \\ \frac{du}{dx} \cos \lambda + \frac{du}{dy} \cos \mu + \frac{du}{dz} \cos \nu + hu = 0 \\ u = f(x, y, z) \text{ когда } t = 0. \end{cases}$$

Математическая теорія распространенія тепла въ твердыхъ тѣлахъ, въ допущенномъ предположеніи, приводится къ интегрированію этихъ трехъ уравненій. Постоянный коэффициентъ C называется *теплоемкостью*, а K , *относительной внутренней теплопроводимостью*, или просто *проводимостью*; h изображаетъ содержаніе наружной теплопроводимости къ внутренней. См. SARASINTE, CONDUCTIBILITE.

Приложимъ уравненія (9) къ шару, коего начальную температуру положимъ постоянною, наприкладъ, равною 1. Изобразивъ чрезъ t радіусъ шара, получимъ

$$(10) \quad \begin{cases} C \frac{du}{dt} = K \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right) \\ x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} + z \frac{du}{dz} + hu = 0 \\ u = 1, \text{ когда } t = 0. \end{cases}$$

Если означимъ чрезъ r перемѣнный радіусъ, то есть, расстояние рассматриваемой точки внутри шара отъ его центра, то u будетъ функциею только двухъ количествъ, именно, радіуса r и времени t ; следовательно, въ силу уравненій $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, найдемъ

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr} \cdot \frac{x}{r}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{du}{dr} \cdot \frac{y}{r}, \quad \frac{du}{dz} = \frac{du}{dr} \cdot \frac{z}{r},$$

откуда

$$x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} + z \frac{du}{dz} = r \frac{du}{dr}$$

и уравненіе, относящееся къ поверхности, приметъ видъ

$$\frac{du}{dr} + hu = 0.$$

Далѣе получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{d^2u}{dr^2} \cdot \frac{x^2}{r^2} + \frac{du}{dr} \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) \\ \frac{d^2u}{dy^2} &= \frac{d^2u}{dr^2} \cdot \frac{y^2}{r^2} + \frac{du}{dr} \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right) \\ \frac{d^2u}{dz^2} &= \frac{d^2u}{dr^2} \cdot \frac{z^2}{r^2} + \frac{du}{dr} \left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d^2(ru)}{dr^2}.$$

И такъ, первое изъ уравненій (10) приметъ видъ

$$C \frac{du}{dt} = \frac{K}{r} \frac{d^2(ru)}{dr^2}$$

или

$$C \frac{d(ru)}{dt} = K \frac{d^2(ru)}{dr^2}.$$

Пусть будетъ для краткости $ru = v$; получимъ

$$C \frac{dv}{dt} = K \frac{d^2v}{dr^2},$$

и въ то же время выраженіе $\frac{du}{dr} + hu$ обратится въ слѣдующее:

$$\frac{1}{r} \left[\frac{d(ru)}{dr} + \left(h - \frac{1}{r} \right) ru \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{dv}{dr} + \left(h - \frac{1}{r} \right) v \right],$$

почему уравненіе при поверхности будетъ

$$\frac{dv}{dr} + \left(h - \frac{1}{r} \right) v = 0;$$

сверхъ того, при $t = 0, v = r$. И такъ, уравненія, опредѣляющія состоянія температуръ рассматриваемаго шара, приводятся къ тремъ слѣдующимъ:

$$\frac{dv}{dt} = K' \frac{d^2v}{dr^2}$$

$$\frac{dv}{dr} + h'v = 0$$

$$v = r \text{ когда } t = 0,$$

въ которыхъ положили для краткости $\frac{K}{C} = K'$ и $h - \frac{1}{r} = h'$.

Интегрированіе сихъ уравненій завлекло бы насъ слишкомъ далѣко; ограничимся опредѣленіемъ окончательной температуры тѣла, то есть той, которую оно будетъ имѣть по истеченіи значительнаго времени. Для этого должно положить $\frac{dv}{dt} = 0$, откуда и $\frac{d^2v}{dr^2} = 0$; следовательно $v = ar + b$.

Но когда $r = 0$, то и $v = 0$, ибо $v = ru$; поэтому $b = 0$, и получимъ

$$v = ar,$$

что приводитъ уравненіе

$$\frac{dv}{dr} + h'v = 0$$

*) Уравненія (6) и (8) выведены нашимъ математикомъ Г. Осиповичемъ; они еще нигдѣ не были помѣщены, и включены въ первый разъ въ нашъ Лекціонъ.

къ следующему:

$$a(1 + hT) = 0,$$

или, подставляя на мѣсто h' равную ему величину $h = \frac{1}{T}$, $hla = 0$;

и такъ $a = 0$, ибо мы не предполагаемъ чтобы h уничтожался. Отсюда заключаемъ, что $v = 0$, и следовательно $u = 0$, а это показываетъ, что по истеченіи значительнаго времени, шаръ будешь имѣть температуру окружающей его среды, что дѣйствительно и справедливо. Если бы положили $h = 0$, то нашли бы $v = ar$, и следовательно $u = a$; такъ какъ этотъ выводъ показываетъ, что температура постоянна, то она должна быть равна первоначальному своему состоянию, то есть, $u = 1$; это слѣдствіе очевидно справедливо, ибо, въ исполненіи предположеній, телота, заключающаяся въ шаръ, не переходитъ въ окружающую его среду.

Когда объясняемъ явленія теплоты допуская существованіе особенной жидкости, именуемой теплородомъ, то предполагаемъ, что частицы этой жидкости оплываютъ взаимно, и движутся съ чрезвычайною быстротою. Внутри шара твердыхъ и жидкихъ ихъ движеніе несравненно медленнее нежели въ газахъ и пустотѣ. Разсматриваніе внутренняго лучеобразнаго движенія тепла (*rayonnement interieur*) въ твердыхъ шарахъ приводитъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ распространенія теплоты, которыхъ мы вывели выше. Сообщеніе же лучей между шарами отдѣльными, находящимися въ воздухѣ или въ пустотѣ, составляетъ другую отрасль математической теоріи теплоты, называемую *теоріею лучистой теплоты* (*théorie de la chaleur rayonnante*). Это то же въ отношеніи тепла, что *Катоптрика* въ разсужденіи свѣта. По объему нашего Лексикона, мы не можемъ предложить никакихъ подробностей объ теоріи лучистой теплоты, представляющей весьма привлекательные законы, а укажемъ только на сочиненія, въ которыхъ читатели могутъ почерпнуть свѣдѣнія объ этомъ предметѣ: *Fourier*, Tome V des *Mémoires de l'Académie de Paris*; *Poisson*, *Théorie mathématique de la chaleur*, 1835, *Annales de Physique et de Chimie*, въ которыхъ тѣ же авторы почтили нѣсколько Разсужденій объ этомъ предметѣ.

Ограничимся приведеніемъ изъ сей теоріи одной формулы, выражающей количество теплоты, сообщаемое безконечно малымъ элементомъ ω какому нибудь шара m бесконечно же малому элементу s другого шара m' , находящемуся отъ перваго на известномъ разстояніи. Пусть будетъ r разстояніе двухъ элементовъ ω и s ; θ и ϕ углы, составляемые нормальми къ ω и s съ r ; наконецъ u и v соответственные температуры элементовъ ω и s , а dt , дифференціалъ времени. Количество теплоты, о которомъ мы сей-часъ упоминали, выражается формулою

$$\frac{K(u - v) \cos \theta \cos \phi \cdot \omega \cdot s \cdot dt}{r^2},$$

въ которой K изображаетъ постоянную величину.

Въ заключеніе скажемъ, что теорія теплоты, собственно говоря, не ранее 1812 года сдѣлалась новою отраслью Физико-математическихъ наукъ. До этого времени, только нѣкоторые опытовныя изслѣдованія *Ламберта*, *Превост* (*Pierre Prevost*, de Genève) и *Лапласа*, составляли всю математическую часть сей теоріи. Трудъ Г. Фурье, увѣнчанный Парижскою Академіею *) въ началѣ 1812 года, представилъ обширный и разнообразный много вопросовъ изъ математической Теоріи Теплоты, и возвелъ ее на степень самостоятельной науки. Вслѣдствіи, именно въ 1822 году, Фурье издалъ сочиненіе подъ заглавіемъ *Théorie analytique de la chaleur*, заключающее въ себѣ рѣшенія многоразличныхъ вопросовъ, относящихся къ математической теоріи теплоты.

CHAMBRE NOIRE или **CHAMBRE OBSCURE** (Опик.)

ТЕМНЫЙ ПОКОЙ, КАМЕРА ОБСКУРА.

CHAMBRE CLAIRE, СВѢТЫЙ ПОКОЙ. Читатели найдутъ описаніе этихъ оптическихъ снарядовъ почти во всѣхъ курсахъ Оптики, а также въ языческихъ Лексиконахъ *Галера* и *Фишера*.

CHAMP D'UNE LUNETTE. (Опик.) **ПОЛЕ ТРУ-**

БЫ. Такъ называется круговое пространство, усаживаемое въ зрительную трубу сквозь стекла, ее составляющія. Поле трубы извѣстнаго угла, подъ которымъ бы несооруженный глазъ видѣлъ пространство, обнимаемое имъ при пособіи трубы.

*) *Mémoires de l'Académie des sciences*, T. IV et V.

CHANCE. (Исч. Вѣр.) **ВѢРОЯТНОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ, СЛУЧАЙ, РИСКЪ.** Смол. PROBABILITY.

CHANCES EGALLES. Равныя вѣроятности. **CHANCES INÉGALES;** неравныя вѣроятности. *Contre les chances, les hasards; рисковать, ставить на удачу. Parier a chances égales; закладъ держать съ равной вѣроятностію выигрыша и проигрыша, держать закладъ безобидно для обеихъ сторонъ. CHANCES FAVORABLES; благопріятные случаи. — Большая вѣроятность. **CHANCES DÉFAVORABLES.** Неблагопріятные, противные случаи — Меньшая вѣроятность. **CHANCES DE SUCCÈS;** благопріятствующія случаи, удача. *Il y a des chances pour, et une contre l'arrivée de cet événement; два случая благопріятствующихъ то событію, а одинъ не благопріятствующий.**

На Русскомъ языкѣ нѣтъ слова, которое выражало бы точно Французское *chance*; въ болыней части случаевъ мы должны прибѣгать къ русскимъ словамъ, иногда даже къ цѣлымъ словамъ, чтобы передать его значеніе, а это весьма неудобно, въ особенности же въ математическомъ языкѣ, котораго важнѣйшія достоинства безъ сомнѣнія составляютъ опредѣлительность и краткость. За неимѣніемъ покажемъ никакого перемѣны, въ математическомъ языкѣ, соотвѣствующаго Французскому *chance*, мы предлагаемъ новое слово *статогности* [отъ глагола *статся* (можесть)], выражающее, если не ошибаемся, довольно близко смыслъ, придаваемый Французскими математиками слову *chance*. Если послѣдствіемъ найдутъ болѣе удачный перемѣны, то мы откажемся отъ нашего, и примемъ съ благодарностію новый. И такъ, *chances égales, chances favorables, chances de succès*, мы переводимъ: равныя, благопріятныя, благопріятствующія статогности. *Parier a chances égales; держать закладъ при равныхъ статогностяхъ; les chances sont pour l'arrivée de cet événement; статогности на сторону этого событія, а прот.*

CHANGE. (Арн.) **ПЕРЕВОДЪ ДЕНЕГЪ.** Для избѣжанія вывоза денежныхъ суммъ, негодяины разныхъ Государствъ вознаграждаютъ взаимные долги оди другими, что приводитъ къ вычисленію, и точному цѣлю, по известному курсу ко-

неть, опредѣливъ сколько данная сумма, платимая въ одномъ торговомъ мѣстѣ, стоитъ въ другомъ. Если изъ одного мѣста сумма переводится непосредственно на другое, то для рѣшенія задачи достаточно употребить простое тройное правило. Если же желаемъ перевести известную сумму изъ одного Государства на другое чрезъ опредѣленные торговые мѣста, для которыхъ курсы монетъ въ отношеніи упомянутыхъ двухъ Государствъ известны, то употребляется сложное тройное правило, или такъ называемое *цѣльное* (*regle conjointe*). Для поясненія сказаннаго, положимъ, что пребудемъ перевести 10000 Французскихъ франковъ чрезъ Берлинъ на Русскіе рубли, зная, что 10 Франц. франковъ = 2,72 Прус. талеровъ, а 100 Прус. талер. = 326 рублямъ?

Чтобы рѣшить эту задачу, превращаемъ сперва 10000 франковъ въ талеры; для этого составляемъ пропорцію

$$10 \text{ ф.} : 2,72 \text{ т.} :: 10000 \text{ ф.} : x \text{ т.};$$

потомъ, x талеровъ переводимъ на рубли посредствомъ пропорціи

$$100 \text{ т.} : 326 \text{ р.} :: x : y.$$

Послѣдній членъ y будетъ означать искомое число рублей. Чтобы найти эту величину, перемножаемъ почленно обе пропорціи, и находимъ

$$1000 : 326 \times 2,72 :: 10000 \times x : y$$

или

$$1 : 886,72 :: 10 : y :: 8867,2 \text{ рублей.}$$

CHANGEMENT D'ORDRE. (Алг.) **ПЕРЕЛОЖЕНІЕ; ПЕРЕМѢЩЕНІЕ, ПЕРЕСТАНОВКА, ИЗМѢНЕНІЕ ПОРЯДКА.** Смол. ALTERNATION.

CHANGEMENT DE LA VARIABLE INDÉPENDANTE. **ИЗМѢНЕНІЕ ПЕРЕМѢННОЙ НЕЗАВИСИМОЙ.** Пусть будетъ уравненіе

$$y = f(x),$$

въ которомъ предполагаемъ перемѣнную x зависимою, наприкладъ, отъ измѣняемой t ; дифференцируя это уравненіе нѣсколько разъ сряду, получимъ формулы

$$dy = f'(x) dx$$

$$d^2y = f''(x) dx^2 + f'(x) d^2x$$

$$d^3y = f'''(x) dx^3 + 3f''(x) dx d^2x + f'(x) d^3x,$$

изъ которыхъ выводимъ

$$(A) \left\{ \begin{aligned} f'(x) &= \frac{dy}{dx} \\ f''(x) &= \frac{dx \frac{d^2y}{dx^2} - dy \frac{d^2x}{dx^2}}{dx^2} = \frac{1}{dx} d \left(\frac{dy}{dx} \right) \\ f'''(x) &= \frac{dx (dx \frac{d^3y}{dx^3} - dy \frac{d^3x}{dx^3}) - \frac{d^2x}{dx^2} (dx \frac{d^2y}{dx^2} - dy \frac{d^2x}{dx^2})}{dx^3} \\ &= \frac{1}{dx} d \left(\frac{dx \frac{d^2y}{dx^2} - dy \frac{d^2x}{dx^2}}{dx^2} \right) = \frac{1}{dx} d \left[\frac{1}{dx} d \left(\frac{dy}{dx} \right) \right] \end{aligned} \right.$$

Если бы желали теперь перейти к тому случаю, въ котором x принимается за переменную независимую, то въ предыдущих формулах стоило бы только положить dx постояннымъ, и следовательно $d^2x=0$, $d^3x=0$,... , чрезъ что уравн. (A) превращалось въ такіа:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}, \dots$$

Сравненіе сихъ послѣднихъ формулъ съ (A) показываетъ, что если послѣдовательныя производныя отъ функции $f(x)$ будутъ выражены посредствомъ дифференціаловъ переменныхъ x и $y=f(x)$, то одна только производная перваго порядка $f'(x)$ не измѣнится, будемъ ли принимать x за переменную зависимую, или независимую.

Если бы какое либо уравненіе, найденное въ предположеніи x независимаго, желали превратить въ такое, въ которомъ уже x разсматривается зависимымъ, то для полученія этого новаго уравненія, надлежало бы въ предложенномъ

на мѣсто $\frac{d^2y}{dx^2}$ подставивъ $\frac{dx \frac{d^3y}{dx^3} - dy \frac{d^3x}{dx^3}}{dx^2}$

на мѣсто $\frac{d^3y}{dx^3}$ подставивъ $\frac{dx (dx \frac{d^4y}{dx^4} - dy \frac{d^4x}{dx^4}) - \frac{d^2x}{dx^2} (dx \frac{d^3y}{dx^3} - dy \frac{d^3x}{dx^3})}{dx^3}$,

и такъ далѣе. Если отъ предположенія x независимаго желаетъ перейти къ предположенію y независимаго, то въ формулахъ (A) надобно положить $d^2x=0$, $d^3x=0$,... , следовательно

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ надобно замѣнить } -\frac{dy \frac{d^2x}{dx^2}}{dx^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} \dots\dots\dots -\frac{dy \frac{d^3x}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} \frac{d^2x}{dx^2}}{dx^2}$$

Употребленіе подобныхъ подстановокъ и называютъ въ дифференціальномъ Истисленіи *исключеніемъ переменной независимой*.

СНАРЕ. (Мех.) ГНѢЗДО, ПОДПЯТКА, ГЛАЗОКЪ. Такъ называется вообще отверстіе, дѣ-

лаемое въ деревѣ, въ желѣзѣ или въ чистѣ чугунокѣ, и въ которое входятъ свержень вала, оконечности оси блока, вѣсовъ, и проч. — *Обоймичугъ.* Металлическая или деревянная раздвоенная полоса съ двумя отверстіями, въ которыя входятъ своими оконечностями ось блока, шакль чистого блока, заключенныя между ними двумя полосами, можетъ свободно обращаться около своей оси. — Снаре или *chapel: d'une aiguille aimantée; маячка магнитной стрѣлки.* Пустая пуговка, принаенная къ средній магнитной стрѣлки для того, чтобы можно было ее наводить на острие, около котораго она обращается.

CHAPLETS. (Прим. Мех.) БЕЗКОНЕЧНЫЯ ЦѢПИ, ЧЕТКИ. Машина, употребляемая для опливанія воды. *Chapelets a godets, безконечныя цѣпи съ геральдами.*

CHARGE. (Мех.) ДАВЛЕНІЕ. — ГРУЗЪ. *Charge supportée par le point d'appui d'un levier; давленіе поддерживаемое, претерпѣваемое подпоркою точкою въ рычагѣ.*

CHARGER. ОБРЕМЕНЕНІЕ.

CHARNIÈRE. (Мех.) ШАРНЕРЪ, ШАЛНЕРЪ, СМЫКЪ, ЦЕТАЛ

CHASSE. (Мех.) РУЧКА, КРЮКЪ. Полоса, перпендикулярная къ коромыслу вѣсовъ, за которую держатъ ихъ когда вѣснмѣняютъ вѣсы.

CHASSER. (Алг.) ИСКЛЮЧАТЬ. См. ELIMINER.

CHAVIRER. (Мех.) ОПРОКИНУТЬСЯ. Говорится о пѣлахъ, погруженныхъ въ воду, когда нарушается ихъ равновѣсіе. *Quand le métacentre est au dessous du centre de gravité d'un corps flottant, et que l'on écarte ce dernier de sa position verticale, la pousée du fluide fera chavirer le corps; когда метacentръ ниже центра тяжести плавающего тѣла, то, отклонивъ сіе послѣднее отъ вертикальнаго положенія, котораго жидкости опрокинетъ тѣло.*

CHERCHÉE (QUANTITÉ). (Мат.) ИСКОМОЕ КОЛИЧЕСТВО. Величина, которую по условию предложенной задачи требуется определить.

CHERCHER. ИСКАТЬ, РАЗЫСКИВАТЬ. *Chercher la valeur d'une quantité, propre à vérifier une certaine condition; искать значенія количества, удовлетворяющаго известному условию. Chercher les racines d'une équation; искать, разыскивать корни урав-*

CHÉVILLE. СТЕРЖЕНЬ, БОЛТЪ, КОЛОКЪ.

Вообще деревянная или желѣзная жердочка, коей длина и толщина зависятъ отъ цѣли, съ которою ее употребляютъ. *Roue à chévilles, колесо съ стержнями*; колесо, по ободу котораго насажены въ нѣкоторомъ одна отъ другой разстояніи спицы, служащія вѣсто рукоятокъ для приведенія того колеса въ движеніе.

CHÉVRE. (Примк. Мех.) КОЗА. Машина, употребляемая для подъема болшихъ тяжестей, какъ то: артиллерійскихъ орудій, камней, бревенъ и проч. Она состоитъ изъ двухъ брусьевъ, иногда для прочности изъ трехъ, соединенныхъ между собою верхними концами, и имѣющихъ видъ треугольника или пирамиды. Брусья, для болшей надежности, скрѣпляются между собою посредствомъ перекладинъ. Въ вершинѣ треугольника привязывается простой блокъ, иногда же и система сложныхъ блоковъ. Къ одному концу веревки, проходящей чрезъ жолобъ блока, привязывается подвижной грузъ, а другимъ концомъ веревка привязывается къ валу горизонтальнаго вращенія, коего ось параллельна основанію треугольника, то есть, линіи, соединяющей нижніе концы двухъ брусьевъ. Гнѣзда, въ которыхъ обращаются шкивы вала, находящаяся на спицахъ, придаланныхъ къ брусьямъ. Вся машина удерживается въ надлежащемъ положеніи посредствомъ канатовъ, коихъ концы прикрѣплены къ неподвижнымъ точкамъ.

Воронъ приводится въ движеніе обыкновенными способами, именно, посредствомъ рычаговъ или колеса, съ насаженными на него шестернями.

CHIFFRE. (Ариф.) ЦИФРА, ЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЗНАКЪ. Смол. **CHARACTÈRE.**

CHIFFRER. СЧИТАТЬ. Глаголь употребляемый въ просторѣчій вѣсто: *вычислять*.

CHILIADÉ. (Ариф.) ТЫСЯЧА. *Calculer une, deux chiliades de logarithmes; вычислять, одну, две тысячи логарифмовъ.*

CHILIGONE. (Геом.) ТЫСЯЧЕУГОЛЬНИКЪ.

Плоская правильная фигура, изъ тысячи сторонъ и тысячи угловъ состоящая.

CHOC, COLLISION DES CORPS, PERCUSSION.

(Мех.) **СОУДАРЕНІЕ, СТОЛКНОВЕНІЕ ТѢЛЪ,**

УДАРЪ. Когда два или нѣсколько тѣлъ, движущихся съ какими нѣ велич. скоростями, встрѣ-

чаются такъ, что не могутъ продолжать своего движенія не проницая одинъ въ другія, то, въ слѣдствіе непроницаемости тѣлъ, движеніе ихъ отъ столкновенія претерпѣваетъ нѣкоторое измѣненіе, равное тому усилію, которое потребно для воспрепятствованія проницаемости. При такихъ обстоятельствахъ произойдетъ быстрая перемена въ скоростяхъ разсматриваемыхъ тѣлъ, и явленіе, о которомъ говоримъ, называется *соудареніемъ* или *ударомъ*.

Ударъ можетъ быть прямой и косвенный. Когда направленіе удара перпендикулярно въ точкѣ прикосновенія къ поверхностямъ соударящихся тѣлъ, и, сверхъ того, проходящій чрезъ ихъ общій центръ тяжести, то ударъ называется *прямымъ*. Если же эти два условія не выполнены оба въ одно время, то ударъ именуется *косвеннымъ*.

Разсмотримъ теперь нѣкоторые изъ простѣйшихъ явленій, сопровождающихъ соудареніе двухъ тѣлъ; для простоты положимъ, что они сферическія, и, сверхъ того, что они имѣютъ одинаковую плотность. И такъ, вообразимъ два однородныхъ шара, коихъ всѣ частицы движутся равнообразнымъ движеніемъ прямыми линіями, параллельными прямой, соединяющей ихъ центры; сіи послѣднія, очевидно, будутъ также и центрами тяжести сихъ шаровъ. Допустимъ что шары движутся одинъ на встрѣчу другому; слѣдовательно они встрѣтятся, и надобно опредѣлить обстоятельства, сопровождающія ихъ соудареніе. Мы разсмотримъ задачу въ двухъ крайнихъ случаяхъ, то есть, предполагая оба шары или одаренными совершенною упругостію, или совершенно лишенными сего свойства. Займемся сперва вторымъ случаемъ.

Въ самое мгновеніе встрѣчи, шары, въ слѣдствіе своей непроницаемости, должны слѣться, болѣе или менѣе, смотря на степень ихъ твердости. Во время сжатія, движеніе двухъ шаровъ будетъ весьма сложно, и опредѣленіе состоянія этого движенія, зависящее отъ анализа весьма труднаго, не можетъ быть предложено въ нашемъ Лексиконѣ. Но когда это насильственное состояніе прекратится, то всѣ частицы двухъ шаровъ начнутъ двигаться равнообразно, и вопросъ приведется къ опредѣленію скорости, общей всѣмъ частицамъ.

Заметим во первых, что движение их будет параллельно направлению первоначального движения, а во вторых, что в следствии начала сохранения движения центра тяжести, центр тяжести системы двух размашиваемых шаров будет иметь одну и ту же скорость до удара, во время удара, и после него. Чтобы удостовериться в том, что в настоящем случае начало, о котором говорить, имеет место, вспомним только, что внутренних силы, то есть, те, которые происходят от взаимного действия частиц системы, несколько не влияют на движение центра тяжести. Но, до удара, никакие силы, по предположению, не действовали на частицы размашиваемых шаров; следовательно их центр тяжести будет двигаться равномерно. Во время соударения, частицы будут возбуждаемы взаимными и отталкивающими взаимодействиями; но так как эти силы внутренние, то движение центра тяжести останется тем же самым, каким было до удара, и сохранится таковым же до конца удара, и после него.

Это начало не доставляет почти никаких сведений о том, что происходит во время удара, ибо тогда скорости различных частиц, различны; но оно достаточно для определения скорости системы после удара; и действительно, так как после удара скорости всех частиц одинаковы, то достаточно знать движение одной, какой ни есть частицы; но скорость центра тяжести известна, ибо она осталась та же, какою была до удара. И так, исконая скорость, общая всем частицам двух шаров после удара, равна скорости, которую имеет центр тяжести шаров до удара.

Пусть будут m и m' массы двух размашиваемых шаров; a и a' соответственные их скорости до удара; u и u' переменные расстояния их центров тяжести от постоянной точки, взятой на прямой, по которой движутся эти центры, и соответствующий времени t . Мы будем принимать почему величина a' должна быть принята с двойным знаком.

Изобразим чрез ξ расстояние, по истечении времени t , центра тяжести системы двух шаров от выбранной постоянной точки; найдем

$$\xi = \frac{mx + m'a'}{m + m'}.$$

Скорости центра тяжести будут $\frac{d\xi}{dt}$, почему и получим

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{m \frac{dx}{dt} + m' \frac{da'}{dt}}{m + m'}.$$

Но, до удара, $\frac{dx}{dt} = a$, $\frac{da'}{dt} = -a$; следовательно, скорости центра тяжести двух шаров до удара будут

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{ma \mp m'a'}{m + m'}.$$

Сверх того, так как мы видели выше, что эта скорость сохранится и после удара, то $\frac{ma \mp m'a'}{m + m'} = u$ изобразим скорость, общую всем частицам двух шаров после удара. Если шары идут один на встречу другому, и $ma > m'a'$, то шары будут удаляться от постоянной точки; когда $ma = m'a'$, то скорости обратятся в нуль, и следовательно движение прекратится с ударом; если же $ma < m'a'$, то система двух шаров после удара будет приближаться к постоянной точке.

Легко доказать, что при соударении двух шаров, совершенно неуружиз как мы здесь предполагали, теряется от удара некоторая часть живой силы. И в самом деле, заметим, что потерянная живая сила выражается разностью

$$ma^2 + m'a'^2 - (m + m') u^2;$$

если вычтем из нее количество

$$2u(ma \mp m'a' - mu - m'u),$$

которое, в следствие уравнения $u = \frac{ma \mp m'a'}{m + m'}$,

равно нулю, то эта разность не переменится, и мы получим

$$m(a^2 - 2au + u^2) + m'(u'^2 - 2a'u + a'^2) = m(a - u)^2 + m'(u' \mp a')^2;$$

следовательно

$$ma^2 + m'a'^2 - mu^2 - m'u'^2 = m(a - u)^2 + m'(u' \mp a')^2.$$

Эта формула выражает, что потеря, о которой говорим, будет равна сумме живых сил, относящихся к скоростям: $a - u$ и приобретенной и $u' \mp a'$ потерянной двумя шарами. Доказанное здесь предположение есть частный случай одной общей теоремы, которую предлагаем

Жарно. См.от. CARNOT (THEOREME DE).

Разсмотрим теперь что происходит при соударении двух упругих шаровъ. Здѣсь предполагается, что послѣ столкновения, шара сжимаются до некотораго предѣла, точно такъ, какъ и въ предыдущемъ случаѣ; но, когда сжатіе достигнетъ наибольшей степени, то шара начнутъ возстановляться, и ударъ должно считать прекратившимся не прежде, какъ когда шары получаютъ, въ строгомъ смыслѣ, потъ видъ, какой имѣли до удара. Съ этого мгновенія предполагается, что всѣ частицы обоихъ шаровъ принимаютъ одинаковыя скорости, но впрочемъ отличныя для каждаго изъ двухъ шаровъ.

Движеніе центра тяжести въ расширяемомъ теперь случаѣ, точно такъ какъ и при соудареніи неупругихъ тѣлъ, не подвергнется никакому измѣненію послѣ удара; и дѣйствительно, здѣсь какъ и прежде, частицы системы будутъ только подвержены дѣйствію внутреннихъ силъ. Но къ этому можно прибавить, что по причинѣ совершеннаго возстановленія шаровъ, частицы, изъ составляющихъ, примутъ послѣ удара тѣ же относительныя положенія, какія имѣли до удара; слѣдовательно, на основаніи *начала живыхъ силъ*, живая сила системы до удара, и послѣ удара, будутъ одинаковы. И такъ, изобразивъ чрезъ v и v' скорости двухъ шаровъ послѣ удара, и удержавъ прежнія знаменованія буквъ, получимъ уравненія

$$mv + m'v' = ma \pm m'a'$$

$$mv^2 + m'v'^2 = ma^2 \pm m'a'^2,$$

изъ коихъ первое выражаетъ правило сохраненія движенія центра тяжести, а второе, начало живыхъ силъ. Отсюда выводимъ

$$m(v^2 - a^2) = m'(a'^2 - v'^2)$$

$$m(v - a) = -m'(v' + a'),$$

или, раздѣливъ первое уравненіе на второе,

$$v + a = v' \pm a', \text{ или } v - v' = -a \pm a'.$$

Совокупленіе послѣдняго уравненія съ формулою

$$mv + m'v' = ma \pm m'a'$$

приведетъ къ слѣдующимъ значеніямъ для v и v' ;

$$v = \frac{(m-m')a \pm 2m'a'}{m+m'}$$

$$v' = \frac{2ma \mp (m-m')a'}{m+m'}.$$

Когда массы двухъ шаровъ равны между собою, то полагая $m = m'$, найдемъ $v = \pm a'$, $v' = a$; то

есть, шары, послѣ соударенія, обмѣняются своими скоростями. Представляемъ читателямъ разборъ другихъ частныхъ случаевъ, представляющихся при разсматриваніи соударенія двухъ упругихъ шаровъ; всѣ эти случаи рѣшаются посредствомъ вышеприведенныхъ двухъ формулъ.

Первая мысль о томъ, что соудареніе тѣлъ происходитъ по опредѣленнымъ законамъ, принадлежало какъ полагаютъ Декарту; но она не извлекъ изъ этой мысли той пользы, которую можно было ожидать, и даже ошибся въ болѣе части выводившихъ изъ законовъ. Впослѣдствіи Гуксъ, Вренъ и Валисъ предложили вышеприведенныя формулы, опредѣляющія скорости, послѣ удара, упругихъ и неупругихъ тѣлъ.

СНОИХ. (Неч. Ввр. ВЫБОРЫ. См. ELECTIONS.

СНОQUER. (Мех.) УДАРЯТЬ. *Se choquer; соудариться, сталкиваться.* Les corps après s'être choqués и проч. Тѣла послѣ удара и проч.

СНОРОВАТЬ. ХОРОВАТЬ. Деревянный уroveň бывшій въ употребленіи у древнихъ, и очень неудобный по своей величинѣ. Хоробашъ, какъ должно догадываться по весьма неполному описанію, оставленному Витрувиемъ (Architectura Lib. III), состоялъ изъ линейки, имѣющей до 20 футовъ въ длину, соединенной съ другою, такъ что весь снарядъ имѣлъ видъ буквы Т. Въ верхней части находился жолобъ, который наполнялся водою, по стоянію которой можно было судить, что верхняя линейка находилась въ положеніи горизонтально. Въ пинху по году употребляли янки съ свинцовыми гирьками, посредствомъ которыхъ приводили инструментъ въ надлежащее положеніе.

СНОРОГРАФИЯ. ХОРОГРАФИЯ, СТРАНО-

ОПИСАНІЕ. Описание какого либо Государства или страны. *Хороографическою картою* (carte chorographique) назывался карта, на которой изображено какое либо Государство, или отдѣльная область. Когда карта обнимаетъ большую часть земной поверхности, то она именуется *географическою*.

СНОSES. (Геом.) ЧАСТИ, ВЕЛИЧИНЫ. Когда въ Геометріи говорятъ о сторонахъ и углахъ треугольника, то часто употребляютъ на Французскомъ языкѣ слово *choses*. Следовательно, *choses* означаютъ въ одно время и стороны и углы

треугольника. Напримеръ: *De six choses dans un triangle il faut, en général, en connoître trois pour que le triangle soit complètement déterminé. Из шести величинъ, рассматриваемыхъ въ треугольнике вообще три определяютъ его.*

CHRONOLOGIE. ХРОНОЛОГИЯ. Отъ Греческ. *χρόνος, время, и λόγος, слово.* Наука, имѣющая предметомъ измѣреніе и раздѣленіе времени.

Хронологія раздѣляется на *теоретическую* и *прикладную*. Первая основана на астрономическихъ наблюденіяхъ и вычисленіяхъ. Вторая занимается опредѣленіемъ эпохъ различныхъ событий, ознаменовавшихъ политическую жизнь народовъ, и следовательно служитъ основаніемъ Исторіи. Числители могутъ почерпнуть нѣкоторыя свѣдѣнія о теоретической Хронологіи въ слѣдующихъ: ANNÉE, CALENDRIER, CYCLE, ÈRE, JOUR, MOIS, PERIODE, TEMPS и проч.

CHRONOMÈTRE или MONTRE MARINE. ХРОНОМЕТРЪ, МОРСКІЕ ЧАСЫ. Отъ Греческ.

χρόνος, время, и μέτρον, мѣра. Часы устроенные съ большаго тщаніемъ, и сохраняющіе равномерный ходъ въ продолженіи значительнаго времени. Самый легкій и удобный способъ опредѣленія долготы въ морѣ, основанъ на употребленіи хронометровъ. См. LONGITUDE.

Въ 1714 году, въ царствованіи Королевы Анны, Англійскій Парламентъ объявилъ законнымъ актомъ награду въ десять тысячъ фунтовъ стерлинговъ тому, кто, по приговору Комиссіи Долготы, представителствуемой тогда *Нотонами*, предложитъ способъ для опредѣленія долготы съ точностію, доведенной до одного градуса большаго круга; пятнадцать тысячъ, если точность будетъ просираться до двухъ третей градуса, и наконецъ, двадцать тысячъ фунтовъ стерлинговъ, когда погрѣшность не будетъ превышать половины градуса.

По прошествіи нѣсколькихъ лѣтъ, *Генрихъ Сюлли (Sully)*, Англійскій механикъ, поселившійся во Франціи, окончилъ морскіе часы, первые, устроенные по настоящимъ правиламъ искусства; ихъ испытывали въ 1726 году, но успѣхъ не соотвѣтствовалъ ожиданіямъ художника, и объявленная награда осталась не выданною.

Другой знаменитый Англійскій часовщикъ, *Гаррисонъ (Harrison)*, долго занимавшійся устройствомъ морскихъ часовъ, получилъ, за представленные

ихъ часы, въ 1749 году, отъ Лондонскаго Королевскаго Общества премію, назначенную за полезнѣйшее открытіе, сдѣланное въ продолженіи года. Въ 1761 и 1762 годахъ онъ представилъ Адмиралтейству другой хронометръ, который, во время сто сорока дней плаванія изъ Портсмута въ Ямайку и обратно, показалъ равность, равную одной минутѣ и 54 секундамъ. Въ другое путешествіе, изъ Лондона въ Барбаду, оказалась погрѣшность въ двѣ минуты 20 секундъ въ сто пятьдесятъ шесть дней. На основаніи результатовъ сихъ двухъ опытовъ и тщательнаго испытанія, которому подвергли хронометръ въ продолженіи 10 мѣсяцевъ на Гринвичской Обсерваторіи, Гаррисонъ стѣнилъ себя въ правѣ просить награды въ двадцать тысячъ фунтовъ стерлинговъ, обѣщанной въ 1714 году. Но ему выдали только половину этой суммы, сосланы на нѣкоторые недостатки его хронометра, и между прочимъ на то, что ходъ сего послѣдняго былъ подверженъ вѣянью температуры. Гаррисонъ усовершенствовалъ свой хронометръ, и какъ новые опыты, произведенные надъ нимъ, имѣли полный успѣхъ, то и другая половина награды была выдана художнику. Онъ умеръ въ 1770 году осмидесяти двухъ лѣтъ отъ роду.

Въ 1767 и 1769 годахъ Имперская Академія Наукъ предложила задачу о лучшемъ способѣ измѣренія времени въ морѣ. Награда была присуждена корскимъ часамъ *Петра Леруа (Leroi)*, испытаннымъ въ двухъ путешествіяхъ. Другой Французскій механикъ, *Фердинандъ Берту (Berthoud)*, современникъ Петра Леруа, также оспаривалъ устройство хронометровъ, которые вѣрностию не уступали морскимъ часамъ Леруа, и превосходили Гаррисоновы.

Нынѣ устройство хронометровъ доведено до высокой степени совершенства. Въ Англіи особенно отличаются въ этой дѣлѣ *Арнольдъ и Брокамбенъ*, въ Даніи *Кессельсъ*, а у насъ въ Россіи, *Лутцъ*, коего хронометры приобрѣли всеобщую извѣстность.

CHRONOMÈTRE (Акуст.) ХРОНОМЕТРЪ. Акустическій инструментъ посредствомъ котораго опредѣляютъ взаимныя отношенія звуковъ. Описаніе такого снаряда чашаполя найдешь въ *Principes d'Acoustique de M. Sauer, Sect. IV, стр. 19.*

CHRONOMÉTRIQUE. ХРОНОМЕТРИЧЕСКИЙ.

Относящийся къ хронометрамъ или ко времени. Резон *саваномитрике* (Мех.) Хронометрический безменъ. Такъ называлъ Г. Каньяр-Латуръ (*Cagniard-Latour*) изобретенный имъ снарядъ для измѣренія динамическихъ дѣйствій машинъ, находящихся въ движеніи. Устройства, которыми подвергается этотъ снарядъ, измѣряются числомъ качаній, совершаемыхъ въ извѣстное время хронометрическимъ маяшникомъ, утвержденныхъ къ безмену. Если становить послѣдовательно измѣнчивать къ пружинѣ безмена различныя грузы, и въ то же время наблюдать происходящія отъ того перемѣны въ ходѣ хронометра, то можно будетъ составить таблицу указаній хронометра, соответствующихъ различнымъ массамъ грузовъ. Когда же употребимъ хронометрический безменъ для опредѣленія динамическихъ дѣйствій машины, то, посредствомъ этой таблицы, легко будетъ судить о среднемъ усилии, которому снарядъ подвергался во время испытанія.

Г. Каньяр-Латуръ, въ Іюль, мѣсяцъ 1837 года, сообщилъ Парижской Академіи Наукъ, что онъ занимался усовершенствіемъ своего хронометрическаго безмена. Для дальнѣйшихъ свѣдѣній отсылаемъ читателей къ журналу: *L'Institut; Sciences Mathématiques, Physiques et Naturelles*; 5^{me} année, N° 214.

CHRONOSCOPE. Усп. сл. **ХРОНОСКОПЪ.** Оптический служащій для измѣренія времени. Смол. PENDULE.

CHUTE DES GRAVES. (Мех.) ПАДЕНІЕ ТЯЖЕЛЫХЪ ТѢЛЪ.

Опыты доказали, что при паденіи тяжелыхъ тѣлъ въ пустотѣ, пространство, ими переходимыя, пропорціональны квадратамъ времени, а следовательно приобретаемыя ими скорости прямо пропорціональны временамъ. Отсюда заключаемъ, что тяжелые есть сила ускорительная постоянная, почему движеніе падающихъ тяжелыхъ тѣлъ и называется *равномерно-ускореннымъ*, а движеніе тѣлъ, брошенныхъ вверхъ по вертикальному направленію, *равномерно-ускореннымъ*.

Пусть будетъ e пространство, переходимое падающимъ тѣломъ во время t , v скорости приобретаемая имъ по истеченіи того же времени, и g сила тяжести, то есть приращеніе, получаемое скоростью въ каждую единицу времени.

Такъ какъ $\frac{d^2e}{dt^2}$ изображаетъ ускорительную силу (Смол. **FORCE**), то получимъ

$$\frac{d^2e}{dt^2} = g,$$

откуда

$$\frac{de}{dt} = v = c + gt;$$

для опредѣленія постоянного количества c , положимъ, что тѣло было брошено съ начальною скоростью a ; следовательно, при $t = 0$, должно быть $v = a$, почему

$$(1) \quad v = a + gt.$$

Подставляя на мѣсто скорости v равную ей величину $\frac{de}{dt}$, и интегрируя, получаемъ

$$(2) \quad e = at + \frac{gt^2}{2}.$$

Мы не прибавляемъ постоянного количества къ энтону интегралу, ибо предполагаемъ, что при $t = 0$, будетъ также $e = 0$.

Принявъ $a = 0$, найдемъ

$$(3) \quad v = t \text{ и } e = \frac{gt^2}{2}.$$

откуда

$$v = \sqrt{2ge};$$

величина $\sqrt{2ge}$ называется *скоростію соответствующей высотѣ e (vitesse due à la hauteur)*.

Чтобы перейти къ уравненіямъ движенія равномерно ускореннаго замѣнимъ, что скорости тѣла, брошеннаго снизу вверхъ, будетъ уменьшаться въ каждую единицу времени на то же постоянное величину g , какою увеличивалась при ускоренномъ движеніи. Следовательно, спомни только въ формулахъ (1) и (2) замѣнить g въ $-g$. И такъ получимъ,

$$v = a - gt \text{ и } e = at - \frac{gt^2}{2}.$$

Эти два уравненія опредѣляютъ всѣ обстоятельства движенія равномерно ускореннаго. Если желаемъ опредѣлить высоту, до которой подымется тѣло, то изобразимъ ее чрезъ h , а чрезъ T время восхожденія, и замѣнивъ что тогда $v = 0$, получимъ

$$0 = a - gT \text{ и } h = aT - \frac{gT^2}{2},$$

откуда

$$T = \frac{a}{g}, \quad h = \frac{a^2}{2g}.$$

Достигнувъ высоты h , тѣло начнетъ падать, и движеніе его опредѣлится формулою (3). Достигнувъ точки, изъ которой тѣло было брошено, скорости его будетъ

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{a^2} = a;$$

отсюда заключаем, что если требуется чтобы тело, брошенное снизу вверх, достигло определенной высоты, то надобно сообщить ему начальную скорость, равную той, которую бы оно приобрело падая с указанной высоты.

Употребленная нами в предыдущих формулах величина g , определяется посредством различных опытов, и преимущественно помощью маятника. Отсылаем по сему предмету к статьям: GRAVITE, PENDULE.

Знаменитый Галилей, в концѣ XVI вѣка, первый открылъ истинные законы паденія тяжелыхъ тѣлъ. Бывъ ученикомъ, онъ уже возставалъ противъ тогдашняго ученія объ этомъ предметѣ, и, между прочимъ, противъ аксіомы допущенной въ то время всеми физиками, что скорости падающихъ тѣлъ пропорціональны въсамъ смѣхъ послѣднихъ. Чтобы доказать неосновательность такого мнѣнія на самомъ дѣлѣ, Галилей опускалъ тѣла весьма неравнаго вѣса съ выскокой колокольни; эти опыты, произведенные передъ многочисленными зрителями, показали очевиднымъ образомъ, что времена паденія различныхъ тѣлъ почти одинаковы, когда плотности ихъ мало разнятся между собою. Вслѣдствіи Галилей подтвердилъ этотъ законъ новыми опытами, произведенными надъ качаніями двухъ маятниковъ, равной длины, но вѣсовъ весьма различныхъ.

Для доказательства законовъ паденія тяжелыхъ тѣлъ, Галилей избралъ слѣдующій путь: предположивъ сперва, что скорости, въ равныя времена, получаютъ равныя приращенія, онъ разыскиваетъ потомъ, теоретически, слѣдствія проистекающія изъ этой гипотезы. Далѣе, прибѣгаетъ уже къ опытамъ надъ паденіемъ тяжелыхъ тѣлъ. Этими опытами онъ показываетъ, что тѣла, опускаясь на равныя вертикальныя высоты по длинѣ наклонной плоскости, или даже по какой нѣ есть кривой линіи, имѣютъ тѣ же скорости, какія бы они приобрѣли, падал по вертикальному направленію, и переходя тѣ же высоты. Отсюда легко вывести равенство отношеній между пространствами, переходимыми тѣломъ по наклоннымъ плоскостямъ и по вертикальному направленію.

На этомъ же основаніи Галилей производилъ еще слѣдующій опытъ: взявъ длинный деревянный

брусъ, и выдолбивъ въ немъ прямой жолобъ весьма гладкій, онъ опускалъ по немъ шарики, при чемъ давалъ приличное наклоненіе брусу, съ цѣлію уменьшить скорости движенія, и тѣмъ самымъ удобнѣе измѣрять какъ переходимое шарикомъ пространство, такъ и время, употребленное имъ на этотъ переходъ. Послѣднимъ результатомъ этихъ опытовъ было то слѣдствіе, что въ удвоенное время шарикъ переходилъ четверное пространство, въ утроенное время, девятикратное пространство и такъ далѣе, изъ чего Галилей заключалъ, что при паденіи тяжелыхъ тѣлъ, переходимыхъ пространства содержатся между собою какъ квадраты времени. Достигнувъ этого закона, теорія паденія тѣлъ уже не представляетъ болѣе никакихъ затрудненій, ибо, все оснѣнное въ ней есть необходимое слѣдствіе этой истинны. Смол, ATWOOD (MACHINE D'), также BALLISTIQUE.

СИ

СИЕЛ. (Астр.) **НЕБО.** Древніе астрономы допускали существованіе сплѣткихъ небесъ или сферъ, сколько замѣчали различныхъ движеній въ небесныхъ свѣтилахъ. И такъ, каждая изъ семи планетъ имѣла свое небо, именно: было небо для Луны, Меркурія, Венеры, Солнца, Марса, Юпитера и Сатурна. Восьмое небо, называемое или твердью (firmament), принадлежало неподвижнымъ звѣздамъ. Нѣкоторые думали, что эти небеса были твердыя, и именно кристалльныя, потому что свѣтъ проходилъ сквозь нихъ. Видъ ихъ былъ сферическій, и къ нимъ-но были прикрѣплены свѣтила, изъ которыхъ каждое двигалось вмѣстѣ съ своимъ небомъ.

Вслѣдствіи, по мѣрѣ того какъ стали замѣчать большее разнообразіе въ движеніяхъ небесныхъ тѣлъ, увеличилось и самое число небесъ. Альфонсъ, Король Кастильскій, прибавилъ къ прежнимъ осемь, два новыхъ; Едмондъ насчиталъ ихъ до двадцати трехъ; Каллиль доноскалъ тридцать; Региомонтанъ тридцать три; Аристотель сорокъ семь, и наконецъ Фракасторъ довелъ число небесъ до семидесяти.

Въ нынѣшней Астрономіи подъ словомъ небо или твердь разумѣютъ представляющуюся наблюдателю сферическій сводъ, называемый небеснымъ, и на вогнутой поверхности котораго, по видимому, находились всѣ звѣзды.

СИНΕΤΗΜΙΚΗ или CINÉMATIQUE. КИНЕМАТИКА.

КИНЕМАТИКА. Наука, занимающаяся законами движения, независимо отъ силъ, производящихъ сие движение; и такъ, Кинематика служитъ переходомъ отъ Геометріи къ Механикѣ.

CINQ. (Арив.) ПЯТЬ. **CINQUÈME;** пятая. *Un cinquième, deux cinquièmes, одна пятая, две пятыхъ.*

CIRCOPOLAIRES (ÉTOILES). (Астр.) ОКОЛОПОЛЮСНЫЯ ЗВѢЗДЫ.

Звѣзды, находящіяся по близости сѣвернаго полюса. Ближайшая изъ нихъ, называемая *полярною* (*la polaire*), находится въ созвѣздіи малой медвѣдицы, и составляетъ окочечность ея хвоста. Расстояние этой звѣзды отъ полюса равно $1^{\circ}38'$.

CIRCONFÉRENCE, PÉRIPHÉRIE. (Геом.) ОКРУЖНОСТЬ (КРУГА); см. **CERCLE.**

Иногда слово *окружность* употребляется и для означенія периметра какой нѣ есть кривой. — Задача объ опредѣленіи отношенія окружности къ диаметру, вѣдущая подъ наименованіемъ *квадратуры круга*, занимала геометровъ всѣхъ вѣковъ; для подробностейъ объ этой предметѣ, описываемъ читателей къ статьѣ **QUADRATURE DU CERCLE.** Отношеніе, о которомъ говоримъ, есть число трансцендентное, и следовательно оно не можетъ быть найдено иначе, какъ по приближенію. Приведемъ здѣсь нѣкоторые изъ извѣстнѣйшихъ приближенныхъ отношеній. *Архимедъ*, чрезъ сравненіе периметровъ двухъ 96-угольниковъ, одного вписаннаго въ кругъ, а другаго описаннаго около него, нашелъ, что приближенное отношеніе окружности къ диаметру изображается дробью $\frac{22}{7}$.

Другое, болѣе точное, но менѣе удобное содержаніе, есть: $\frac{355}{113}$.

Адрианъ Мецій нашелъ отношеніе $\frac{355}{113}$, которое вѣрно до десяти-милліонныхъ частей радіуса. Это содержаніе, во многихъ случаяхъ достаточное по своей точности, вѣнчанъ еще и тѣмъ преимущественно, что числа, изъ которыхъ оно составлено, легко удерживаются въ памяти. Дѣйствительно, написавъ къ ряду знаменателя и числителя, находимъ: 113555; а это число состоитъ изъ трехъ первыхъ нечетныхъ чиселъ, повторенныхъ каждое два раза.

Съ открытіемъ Ичисления Безконечныхъ самими собою представлялись способы несоразлично удобнѣйшіе для опредѣленія отношенія окружности къ диаметру. *Ланги* (*Lagny*) вычислялъ это отношеніе до 127 десятичныхъ. Въ Рашкинской Библіотекѣ, въ Оксфордѣ, есть рукопись, въ которой вычисленіе это доведено до 154 десятичныхъ цифръ; принимая радіусъ круга за 1, полуокружность, по этой рукописи, выражается числомъ:

3,14159	26535	89793	23846	26435
83279	50288	41971	69399	37510
58209	74944	59250	78164	06286
20899	86280	54823	34211	70679
82148	08651	52823	06647	09384
46095	50582	37172	53594	08128
4802			

Замѣтимъ, что если приближенное до 7 десятичныхъ цифръ отношеніе $3,1415926 = \frac{51415926}{10000000}$ разложимъ въ непрерывную дробь, то получимъ слѣдующій рядъ сходящихся дробей:

$$\frac{3}{1} + \frac{22}{7} + \frac{855}{106} + \frac{555}{113} + \dots$$

вторая дробь изображаетъ отношеніе, найденное *Архимедомъ*, а четвертая, *Меціемъ*.

Одинъ изъ простѣйшихъ способовъ для опредѣленія приближенной величины окружности, состояющій въ разложеніи въ рядъ дуги въ функціи ея тангенса. Пусть будетъ y дуга, а x ея тангенсъ; получимъ

$$y = \text{tang} y \text{ или } y = \text{arctang} x.$$

Дифференцируя первое уравненіе, найдемъ

$$dx = \frac{dy}{\cos^2 y}; \text{ отсюда } dy = \cos^2 y \cdot dx;$$

но $\cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$; следовательно

$$dy = \frac{dx}{1 + x^2} \text{ и } y = \int \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Разлагая, чрезъ простое дѣленіе, функцію $\frac{1}{1 + x^2}$ въ безконечный рядъ, получимъ

$$y = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots) dx = \int dx - \int x^2 dx + \int x^4 dx - \int x^6 dx + \dots$$

Производя интегрированія, находимъ

$$(1) \quad y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{и пр.}$$

мы не прибавляемъ къ интегралу постояннаго количества, ибо ищемъ наименьшую дугу y , коей тангенсъ $= x$, а при $x = 0$, въ этомъ предположеніи, будетъ также $y = 0$.

важкою движенье и скорость тѣла, обращающагося около одной точки. Смот. ROTATION.

CIRCULER. (Мех.) Уст. слово. **ОБРАЩАТЬСЯ, ВРАЩАТЬСЯ.** Собственно изображаетъ круговое движенье; однакоже подъ сими словами разумѣютъ и всякое другое криволинейное движенье, напримеръ, эллиптическое движенье планетъ около солнца. Вообще сими глаголами выражаютъ всякое движенье, происходящее по *свободной кривой линіи*.

CISSOIDE. (Геом.) **ЦИССОНДА.** Кривая, изображенная Греческимъ геометромъ *Диокломъ* (жившимъ въ V столѣтіи по Р. Х.), почему она и называется обыкновенно *Диокловою циссоидою* (*cissoïde de Dioclès*).

Начертимъ кругъ *ANBI* (черт. 3 Листъ IV), и изъ конца *B* діаметра *AB* возведемъ перпендикуляръ *BD*, который продолжимъ неопредѣленно въ обѣ стороны; потомъ, изъ точки *A* проведемъ подъ произвольнымъ угломъ съ *AB* линію *AD*, и отъ точки *D* опустимъ линію *DM* \perp *AN*. Точка *M* будетъ принадлежать *циссоидѣ*. Для вывода уравненія этой кривой, пусть будетъ *a* радіусъ круга производящаго; изъ точки *M* опустимъ на діаметръ *AB* перпендикуляръ *MP*, и положимъ *AP* = *x*, *PM* = *y*, относимъ кривую къ прямоугольнымъ осямъ *AX*, *AY*; опустимъ также изъ точки *N* перпендикуляръ *Nh*, а изъ *M* проведемъ линію *MQ*, параллельную *AB*. Треугольники *ANh*, *MDQ* будутъ равны, ибо *AN* = *MD*; следовательно *Ah* = *MQ* = *PB*, или *Ah* = *PB* = *2a* - *x*; изъ подобія двухъ треугольниковъ *ANh* и *AMP* выводимъ $\frac{MP}{AP} = \frac{Nh}{Ah}$; но такъ какъ *Nh* есть ордината круга, то и найдемъ $Nh = \sqrt{Ah \times hB} = \sqrt{(2a - x)x}$; подставляя въ уравненіе $\frac{MP}{AP} = \frac{Nh}{Ah}$ вмѣсто линій *MP*, *AP*, *Nh* и *Ah* равныя имъ величины, найдемъ

$$y = \frac{\sqrt{(2a - x)x}}{2a - x};$$

возвышая въ квадраты получимъ по сокращеніи

$$y^2 = \frac{x^2}{2a - x}.$$

Вотъ уравненіе циссоиды, описанной къ прямоугольнымъ координатнымъ осямъ *AX*, *AY*. Разборъ этого уравненія покажетъ, что циссоида состоитъ изъ двухъ равныхъ ветвей *AMN* и *AIK*, выходящихъ каждая свою асимптоту, пер-

пендикуляръ *BD*, а вторую, перпендикуляръ *BE*; эти двѣ ветви образуютъ въ началѣ координатъ *A* точку возврата.

Посредствомъ Интегрального Ичисленія не трудно доказать, что асимптотическое пространство, то есть площадь, заключающаяся между двумя безконечными ветвями *KIA*, *ANH* и неопредѣленною прямою *EBD*, равна утроенной площади круга производящаго *ANBI*. Изобразимъ исконую площадь чрезъ *u*; получимъ (Смот. AIRE)

$$u = 2 \int y dx = 2 \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Ибо, для циссоиды, $y = \frac{x^2}{\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{x^3}{\sqrt{2ax - x^2}}$. Мы

умножили предыдущій интегралъ на 2 для того, чтобы получить полное асимптотическое пространство, состоящее изъ двухъ равныхъ площадей, одной, находящейся надъ діаметромъ *AB*, и другой, подъ нимъ; ибо, очевидно, что эти площади равны между собою, и что каждая изъ нихъ = $\int y dx$. Возьмъ предыдущій интегралъ между предѣлами 0 и *2a*, найдемъ полную асимптотическую площадь; и такъ

$$u = 2 \int_0^{2a} \frac{x^2 dx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Опредѣливъ этотъ интегралъ по обыкновеннымъ правиламъ [См. BINOMES (DIFFÉRENTIELLES)] получимъ, какъ сказано было выше, $u = 3\pi a^2$.

Древніе геометры употребляли циссоиду для нахождения двухъ среднихъ пропорціональныхъ между данными двумя линіями. Вотъ какимъ образомъ эта задача рѣшается посредствомъ циссоиды:

Пусть будутъ *a* и *b* линіи, между которыми ищемъ двѣ среднія пропорціональныя, и положимъ, что *a* > *b*. Строимъ циссоиду *HMAIK* (черт. 3 Листъ IV), принимая *a* за радіусъ круга производящаго. Очевидно, что если изъ центра *C* возведемъ перпендикуляръ *CR*, и продолжимъ его до встрѣчи съ окружностію, то точка *R* будетъ принадлежать и циссоидѣ по свойству этой кривой; теперь, отъ точки *C* по линіи *CR* = *a*, откладываемъ часть *Ck* = *b*, и проводимъ прямую чрезъ *B* и *k* до встрѣчи съ циссоидою въ точкѣ *m*; соединимъ точки *A* и *m* прямою, которую продолжимъ до встрѣчи съ радіусомъ *CR*, то есть, до *a*. Линія *Cl* есть одна изъ исконыхъ двухъ среднихъ пропорціональныхъ, да опредѣ-

лени другой, спомня только изъ точки л воз-
ставивъ перпендикуляръ pq къ линіи Al , и часпъ
 Cq будетъ другая средняя пропорціональная.

Чтобы доказать это строеніе, найдемъ вели-
чину линіи Cl . Уравненіе прямой Bm , оппесен-
ной къ тѣмъ же осямъ AX , AY , опредѣляется
условіями, что эта прямая проходитъ чрезъ
точки k и B , коихъ координаты суть соотвѣст-
ственно (a, b) и $(2a, 0)$; следовательно, изобрази-
въ чрезъ X и Y переменныя координаты этой
прямой, уравненіе ея будетъ

$$Y = \frac{b}{a}(2a - X).$$

Для опредѣленія координатъ точки m , спомня
только положивъ $Y = y$, $X = x$, разумя подъ x
и y координаты циссоиды; следовательно

$$y = \frac{b}{a}(2a - x);$$

но, съ другой стороны,

$$y^2 = \frac{a^2}{2a - x},$$

почему и будетъ

$$\frac{b^2}{a^2}(2a - x)^2 = \frac{a^2}{2a - x}$$

откуда

$$x = \frac{2a}{1 + \sqrt{\frac{a^2}{b^2}}},$$

и следовательно

$$y = \frac{2b\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}}{1 + \sqrt{\frac{a^2}{b^2}}}.$$

Теперь ищемъ уравненіе прямой Al по усло-
віямъ, что она должна проходитьъ чрезъ начало
координатъ A и чрезъ точку m , коихъ координаты
суть

$$Aa = \frac{2a}{1 + \sqrt{\frac{a^2}{b^2}}}, \quad am = \frac{2b\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}}{1 + \sqrt{\frac{a^2}{b^2}}}.$$

Изобразивъ чрезъ X и Y переменныя координаты
разсматриваемой прямой, найдемъ

$$Y = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} \cdot X.$$

Для полученія даннаго Cl , спомня только поло-
живъ $X = AC$ даннаго a , и тогда получимъ $Y = Cl$;
следовательно

$$Cl = b\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt[3]{a^2b}.$$

Вотъ одна изъ исконыхъ двухъ среднихъ про-
порціональныхъ; другая, какъ сказано выше, бу-

детъ линія Cq , равная $\sqrt[3]{ab^2}$; и действительно
имѣемъ

$$a : \sqrt[3]{a^2b} :: \sqrt[3]{a^2b} : \sqrt[3]{ab^2} \\ \sqrt[3]{a^2b} : \sqrt[3]{ab^2} :: \sqrt[3]{ab^2} : b.$$

Если положимъ $b = \frac{1}{2}a$, то $Cq = \sqrt[3]{\frac{1}{2}a^3} = \sqrt[3]{2(\frac{1}{2}a)^3}$,
а это показываетъ, что Cq будетъ стороною
такого куба, коего объемъ вдвое болѣе противъ
объема $(\frac{1}{2}a)^3$ другого, даннаго куба; эта задача
известна подъ наименованіемъ задачи объ удвое-
ніи куба, и она рѣшается, какъ мы сей-часъ
показали, весьма просто посредствомъ циссоиды.
См. DUPLICATION DU CUBE.

Между многими математиками, занимавшимися
ислѣдованіями свойствъ циссоиды, назовемъ Ню-
тона, который предложилъ черченіе этой кри-
вой, посредствомъ непрерывнаго движенія. Чи-
стопеки найдутъ эпюту графическій способъ въ
Histoire des Mathématiques, par I. F. Montucla, Nouvelle
édition, Paris, an VII, Tome 1. стр. 540.

**CLAIR-OBSCUR. ТѢМО-СВѢТЪ, ПРОЗРАЧНО-
ТЕМНОЕ.** См. PERSPECTIVE AÉRIENNE.

CLAPET. (Прикл. Мех.) **ЗАХЛОПКА.** Небольшой
клапанъ утвержденный на шарнерѣ, и употре-
бляемый иногда въ насосахъ. *Захлопка* состоитъ
вообще изъ кожанаго кружка, покрышаго сверху
металлическою круглою бляшкою; иногда же
эпюту кружокъ помѣщается между двумя бляж-
ками, и иногда верхняя дѣлается болѣе нижней.
Вода, давленіемъ своимъ, попеременно то откры-
ваетъ то закрываетъ захопку, свободно обра-
щающуюся около своего шарнера. См. SOUPAPE.

CLASSES. КЛАССЫ, РАЗРЯДЫ. Этими словами
въ Математикѣ выражаются вообще порядокъ, по
которому распределяются какія либо величины,
какъ то: означенныя количества, линіи, по-
верхности и проч. *Infinitement petits de la 1^{re}, 2^{de}, 3^{de}, classe; безконечно малыя величины 1^{го}, 2^{го}, 3^{го}, класса.* См. INFINIMENT PETIT.

CLEF D'UNE VOUTE. (Разр. Камн.) **КЛЮЧЪ,
ЗАМОКЪ, ЗАМОЧНЫЙ КАМЕНЬ.** Верхній
камень свода.

CLEPSIDRE или **HORLOGE D'EAU.** (Мех.) **ВО-
ДЯНЫЕ ЧАСЫ, КЛЕПСИДРА.** Отъ Греческ.
κλεπταιν, прятать, скрывать, и водор, вода. Часы
бывшіе въ употребленіи у древнихъ. Клепсидру

существенно составляла сосудъ, изъ котораго вытекала вода, и количество вытекшей воды измѣряло время. На корабляхъ еще и теперь употребляютъ *песочные часы* или *сткланки* (*sablères, horloges de sable*), основанные на одномъ началѣ съ водяными часами.

Клепсидры, какъ думаютъ, были изобрѣтены въ Египтѣ во время владычества Птоломеевъ. Въ Римѣ онѣ введены въ употребленіе *Сципиолемъ Назикомъ* жившимъ за 200 лѣтъ до Р. Х.

Древніе, запѣяливыи устроеныи клепсидры, нерѣдко выражали мысли философическія, или поэтическія; такъ напримѣръ въ клепсидрѣ *Ктесибія* (*Ctesibius*), механика Александрійскаго, жившаго за 150 лѣтъ до Р. Х., изображены два младенца, и у одного изъ нихъ, вода, въ видѣ слезъ, каплетъ изъ глазъ; онъ, какъ бы оплакиваетъ скоротечность времени, между тѣмъ какъ другой младенецъ, указываетъ жезломъ на часы дня. Въ той же клепсидрѣ вытекающая вода приводитъ въ движеніе механизмъ, посредствомъ котораго стрѣлка показывается на раздѣленномъ кругѣ мѣсяцъ и число въ продолженіи тѣлаго года. Другія подробности объ этомъ предметѣ, читатели могутъ почерпнуть въ книгѣ: *Dictionnaire universel de Mathématique et de Physique*, par *Samuel de la Hire*, 1755. Объ водяныхъ часахъ, писали между прочими сѣдующіе авторы: *Ватрупей, Перро (Perrault), Кирхеръ, Шотъ, Вариньонъ, Ниванъ и Даніилъ Бернулли*.

Главная задача, относящаяся къ устроению клепсидры, состоятъ въ опредѣленіи выдѣ сосуда, въ которомъ пониженіе воды въ равныя времена было бы одинаково. Если допустить, что скорость воды, вытекающей вертикально сверху внизъ изъ весьма малаго отверстія, находящагося въ сосудѣ, равна скорости, которую бы тѣло приобрѣло свободно падая въ пустотѣ съ высоты уровня воды надъ сиемъ отверстіемъ, то легко будетъ рѣшить упомянутую задачу. См. *HYDRODYNAMIQUE, PARALLÉLISME DES TRANCHES (HYPOTHÈSE DU)*.

Дѣйствительно, пусть будетъ h первоначальная высота уровня воды въ сосудѣ надъ отверстіемъ, z пониженіе воды по истеченіи времени t , и v ея скорости, которая, по условію вопроса, должна быть постоянная; $h - z$ изобразить высоту воды надъ отверстіемъ, соотвѣствующую

ую времени t , а $\sqrt{2g(h-z)}$, въ слѣдствіе сдѣланнаго выше, будетъ означать скорость вытекающей изъ отверстія воды. Если изобразить чрезъ Ω площадь горизонтальнаго сѣченія сосуда при высотѣ $h - z$ отъ отверстія, а чрезъ ω площадь сего послѣдняго, то получимъ

$$\Omega a = \omega \sqrt{2g(h-z)},$$

ибо, очевидно, что по причинѣ несжимаемости воды, скорости ея, при двухъ различныхъ горизонтальныхъ сѣченіяхъ сосуда, должны быть въ обратномъ отношеніи площадей сихъ сѣченій.

Замѣтимъ, что отношеніе между Ω и z совершенно произвольное. И такъ, предположимъ что сосудъ имѣетъ симметричскій видъ относительно вертикальной оси z , и вѣствъ $\Omega = f(x)$, гдѣ подъ x разумѣемъ горизонтальную абсциссу, получающій уравненіе

$$af(x) = \omega \sqrt{2g(h-z)},$$

принадлежащее вертикальному сѣченію.

Напримѣръ, если желаемъ чтобъ горизонтальныя сѣченія сосуда были прямоугольными, то возьмемъ $\Omega = lx = f(x)$ разумя подъ l постоянную длину. Вертикальное сѣченіе опредѣлится уравненіемъ

$$alx = \omega \sqrt{2g(h-z)} \text{ или } x^2 = \frac{2g\omega^2}{a^2l^2} (h-z),$$

которое очевидно принадлежитъ обыкновенной параболѣ, имѣющей свою вершину при отверстіи сосуда.

CLIMAT. (Геогр.) КЛИМАТЪ. Древніе раздѣляли земную поверхность на климаты, то есть на поля, кругами, параллельными экватору, такъ, что должный день въ лѣтнее солнцестояніе при параллели, ограничивающей одинъ полюсъ, разнился отъ должнаго дня въ осеннемъ съ мѣсяцъ, постояннымъ промежуткомъ времени. Когда примемъ этотъ промежутокъ равнымъ полчаса, то отъ экватора до полярнаго круга получимъ 24 климата; въ первомъ изъ нихъ, счисляя отъ экватора, должный день будетъ 12½ час., во второмъ 15 ч., въ третьемъ 15½ ч. и такъ далѣе до полярнаго круга, при которомъ должный день разевъ 24 часахъ. Эти 24 климата назывались *часовыми* (*climats d'heures*). Далѣе, пространство отъ полярнаго круга до самаго полюса раздѣляли на 6 климатовъ, именувемыхъ *лѣсными* (*climats de mois*) поному, что

равность между должайшими днями в двух смежных климатах составляла целый месяц, и у полюса, как известно, должайший день равен шести месяцам. Это разделение относится как к северному, так и к южному полушарию, и следовательно вся земная поверхность разделена таким образом на 60 климатов. Впрочем, должно замечать, что древние географы, считали только 7 северных климатов, которые называли именами примечательнейших мест, в них находящихся. Впоследствии, *Птоломей* прибавил еще 7 климатов, также северных; в позднейшие уже времена сделано то разделение, которое приведено выше. Климаты в древней Географии имели то же назначение, какое мы имеем широты при определении положения мест.

СО.

CO-AMPLITUDE. См. **AMPLITUDE.**

COAPPLIQUÉES. (Геом.) Усп. слово. **КООРДИНАТЫ, СОПРЯЖЕННЫЕ.** Абсцисса и ордината разсмотренных мест. См. **ABSCISSE, ORDONNEE, COORDONNEES.**

COCHLEA. (Мех.) **ВНУТЪ, ЩУРУПЪ.** См. **VIS.**

COECI (REGULA). (Теор. Чис.) Латинское название правила для решения совокупных неопределенных уравнений первой степени. Напротивъ, следующий вопрос относится к сему правилу:

Найти три числа положительных числа такого свойства, что если первое из них помножить на 2, второе на 5, а третье на 4, то сумма произведений будет равна 71; а если первое умножим на 5, второе на 10, третье на 7, то эта сумма = 165?

Изобразив чрез x, y, z искомыя три числа, получимъ следующие два уравненія:

$$(1) \quad \begin{cases} 2x + 5y + 4z = 71 \\ 5x + 10y + 7z = 165. \end{cases}$$

Исключая изъ нихъ y , найдемъ

$$(2) \quad 5x + 19z = 215.$$

Общая решенія этого неопределеннаго уравненія будутъ:

$$z = 4 \times 215 - 19K$$

$$z = -215 + 5K,$$

гдѣ K изображаетъ цѣлое положительное число. См. *Орешеніи неопределенныхъ уравненій первой степени въ слѣдствіе:* **CONTINUE (FRACTION).**

Но такъ какъ x и z должны быть положительными числами, то

$$4 \times 215 - 19K > 0$$

$$-215 + 5K > 0,$$

откуда $K =$ или < 45 , и $K =$ или > 43 ; следовательно $K = 43, 44$ и 45 , что доставляетъ для x и z три системы величинъ

$$x = 43, \quad z = 0,$$

$$x = 24, \quad z = 5,$$

$$x = 5, \quad z = 10,$$

которыя, въ силу уравн. (1), будутъ соотвѣстствовать слѣдующія величины y :

$$y = -\frac{25}{5},$$

$$y = 1,$$

$$y = 7,$$

Но такъ какъ первая изъ этихъ величинъ дробная, и сверхъ того отрицательная, то остаются только два рѣшенія предложенныхъ уравненій (1), именно:

$$1-ое \quad x = 24, \quad y = 1, \quad z = 5;$$

$$2-ое \quad x = 5, \quad y = 7, \quad z = 10.$$

Сего примѣра достаточно, чтобы усмотрѣть, какимъ образомъ должно будетъ поступать при болѣебольшемъ числѣ уравненій и неизвѣстныхъ.

COEFFICIENT. (Алг.) **КОЭФФИЦИЕНТЪ, СОМНОЖИТЕЛЬ, ПРЕДСТОЯЩЕЕ, ПРИЧЛЕНЪ.** Такъ называется въ Алгебрѣ число или постоянное количество, на которое помножена неизвѣстная или переменная величина, или еще, некоторая функция той или другой. Напримѣръ, въ выраженіяхъ $5x, -7a^2x^3, \frac{1}{2-5} \sin x$, 5 есть коэффициентъ количества x , $-7a^2$ коэффициентъ x^3 , $\frac{1}{2-5}$ коэффициентъ $\sin x$. *Coefficient d'une quantité; коэффициентъ количества, у количества.*

Méthode des coefficients indéterminés. Способъ неопределенныхъ коэффициентовъ. Способъ, придуманный Декартомъ, и употребляемый иногда съ выгодой въ различныхъ теоріяхъ, какъ то: въ разложеніи функций въ ряды, въ теоріи уравненій, въ Интегральномъ Ичисленіи и проч. Для объясненія сего способа, пусть будетъ уравненіе $F(x, y) = 0$, изъ котораго желаемъ опредѣлить величину y посредствомъ x . Положимъ, что, какою либо образомъ мы нашли, что y можетъ быть выражена рядомъ $a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$, въ которомъ

коэффициенты a, b, c, d, \dots независимы. Подставляя свою величину для y в уравнение $F(x, y) = 0$, и положив, что оно после подстановления обращается в следующее:

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots = 0,$$

где A, B, C, D, \dots составлены из неопределенных коэффициентов a, b, c, d, \dots и чисел известных, входящих в $F(x, y)$.

Так как уравнение $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots = 0$ должно быть тождественное, т. е. должно иметь место для всяких возможных значений величины x , то очевидно будем $A = 0, B = 0, C = 0, D = 0, \dots$ Смол. IDENTIQUE. Из сих уравнений, коих число будет вообще равняться числу неопределенных коэффициентов, выведем неизвестные a, b, c, d, \dots и подставляя найденным образом их величины в уравнение $+bx + cx^2 + dx^3 + \dots$, получим y в функции.

Для ясности, приложим сказанное о с неопределенных коэффициентов к примеру.

Положим, что требуется разложить показательное количество a^x в ряд по целым положительным степеням переменной x . Пусть будет

$$(1) a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \dots$$

где A, B, C, D, \dots изображают неопределенные коэффициенты, зависящие от x ; что касается до постоянного члена в разложении, то он очевидно будет равняться 1, ибо, при $x = 0$, функция a^x обращается в единицу. Теперь, для определения величин A, B, C, D, \dots мы должны выразить зависящее от x показательное свойство показательного количества a^x ; простейшее выражение этого свойства заключается в уравнении $a^x \times a^y = a^{x+y}$, или $\frac{a^y}{a^x} = a^{y-x}$, разумея под y совершенно произвольную величину. Но так как

$$a^y = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \dots$$

то и получим вычитая из этого уравнения формулу (1),

$$a^y - a^x = a^x(a^{y-x} - 1) = A(y - x) + B(y^2 - x^2) + C(y^3 - x^3) + D(y^4 - x^4) + \dots$$

С другой стороны имеем

$$a^{y-x} = 1 + A(y-x) + B(y-x)^2 + C(y-x)^3 + \dots,$$

следовательно

$$a^x[A(y-x) + B(y-x)^2 + C(y-x)^3 + \dots] = A(y-x) + B(y^2 - x^2) + C(y^3 - x^3) + D(y^4 - x^4) + \dots$$

и сокращая на $y - x$

$$a^x[A + B(y-x) + C(y-x)^2 + \dots] = A + B(y-x) + C(y^2 - x^2) + D(y^3 - x^3) + \dots$$

Положив $y = x$, и записав a^x разложение (1), найдем

$$A + A^2x + ABx^2 + ACx^3 + \dots = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \dots$$

Так как это уравнение должно быть тождественно по причине что x совершенно произвольная величина, то и получим

$$A = A, A^2 = 2B, AB = 3C, AC = 4D, \dots$$

и следовательно

$$A = A, B = \frac{A^2}{2}, C = \frac{A^3}{3 \cdot 2}, D = \frac{A^4}{4 \cdot 3 \cdot 2}, \dots$$

Подставляя эти величины в формулу (1), найдемся

$$a^x = 1 + \frac{Ax}{1} + \frac{A^2x^2}{1 \cdot 2} + \frac{A^3x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{A^4x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

Для определения величины A , положим $Ax = 1$ или $x = \frac{1}{A}$; получим

$$a^{\frac{1}{A}} = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots;$$

означив чрез e сумму ряда $1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$ который есть не иное что, как основание Неперовой системы логарифмов (Смол. LOGARITHME), найдем

$$a^{\frac{1}{A}} = e, \text{ откуда } A = \log a,$$

разумя под знаком \log . Неперов логарифм. И так

$$a^x = 1 + \frac{\log a \cdot x}{1} + \frac{\log^2 a \cdot x^2}{1 \cdot 2} + \frac{\log^3 a \cdot x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\log^4 a \cdot x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

Замышляя, что способ неопределенных коэффициентов не всегда может привести к предполагаемому разложению. Вообще он должен быть употребляем с большою осмотрительностью, ибо нередко случается, что ряды, к которым он приводится, бывают расходящиеся. Смол. SERIE, CONVERGENCE D'UNE SERIE. **КОЭФФИЦИЕНТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ** (Диф. Коэф.). **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ, СОМНОЖИТЕЛЬ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ОТНОШЕНИЕ.** Дифференциальный коэффициент функции $y = f(x)$ называется коэффициентом, находящийся у первой степени выражения h в

разложенной функции $f(x + h)$. И такъ, если положить:

$$f(x + h) = f(x) + rh + q \frac{h^2}{1.2} + r \frac{h^3}{1.2.3} + \dots,$$

то p изображает дифференциальный коэффициент функции y ; q называется дифференциальным коэффициентом второго порядка, r дифференциальным коэффициентом третьего порядка и такъ далѣе. Дифференциальные коэффициенты и производимыя функций одно и то же. Смол. DÉRIVÉE, DIFFÉRENTIEL.

COEFFICIENT. (Физ.) КОЭФФИЦИЕНТЪ. Такъ называется въ Физикѣ численная величина, входящая въ аналитическую формулу, выражающую законъ какого либо явленія. Коэффициенты, о которыхъ говоримъ, опредѣляются обыкновенно изъ опытовъ. Числами могутъ быть и тому примѣры во многихъ статьяхъ сего Лексикона, между прочимъ въ словѣ: BAROMÉTRIQUE (FORMULE).

COERCIBLE. СЖИМАЕМЫЙ.

COERCIBILITÉ (Физ.) СЖИМАЕМОСТЬ. Смол. IMPRÉNETRABILITÉ.

СЕРД. (Геои.) СЕРДЦЕОБРАЗНОЕ ТѢЛО. Такъ назвала нѣкоторые математики, между прочимъ Вариньонъ (*Mémoires de l'Académie des sciences 1692*), тѣло, происходящее отъ обращенія полу-эллипса около одного изъ его диаметровъ, отличнаго отъ осей. Это названіе произошло отъ нѣкотораго сходства сего тѣла съ видомъ сердца.

COEXISTANCE DES PETITES OSCILLATIONS. (Мех.) СОВМѢСТНОСТЬ МАЛЫХЪ КОЛЕБАНИЙ. Когда въ какой нѣ есть среднѣ, въ особенности же въ упругой, возбуждаются какія нѣ либо образомъ весьма малыя сотрясенія или колебанія, то считаемъ что эти колебанія соизмѣняются между собою по положенію, не причиняя никакого помѣшательства одиѣ другиямъ, но есмь, полное колебаніе равно суммѣ частныхъ колебаній, производимыхъ каждое дѣйствиѣмъ отдѣльной причины. Первый, сдѣлавшій это замѣчаніе, былъ Даниилъ Бернулли. Имѣтъ извѣстно, что совмѣстность малыхъ колебаній происходитъ именно отъ ихъ малости, ибо малыя колебанія, или лучше сказать количества, которыми они опредѣляются, даны посредствомъ линейныхъ дифференциальныхъ уравненій, конхъ вторыя ча-

сти зависятъ отъ возмущительныхъ причинъ. Изъ теоріи же линейныхъ уравненій слѣдуетъ, что если во вторыхъ частяхъ силъ уравненій сохранимъ сперва членъ относящійся къ одной возмущительной силѣ, помошь къ другой, далѣе, къ третей и проч., то сумма интеграловъ измѣненыхъ такимъ образомъ дифференциальныхъ уравненій, изобразитъ интегралы первоначальныхъ уравненій, то есмь тѣхъ, которыя заключаютъ въ себѣ члены, вводимые всѣми возмущительными силами. Въ зномъ-то и состоятъ, въ самомъ общемъ видѣ, теорія *совмѣстности* или совокупленія посредствомъ наложенія малыхъ колебаній.

Замѣтимъ однакожъ, что совмѣстность малыхъ колебаній должно принимать только за приближенную теорію, ибо уравненія, опредѣляющія величины ихъ, бывающъ линейными только отъ того, что ожидаемыя нѣкоторыя количества, предполагаемыя весьма малыми; но если бы желали сохранить въ вычисленіи совершенную точность, то уравненія, о которыхъ говоримъ, не были бы вообще линейными, и теорія совмѣстности колебаній не имѣла бы уже мѣста. Впрочемъ, такъ какъ наблюденія почти всегда подтверждаютъ эту теорію, то мы въ правѣ заключить, что отбрасываемыя величины должны быть на самомъ дѣлѣ весьма малы.

Для поясненія примѣромъ предыдущей теоріи, рассмотримъ рядъ материальныхъ частицъ, расположенныхъ по прямой линіи, и которыя, предполагаемъ, были весьма мало отклонены отъ равновѣснаго ихъ положенія.

Чтобы удобнѣе представить себѣ эту систему, положимъ, что частицы составляютъ струну AB (черт. 4, листъ IV), которая первоначально находится въ равновѣсіи. Положимъ, что конецъ A утверждѣнъ неподвижно, а за другой конецъ B натягиваютъ слегка струну, такъ что она, получивъ весьма малое удлинненіе, приняла положеніе AC . Если отпустимъ потомъ конецъ C , и въ то же время сообщимъ всѣмъ частицамъ струны скорости весьма малыя, конхъ направленія не выйдутъ изъ прямой AC , то струна получитъ нѣкоторое колебательное движеніе, которое пребудетъ опредѣлѣмъ.

Пусть будетъ $AD = a$ разстояніе какой нѣбудь точки m струны, находящейся въ равно-

известном состоянии, отъ неподвижной точки A , а $AE = a + \alpha f(a)$ расстояние той же частицы, но въ то время, когда струна натянута, и следовательно найдетъ длину AC ; α изображаетъ здѣсь количество весьма малое, а $f(a)$ произвольную функцию отъ a . Означимъ чрезъ $a + \alpha x$ расстояние AM рассматриваемой частицы m отъ A по истеченіи какого ни есть времени t , считаемого отъ того мгновенія, когда конецъ C струны былъ опущенъ. Если изобразимъ чрезъ ω сѣченіе струны, перпендикулярное къ ея оси, чрезъ ρ ея плотность а чрезъ Dx длину MN частицы m , то масса Dm этой частицы, определится произведеніемъ $\omega \rho Dx$, и следовательно выраженіе движущей силы, дѣйствующей на частицу m , будетъ $\alpha \rho \frac{d^2 x}{dt^2} Dx = \alpha Dm \frac{d^2 x}{dt^2}$. Теперь надобно найти другое выраженіе этой самой силы; для этого, рассмотримъ другую частицу $M'N' = m'$, и представимъ чрезъ z ея расстояние отъ m . Взаимодействіе двухъ частицъ m и m' изобразится чрезъ $m m' q(z)$; взявъ сумму всѣхъ подобныхъ дѣйствій, рождающихся отъ частицъ смежныхъ съ m , получимъ $\alpha \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum m' q(z)$, разумѣя подъ \sum суммой знакъ.

Для употребленія найденнаго уравненія, надобно найти разложеніе суммы $\sum m' q(z)$. Замѣнимъ, что ова должна зависѣть только отъ положенія частицы m , то есть отъ количества $a + \alpha x$. Пусть будетъ $q(a + \alpha x)$ величина этой суммы. Такъ какъ, до напряженія струны, всѣ дѣйствія взаимно уничтожаются, ябо она находится тогда въ равновѣсіи, то $q(a) = 0$; следовательно, сумма $q(a + \alpha x)$, для какого ни есть мгновенія, будетъ

$$q(a) + q'(a) \alpha x + q''(a) \frac{\alpha^2 x^2}{1.2} + \dots \\ = q'(a) \alpha x + q''(a) \frac{\alpha^2 x^2}{1.2} + \dots$$

Полагая $q'(a) = -k^2$, и откидывая степени величины α превышающія первую, получимъ

$$q(a + \alpha x) = \sum m' q(z) = -k^2 \alpha x.$$

И такъ, вышеприведенное уравненіе приметъ видъ

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0,$$

и, сверхъ того, при $t = 0$, должны имѣть $x = f(a)$.

Изобразимъ теперь чрезъ $\alpha F(a)$ весьма малую начальную скорость, сообщаемую частицѣ m ;

получимъ $\frac{dx}{dt} = F(a)$ для $t = 0$, ябо скорости точки m будетъ $\frac{d(a + \alpha x)}{dt} = \alpha \frac{dx}{dt}$; следовательно при $t = 0$, должно быть $\alpha \frac{dx}{dt} = \alpha F(a)$, то есть $\frac{dx}{dt} = F(a)$.

И такъ, надобно опредѣлить x изъ уравненій

$$(1) \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0 \\ \frac{x}{dt} = F(a) \end{cases} \text{ когда } t = 0.$$

Вотъ условія для опредѣленія x ; въ рассматриваемомъ намъ случаѣ, колебанія струны происходятъ отъ двухъ причинъ: во первыхъ, отъ ея напряженія, чрезъ что вводится членъ $f(a)$, а во вторыхъ, отъ сообщенной ей въ то время начальной скорости $F(a)$. Если не будемъ снѣва принимать въ соображеніе скорости $F(a)$, то получимъ уравненія

$$(2) \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0 \\ \frac{dx}{dt} = 0 \end{cases} \text{ когда } t = 0.$$

Откидывая же членъ $f(a)$, отыскиваемъ изъ удлиненія струны, найдемъ

$$(3) \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0 \\ x = 0 \\ \frac{dx}{dt} = F(a) \end{cases} \text{ когда } t = 0.$$

Сумма интеграловъ уравненій (2) и (3) изобразитъ интегралъ уравн. (1). Дѣйствительно, интегралъ перваго изъ уравн. (2) будетъ

$$x = A \cos kt + B \sin kt,$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = -kA \sin kt + kB \cos kt;$$

полагая $t = 0$, находимъ

$$f(a) = A \\ 0 = kB;$$

такъ какъ k не нуль, то $B = 0$, и следовательно $x = f(a) \cos kt$.

Интегралъ перваго изъ уравн. (3) будетъ также

$$x = A' \cos kt + B' \sin kt,$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = -kA' \sin kt + kB' \cos kt;$$

полагая $t = 0$, найдемъ

$$0 = A'$$

$$F(a) = kB';$$

$$\text{следовательно } x = \frac{F(a) \sin kt}{k}.$$

Сумма величин $f(a) \cos kt$ и $\frac{F(a) \sin kt}{k}$ определит, как сказано выше, полный интеграл уравн. (1), и исконая величина для x будетъ

$$x = f(a) \cos kt + \frac{F(a) \sin kt}{k}.$$

Эта формула показываетъ, что колебанія струны, происходящія отъ первоначальнаго ея удлиненія, и тѣ, которыя она получила отъ сообщенныхъ ея точкамъ начальныхъ скоростей, производятъ полныя колебанія, и совокупляясь посредствомъ наложенія, не производя помѣшательства одинъ въ движеніи другихъ. И такъ, здѣсь какъ и вообще, полное колебаніе, то есть, колебаніе происходящее отъ совокупнаго дѣйствія причинъ, равно суммѣ колебаній, получаемихъ при разсматриваніи каждой причины отдѣльно.

COHERENCE. (Физ.) Уст сл. То же что **COHESION.**

COHESION или **ADHÉRENCE.** (Физ.) **СЦѢЛЕНІЕ.**

Когда находящиеся отдѣльно одинъ отъ другихъ частицы тѣла, превращеніемъ твердаго, то встрѣчаются нѣкоторое сопротавленіе; это сопротавленіе или сила, соединяющая частицы тѣла между собою, называется *силою сцѣленія*.

Сила сцѣленія обнаруживаетъ свое дѣйствіе и въ томъ случаѣ, когда тѣло раздроблено на мелкія части, приводимыя въ соприкосновеніе; частицы стремятся тогда къ взаимному соединенію, хотя бы онѣ и были разнородныя. Такое свойство называютъ *прилипаемостію* (*adhésion*). Между силами сцѣленія и прилипанія нѣкоторые физики полагаютъ различіе, состоящее въ томъ, что первая обнаруживается только между частицами однородными, а вторая существуетъ, какъ между однородными такъ и разнородными частицами. Для дальнѣйшихъ подробностей о сѣзъ предметъ, описывается читателями къ курсамъ Физики, а также къ словамъ: **ATOME, MOLÉCULE, FORCE, CORPS.**

COIN. (Геом.) **ДВУГРАННЫЙ УГОЛЪ.** *Лежандръ*, въ своей Геометріи, предлагаетъ наименованіе *coin* (и *тикъ*) для угла, образуемаго двумя плоскостями; пересѣченіе же сихъ двухъ плоскостей онъ называетъ *saite* или *arête* (ребра). И такъ *coin droit* (прямой двугранный уголъ) будетъ о-

значать уголъ, составленный двумя взаимно перпендикулярными плоскостями. Двугранный уголъ можетъ быть изображенъ четырьмя буквами, изъ коихъ двѣ среднія принадлежатъ ребру.

COIN. (Геом.) Смол. **ONGLET SPHÉRIQUE.**

COIN CONOÏDE. (Геом.) **КОНОДАЛЬНЫЙ**

КЛИНЪ. Такъ называютъ нѣкоторый родъ косої поверхности, которую разсматривалъ *Валисъ* (*Wallis*) и назвалъ *cono-sinus*; образованіе конодальнаго клина слѣдующее: доложимъ, что *BDFE* (черт. 5, листъ IV) изображаетъ четверть круга, коего плоскость перпендикулярна къ плоскости *ABCD*, и вѣситъ съ тѣмъ параллельна линіи *AC*. Если спланиемъ двигаемъ другую плоскость *GFFH* такъ, чтобы она, въ продолженіи всего движенія, оставалась непрестанно перпендикулярна къ линіи *AC*, и соединимъ пополамъ линіями *GF, G'F'...* точки, въ которыхъ эта плоскость встрѣчаетъ прямую *AC* и круговую дугу *EF'FD*, то совокупность прямыхъ линій *CD, GF, G'F'...AE* образуетъ поверхность, именуемую *конодальнымъ клиномъ*.

Очевидно впрочемъ, что полная поверхность конодальнаго клина, будетъ состоять изъ восьми частей, подобныхъ той, коей образованіе мы сей-часъ показали; дѣйствительно, вѣстпо четверть круга *EFDB*, должно будетъ принять цѣлый кругъ, и сверхъ того продолжитъ *производилія* *CD, GF, G'F'...AE* неопредѣленно въ оба стороны. Смол. **GAUCHE (SURFACE).** —

Вѣстпо друга, можно разсматривать другую направляющую кривую, и получится поверхность, которая также называется *конодальнымъ клиномъ*.

COIN. (Мех.) **КЛИНЪ.** Трехсторонняя призма, болѣею частію металлическая, которая оспривитъ ребромъ, называемымъ *остривіемъ* (*tranchant*), вкладывается въ раздѣленію тѣла; ударамъ въ противоположную сторону, именуемую *обухомъ* (*l'ile du coin*), вгоняютъ клинъ въ тѣло, чрезъ что части сего послѣдняго отдѣляются одна отъ другой. Клинъ употребляется для раскалыванія тѣлъ, для произведенія большихъ давленій, для подъема тяжестей, для напачиванія веревокъ и проч. Ножи, топоры, бритвы, буравы, однимъ словомъ всѣ острые и остроконечныя орудія относятся къ клину.

При разсматриваніи дѣйствія клина, мы не можемъ, какъ для другихъ машинъ, опредѣлить отношеніе силы къ сопротивленію, ибо сопротивленіе, испытываемое частицами штыля къ взаимному отдѣленію, имѣетъ мало извѣстно. И такъ, ограничимся опредѣленіемъ усилій, производимыхъ дѣйствіемъ силы на обухъ, перпендикулярно къ двумъ ребрамъ или споровамъ клина. Заѣмъимъ сперва, что каково бы ни было направленіе этой силы, оно всегда можетъ быть принимаемо перпендикулярнымъ къ обуху, ибо, въ противномъ случаѣ, можно бы только разложить силу на двѣ другія, одну перпендикулярную, а другую, дѣйствующую въ плоскости обуха; вторая не произведетъ бы никакого дѣйствія, между штылемъ какъ осталась бы только перпендикулярная.

Пусть будетъ MN (черт. 6 Листъ IV) направленіе силы, по предположенію перпендикулярное къ плоскости обуха. Черезъ эту линію проводимъ плоскость, перпендикулярную къ оси клина. Сѣченіе сего послѣдняго этою плоскостью будетъ треугольникъ ABC . Изъ точки N , гдѣ сила встрѣчается обухомъ BC , опускаемъ перпендикуляры NK, NL къ споровамъ BA, CA клина. Разложимъ силу, дѣйствующую по MN , и которую изобразимъ черезъ R , на двѣ другія P и Q по направленіямъ NK и NL . Для этого, беремъ на продолженіи линіи MN произвольную линію Nn , и изъ точки n проводимъ линіи nk, nl параллельно NK, NL . Очевидно, что силы R, P, Q будутъ находиться между собою въ отношеніи трехъ линій $Nn, Nk, Nl \equiv kn$, то есть,

$$\frac{R}{Nn} = \frac{P}{Nk} = \frac{Q}{Nl}.$$

Но такъ какъ треугольники ABC и kNl подобны по причинѣ взаимной перпендикулярности ихъ споровъ, то получимъ также

$$\frac{BC}{Nn} = \frac{AB}{Nk} = \frac{AC}{Nl}.$$

Совокупляя эти равенства съ предъизведенными, найдемъ

$$\frac{R}{BC} = \frac{P}{AB} = \frac{Q}{AC}.$$

И такъ, если означимъ силу R дѣяніемъ \overline{BC} обуха, то усилія P и Q будутъ соответственно изображаться споровами AB и AC клина. Ибо, что дѣйствіе клина будетъ имѣть значительнѣе,

чѣмъ длина обуха, въ соразмѣрности съ его объемомъ, будетъ менше.

COINCIDENCE. (Геом.) **СОВПАДЕНІЕ, СОВНАДАЕМОСТЬ, СОВМѢЩЕНІЕ.** Говорится о сравниваемыхъ между собою линіяхъ, фигурахъ, поверхностяхъ и тѣлахъ, когда всѣ части разсматриваемыхъ двухъ изъ нихъ равны между собою.

COINCIDER. (Геом.) **СОВПАДАТЬ, СОВМѢЩАТЬСЯ.** Двѣ фигуры *совпадаютъ*, когда, по наложеніи одной на другую, онѣ сливаются, то есть покрываютъ совершенно другъ друга. Этого глагола употребляется иногда и въ Анализѣ; напримеръ, говорится: *ces deux formules coïncident entre elles*; *cui deux formules равнозначащи, тождественны*.

COLLIMATION (LIGNE DE). (Астр.) **КОЛЛИМАЦИОННАЯ ЛИНІЯ, линія зрѣнія.** Направленіе зрительнаго луча, когда наблюдаютъ какой либо предметъ сквозь діоптры угломернаго инструмента. — *Оптическая ось трубы*, то есть линія, проходящая черезъ центры стеколъ трубы. — *Erreur de collimation*; *коллимационная погрѣшность*. Въ угломерномъ инструментѣ погрѣшность, происходящая отъ несовершенія точки нуля съ линіею, отъ которой считываются измѣряемые углы; также, уголъ составляемый линіею зрѣнія съ линіею, перпендикулярною къ оси вращенія трубы.

COLLISION. (Мех.) **СОУДАРЕНІЕ.** См. СНОС.

COLONNE. **СТОЛБЕЦЪ, СТОЛЕБЪ.** Совокупность цифръ, расположенныхъ въ одинъ рядъ въ какихъ либо таблицахъ, напримеръ, въ логарифмическихъ; также, совокупность членовъ, какими же образомъ расположенныхъ въ какой либо формулѣ или въ безконечномъ ряду. — *Colonne atmosphérique, colonne de mercure*; *атмосферическій, ртутный столбецъ*.

COLONNE. (Алг.) **СТОЛБЕЦЪ.** Наименованіе употребленное Роллемъ въ его Алгебрѣ *), и которымъ онъ означалъ и который порядкомъ при рѣшеніи уравненій со многими неизвѣстными.

Подожимъ, напримеръ, что даны четыре уравненія

$$(1) \quad \begin{cases} x + y + z = 8 \\ x + y + v = 7 \\ x + z + v = 6 \\ y + z + v = 9 \end{cases}$$

*) *Traité d'Algèbre, par M. Rolle. Paris 1800.*

Для рѣшенія сихъ уравненій по способу Роля, беремъ которое либо изъ нихъ, наприимѣръ 1-ое, и выводимъ изъ него

$$(a) \quad x = 6 - y - z;$$

подставляя эту величину въ остальные изъ уравненій (1), получаемъ

$$(2) \quad \begin{cases} y - z = 1 \\ y - y = 2 \\ y + z + y = 9. \end{cases}$$

Поступаемъ такимъ же образомъ съ уравненіемъ (2), наприимѣръ, выводимъ изъ перваго

$$(3) \quad v = 1 + z,$$

и, подставляя въ остальные двѣ, получаемъ

$$(3) \quad \begin{cases} z - y = 1 \\ y + 2z = 8, \end{cases}$$

откуда

$$(c) \quad z = 1 + y;$$

следовательно

$$(4) \quad 5y = 6$$

и наконецъ

$$(d) \quad y = 2.$$

Уравненія (1), (2), (3) и (4) составляютъ такъ называемый Роляне столбецъ направленія (*colonne de direction*), а каждая группа уравненій (1), (2), (3), (4), особый классъ. Уравненія (d), (c), (b), (a), составляютъ первый классъ столбца возврата; изъ сего перваго класса выводятся второй классъ, пошомъ третій, и наконецъ, въ разсматриваемомъ случаѣ, четвертый классъ. Изъ столбца возврата выписываютъ особенно величины неизвѣстныхъ y, z, v, x , и получаютъ конечный столбецъ (*colonne finale*). Приводимъ здѣсь расположеніе этихъ столбцовъ въ томъ видѣ, въ какомъ Роля писалъ ихъ:

Столбецъ направленія.

Первый классъ:

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + v = 7$$

$$x + z + v = 8$$

$$y + z + v = 9$$

Второй классъ:

$$v - z = 1$$

$$v - y = 2$$

$$y + z + v = 9$$

Третій классъ:

$$z - y = 1$$

$$y + 2z = 8$$

Четвертый классъ.

$$5y = 6$$

Столбецъ возврата.

Первый классъ:

$$z = 2$$

$$z = 1 + y$$

$$v = 1 + z$$

$$z = 6 - y - z.$$

Второй классъ:

$$z = 3$$

$$v = 1 + z$$

$$x = 4 - z.$$

Третій классъ:

$$v = 4$$

$$x = 1.$$

Четвертый классъ:

$$x = 1.$$

Конечный столбецъ.

$$y = 2$$

$$z = 3$$

$$v = 4$$

$$x = 1.$$

Если, при употребленіи этого способа, окажется что не всѣ неизвѣстныя опредѣлились въ столбцѣ возврата, то заключаемъ, что предложенный вопросъ относится къ роду *неопредѣленнаго*. Равнымъ образомъ, если которое либо изъ уравненій, составляющихъ столбецъ направленія или возврата, будетъ заключать въ себѣ какое либо противорѣчіе, то должно заключить изъ этого, что вопросъ невозможенъ.

Для сличенія отсылаемъ читателей къ статьѣ: **CASCADES (METHODE DES)**, въ которой объяснены наименованія: *дерево возврата* и *дерево направленія*, имѣющія связь съ приведеннымъ здѣсь способомъ.

COLURES. (Астр.) КОЛЮРЫ. Двѣ большіе круга, взаимно перпендикулярные, и проходящіе чрезъ полюсы міра, одинъ, чрезъ точки равноденственныя, а другой, чрезъ точки солнцестоянія. *Solire d'équinox, de solstice*; *колоръ равноденстей, солнцестояній*; *кругъ равноденственный, солнцестоятельный*.

COMBINAISON. (Анал.) СОЕДИНЕНІЕ. Такъ называютъ вообще всякаго рода совокупленія нѣсколькихъ вещей, изъ многихъ данныхъ. Вещи могутъ быть какія угодно, наприимѣръ: карты, шары различныхъ цвѣтовъ, слова, буквы, числа и проч. — Въ тѣсномъ смыслѣ, подъ соединеніемъ, разумѣютъ совокупленія нѣсколькихъ буквъ *по-два, по-три* и п. д., дающія произведенія различныя между собою. Наприимѣръ, четыре буквы *a, b, c, d*, совокупляемы по-два, даютъ *шестъ соединеній*, именно: *ab, ac, ad, bc, bd, cd*; по-три, при слѣдующія: *abc, acd, bcd*.

THEORIE DES COMBINAISONS Теорія соединеній. Въ этой теоріи разсматриваются различныхъ родовъ совокупленія, и предлагаются правила для опредѣленія числа всѣхъ соединеній, допускаемыхъ требованіями вопроса. Войдемъ въ нѣкоторую подробности по сему предмету.

Предложимъ себѣ сперва слѣдующую задачу: *Даны n буквъ a, b, c, d, \dots ; спрашивается, сколько переложеній можно сдѣлать со всѣми этими буквами, переставляя изъ всѣхъ возможныхъ образцовъ?*

Заметим, что если бы даны были две буквы a и b , то получили бы только $2 \equiv 1.2$ перестановки, именно ab и ba . Три буквы a , b и c допускают $6 \equiv 1.2.3$ перестановки abc , acb , bac , bca , cab , cba . Вообще, легко видеть, что при m буквах число перестановок будет $1.2.3...m$. Действительно, положим, что рассматриваем 4 буквы a , b , c , d ; каждая из них может занимать первое место, между тем как остальные три переставляются всеми возможными способами; но мы видели выше, что число перестановок, относящихся к 3 буквам, равно $6 \equiv 1.2.3$; и так, помножив это последнее число на 4, получим число всех перестановок для 4 букв, то есть 24, именно:

$$a \begin{cases} bcd \\ bdc \\ cdb \\ cdc \\ dbc \\ dcb \end{cases} \quad b \begin{cases} acd \\ adc \\ cad \\ cda \\ dac \\ dca \end{cases} \quad c \begin{cases} abd \\ adb \\ bad \\ bda \\ dab \\ dba \end{cases} \quad d \begin{cases} abc \\ acb \\ bac \\ bca \\ cab \\ cba \end{cases}$$

Такого рода перестановки называются обыкновенно *перестановками* или *перемещениями* (*permutations, arrangements*).

Когда совокупляем известное число букв по-два, по-три... то такого рода соединения называются *сочетаниями* или *изменениями* (*variations*). Например, совокупляя три буквы a , b , c , по-два, получим шесть сочетаний: ab , ac , ba , bc , ca и cb . Положим, что имеем вообще m букв, которых совокупляем по-два, и желаем найти число всех сочетаний. Так как каждая из предложенных m букв совокупляется с $(m-1)$ -ю из остальных, то очевидно, что искоемое число сочетаний будет $m(m-1)$.

Если бы эти же m букв соединялись по-три, то ясно, что каждая из них, оставаясь на первом месте, совокуплялась бы с сочетаниями по-2 остальных $(m-1)$ букв; но так как сочетаний по 2 для $(m-1)$ букв будет $(m-1)(m-2)$, то очевидно, что число сочетаний для m букв, совокупляемых по-три, изобразится произведением $m(m-1)(m-2)$.

Вообще, легко заключить, что число сочетаний m букв по- n определяется произведением $m(m-1)(m-2)...(m-n+1)$.

Собственно, под *соединениями* (*combinations*, *reduits differents*) разумеем совокупность тех

сочетаний которых даются произведения различных, предполагая что буквы, входящие в них, сохраняют свою первоначальную независимость между собой. И так, при буквах a , b , c , совокупляемых по-два, даются 6 сочетаний ab , ac , ba , bc , ca и cb , а только три соединения abc , bca , cba , ибо сочетания ab и ba , ac и ca , bc и cb , рассматриваемые как произведения, равны между собой...

Чтобы получить число соединений, очевидно, споним только разделить число всех сочетаний на совокупность перестановок. И так, изобразив через m число всех букв, совокупляемых по- n , число сочетаний будет
$$\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{1.2.3...n}$$
 Например, 6 букв

a , b , c , d , e , f , совокупляемых по-три, дадут $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ соединений, именно:

$$abc \quad abd \quad abe \quad acd \quad ace \quad ade \quad bcd \quad bce \quad bde \quad cde$$

Отсюда легко заключить, что число различных произведений, которых можно составить из m букв, бравъ их по-два, по-три, по-четыре и проч. определяется формулою

$$\frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} + \dots + 1$$

Но так как [C. BINOMIAUX (COEFFICIENTS)]

$$2^m = 1 + m + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \dots,$$

то искоемое число будет

$$2^m - m - 1.$$

Например, эти четыре простых числа 2, 3, 5 и 7, дадут бы 11 произведений

$$2.3 = 6, \quad 2.5 = 10, \quad 2.7 = 14, \quad 3.5 = 15, \\ 3.7 = 21, \quad 5.7 = 35, \quad 2.3.5 = 30, \quad 2.3.7 = 42, \\ 2.5.7 = 70, \quad 3.5.7 = 105, \quad 2.3.5.7 = 210.$$

Все эти произведения суть делящие числа $2.3.5.7 = 210$; если прибавим к ним предложенные числа, то получим всего 15 делятелей.

Разсмотрим теперь перестановки нескольких букв, из которых некоторые повторяются. Например, определим совокупность перестановок сложности $aaabbc$. Если бы все 6 букв были различны между собою, то число перестановок равнялось бы $1.2.3.4.5.6 = 720$; но так как имеем в этом числе одинаковые буквы, то из числа 720 получаются одинаковые перестановки. Легко усмотреть, что тех

какъ въ настоящемъ случаѣ имѣемъ 3 буквы a , то полное число переложений должно во первыхъ раздѣлится на произведение $1.2.3$, изображающее число перемѣнѣній буквъ; равнымъ образомъ, число всѣхъ переложений должно быть раздѣлено и на 1.2 по той причинѣ, что въ сложности $aaabbc$ имѣемъ еще двѣ одинаковыя буквы b . И такъ, искомое число переставленій изобразится чрезъ $\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.1.2} = 60$.

Вообще, пусть будемъ въ данной сложности α буквъ a , β буквъ b , γ буквъ c , ...; положивъ $\alpha + \beta + \gamma + \dots = m$, число переложений сложности $a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ изобразится формулою

$$\frac{1.2.3 \dots m}{1.2.3 \dots \alpha \cdot 1.2.3 \dots \beta \cdot 1.2.3 \dots \gamma \dots}$$

Разсмотримъ еще *сочетанія* съ *повтореніемъ* (*variations à répétition*). Двѣ буквы a, b , совокупляемыя по-двѣ, доставляютъ четыре сочетанія съ повтореніемъ, именно: aa, ab, ba, bb ; три буквы a, b, c даютъ 9 таковыхъ сочетаній: $aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$. Вообще, легко видѣть, что m буквъ, совокупляемыхъ по-двѣ, даютъ m^2 сочетаній съ повтореніемъ, ибо каждая изъ m буквъ совокупляется съ каждою изъ тѣхъ же самыхъ m буквъ, что и составили всего $m \times m$ или m^2 сочетаній. Для совокупленія m буквъ по-три, надобно будетъ каждую изъ нихъ совокупить со всѣми сочетаніями по-2, которыхъ, какъ мы сей-часъ видѣли, будетъ числомъ m^2 . Следовательно, число сочетаній по-3 опредѣлится произведеніемъ $m \times m^2 = m^3$. И вообще, число сочетаній съ повтореніемъ для m буквъ, совокупляемыхъ по- n , изобразится степенью m^n . Такъ, напримеръ, совокупляя четыре буквы a, b, c, d по-три, получимъ $4^3 = 64$ сочетанія съ повтореніемъ, именно:

$aaa \ aab \ aac \ aad \ aba \ abb \ abc \ abd$
 $aca \ acb \ acc \ acd \ ada \ adb \ adc \ add$
 $baa \ bab \ bac \ bad \ bba \ bbb \ bbc \ bbd$
 $bca \ bcb \ bcc \ bcd \ bda \ bdb \ bdc \ bdd$
 $caa \ cab \ cac \ cad \ cba \ cbb \ cbc \ cbd$
 $caa \ cab \ cac \ cad \ cba \ cbb \ cbc \ cbd$
 $daa \ dab \ dac \ dad \ dba \ dbb \ dbc \ dbd$
 $dca \ dcab \ dcc \ dcd \ dda \ ddb \ ddc \ ddd$

Теорія соединеній есть одна изъ отраслей математическаго Анализа, которою наиболее занимается Ичисленіе Вѣроятностей Сюм. **PROBABILITIES (CALCUL DES)**. *Якобъ Бернулли* въ своемъ *Ars conjectandi*, а *Монтморъ* (*Montmort*) въ *Analyse des jeux de hasard*, предлагая

много изслѣдованій по этому предмету. Предѣлы нашего Лексикона не позволяютъ намъ входить въ дальнѣйшія подробности о соединеніяхъ; но читатель найдетъ во многихъ статьяхъ, относящихся къ Анализу Вѣроятностей, приложенія этой теоріи. Отсылаемъ также къ непосредственно слѣдующей статьѣ **ANALYSE COMBINATOIRE**, которая оптически послужитъ дополненіемъ сказанному здѣсь о теоріи соединеній.

COMBINATOIRE (ANALYSE). СОЕДИНИТЕЛЬНЫЙ, КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗЪ.

Сія особенная отрасль Математики занимается: 1° изслѣдованіемъ различныхъ образовъ замѣненія порядка или *мѣстъ* вещей, подлежащихъ или не подлежащихъ опредѣленной взаимной зависимости; 2° разысканіемъ законовъ, по которымъ эти замѣненія или перемѣщенія могутъ быть изображены и исчислены; наконецъ 3° приложеніемъ выводимыхъ изъ нихъ образовъ слѣдствій къ другимъ отраслямъ математическаго Анализа. —

Когда, въ Соединительномъ Анализѣ, вещи или количества разсматриваются единственно въ отношеніи ихъ порядка или занимаемыхъ ими мѣстъ, то они называются *элементами* (*éléments*). Въ этомъ смыслѣ собраніе нѣсколькихъ элементовъ именуется *сложностью* (*complexion, combinaison*). Впрочемъ, элементы, подобно величинамъ алгебраическимъ, обозначаются буквами или цифрами.

Сложности называются *аибамъ*, *тернами*, *кватернами*, *кинами* и проч. смотря по числу элементовъ, входящихъ въ нихъ. Иногда принимаютъ въ соображеніе одинъ только элементъ, и, по аналогіи, называютъ такую сложность *одинокую* (*extrait, Union*). Также различаютъ сложности съ *повтореніемъ* (*à répétition*) и *безъ повторенія* (*sans répétition*). Последніи именуются *пакія*, въ которыхъ каждый элементъ входитъ только одинъ разъ, какъ напримеръ $adcbm$; напротивъ того, $abbbm$ изображаетъ сложность съ повтореніемъ. Въ сложностяхъ съ повтореніемъ условились употреблять показателей, которые въ такомъ случаѣ и называются *показателями повторенія* (*exposans de répétition, Wiedergebungs-Exponenten*), и очевидно не имѣють ничего общаго съ показателями, употребляемыми въ Алгебрѣ для означенія степеней. И такъ, про-

дыдущая сложность может быть написана в виде ab^2hc^2 .

Подъ *указателем* (*indice*) ряда сложностей разумеют совокупность элементов, из которых эти сложности должны быть составлены. Указатель часто обозначает некоторый порядок относительно элементов, и мы называем сложности *порядочною* (*bien ordonnée, rite ordonnée, wohlgeordnet*), когда элементы, входящие в нее, следуют один за другим в порядке, предписываемом указателем. Если элементы изображены буквами или цифрами, и нитъ собственно данного указателя, то сложности должны считаться *порядочною*, когда элементы следуют один за другим в алфавитном порядке, или по порядку натуральных чисел.

Въ Соединительномъ Анализѣ различаютъ три главныхъ рода соединений элементовъ: 1) *переложение* или *перестановление* (*la permutation*); 2) собственно говоря *соединение* (*combinaison*); 3) *сочетание* или *соединительное измѣненіе* (*variation combinatoire*).

Переложение данной сложности состоитъ въ измѣненіи всѣми возможными образами нитъ ея элементовъ, такъ что каждая получаемая сложность заключаетъ въ элементы, какъ и первообразная, но только въ другомъ порядкѣ. Переложения бываютъ 2-го, 3-го, 4-го... класса, смотря по тому, будетъ ли сложность состоять изъ 2-хъ, 3-хъ, 4-хъ... элементовъ. Совокупность перестановленій какого нѣ есть класса обозначаютъ буквою *P*, поставленную передъ указателемъ, а надъ буквою *P* пишутъ номеръ класса. Такъ напримѣръ $\hat{P}(abcd)$ означаетъ 6-ой классъ переложеній элементовъ *a, b, c, d*.

Подъ *сочетаніемъ* или *измѣненіемъ* (соединительнымъ) разумеютъ всякое совокупленіе элементовъ, входящихъ въ составъ указателя, и вѣдѣтъ съ тѣмъ знакомъ, что элементы соединяются между собою по-два, по-три, и проч. всѣми возможными образами. И такъ, сочетанія распределяются также по *классамъ*, и подразделяются на сочетанія съ *повтореніемъ* и безъ *повторенія*. Сочетанія безъ повторенія обозначаются буквою *C*. Указатель пишется снизу, а номеръ класса сверху. Если желаемъ означить сочетанія съ повтореніемъ, то надъ буквою *C* ставимъ знакъ тѣхъ же повтореній

Такъ напримѣръ $\hat{C}_{(a,b,c)}$ изображаетъ совокупность сложностей ab, ac, ba, bc, ca, cb ; а $\hat{C}_{(a,b,c)}^2$ совокупности сложностей $aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$. Иногда разширяется и *первый классъ* сочетаній.

Если отъ всѣхъ сочетаній данныхъ элементовъ отбросимъ порядочны сложности, то отъ послѣднихъ составятъ *соединенія* тѣхъ же элементовъ. Знакъ соединеній *n*-го класса съ повтореніемъ есть слѣдующій: $\hat{C}_{(a,b,c,\dots)}^n$; безъ повторенія: $\hat{C}_{(a,b,c,\dots)}^1$. И такъ, знаменителемъ $\hat{C}_{(a,b,c,\dots)}^n$ означаетъ совокупность сложностей aa, ab, ac, bb, bc, cc ; а знаменителемъ $\hat{C}_{(a,b,c,\dots)}^1$ слѣдующихъ: ab, ac, bc .

Если нужно означить только число переложеній, сочетаній или соединеній какого либо рода, то передъ присвоеннымъ имъ знакомъ пишутъ буквы *Ns* (*numerus specierum*). И такъ, если, слѣдуя Крампу, изобразимъ чрезъ $m!$ произведеніе $1.2.3\dots m$, чрезъ $m^{n.d}$ (Смол. FACTORIELLE) произведеніе $m(m+d)(m+2d)\dots(m+(n-1)d$, и чрезъ m_n биноміальный коэффициентъ $(n+1)$ -го члена, то для каждого изъ приведенныхъ случаевъ, и для m элементовъ, получимъ слѣдующія формулы (Смол. предыдущую статью):

$$Ns. \hat{P}(a, b, c, \dots) = m!$$

$$Ns. \hat{P}(a^2, b^2, c^2, \dots) = \frac{m!}{a!b!c! \dots}$$

$$Ns. \hat{C}_{(a,b,c,\dots)}^n = m^{n-1} = (m-(n-1))^{n-1}$$

$$Ns. \hat{C}_{(a,b,c,\dots)}^n = m^n$$

$$Ns. \hat{C}_{(a,b,c,\dots)}^n = \frac{m^{n-1}}{n!} = m_n$$

$$Ns. \hat{C}_{(a,b,c,\dots)}^n = \frac{m^{n-1}}{n!} = (m+n-1)_n$$

Когда указатель составленъ изъ численныхъ элементовъ 0, 1, 2, 3 и проч., то подъ наименованіемъ *сочетаній* или *соединеній определенной суммы* (*variations, combinaisons d. somme déterminée, complexiones numeri propositi, Variationen oder Combinationen zu bestimmtem Summen*) разумеютъ такіа, въ которыхъ сумма элементовъ равна данному числу. Сочетанія и соединенія определенной суммы m обозначаются чрезъ $m\hat{P}$, $m\hat{C}$, $m\hat{C}^n$.

Следующее разложение выражения x^4 по-
(0, 1, 2, 3)
служить примером способа, который Гинден-
бург назвал *инволюцией* (involution) потому что
способ сей доставляет, сверх сложности раз-
лагаемого класса, все сложности низших
классов, для коих сумма одинакова:

0	0	0	1
0	0	1	2
0	0	2	1
0	0	3	0
0	1	0	2
0	1	1	1
0	1	2	0
0	2	0	1
0	2	1	0
0	3	0	0
1	0	0	2
1	0	1	1
1	0	2	0
1	1	0	1
1	1	1	0
2	0	0	1
2	0	1	0
2	1	0	0
3	0	0	0

Прямые углы отделяют сложности низших
классов.

Очевидно, что правила, проистекающие из
исследований такого рода, могут служить для
разрешения неопределенных уравнений вида

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \mu = m$$

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots + m\mu = n,$$

в которых m и n изображают данные числа,
целые и положительные, и где неизвестны α ,
 β , γ , ... не могут иметь других значений,
как только 0, 1, 2, 3 и проч.

Вьет, Гарриот, Паскаль, Мерсен, Лейбниц,
Валлис, Яков Бернулли (во второй части свое-
го сочинения: *Ars conjectandi*), Эйлер (в XIII томе
Commentarii Academiae Petropolitanae) и многие другие
математики 16-го, 17-го и 18-го столетий зани-
мались уже исследованиями и задачами, относя-
щимися к теории соединений; они предлагали
множество приложений этой теории к Исполни-
нию Вырожденностей, заимствующему из ней опре-
деление числа всех возможных и всех благо-

приятных случаев, а также к доказательству
различных теорем из Анализа, как наприм-
ер, разложение численности двучленного количе-
ства Гинденбурга (Hindenburg), Профессор Лейп-
цигского Университета, первый возымал мысль
соединить в одно целое все то, что относит-
ся к упомянутой теории; в нескольких со-
чинениях, издававшихся им в конце прошедшего
столетия, он положил основание Совокупитель-
ного Анализа. Из числа равносильных сотруд-
ников и преемников Гинденбурга, большою ча-
стью Германских математиков, были: Эшен-
бах (Eschenbach), Рот (Rothe), Крамп (Krampe),
Пфаф (Pfaff), Тибо (Thibaut), Швейнс (Schweins),
Штал (Stahl), Вейнгертнер (Weingartner) и мно-
гие другие, почти все ученики его. Теория, раз-
работанная Гинденбургом, и бывшая предметом по-
стоянных замечаний Крампа, нашла сего послед-
него на выражения особенного рода, которых
он назвал *совокупительными интегралами*; по
исчислению их теория предложена им же в 1820
году в сочинении под заглавием: *Theorie der
combinatorischen Integrale*, математиком Роте, Про-
фессором в Эрлангене. Именования совоку-
пительных интегралов заняли впоследствии
других, более свойственных, и назвали их
совокупительными агрегатами (aggrégats combi-
natoires).

Совокупительный агрегат есть выражение
вида $S[f(a, b, c, \dots)]$, изображающее сумму ряда,
конечного или бесконечного, коего общий член
есть функция $f(a, b, c, \dots)$; из этой функции со-
ставляются все члены сказанного ряда чрез по-
следовательное подстановление на место имен-
ных букв a, b, c, \dots , всевозможных *совокупитель-
ных переменных* (variables combinatoires), чи-
сель: 0, 1, 2, 3 и проч. Если иметь никаких осо-
бенных условий, ограничивающих всеобщность
величин сих переменных, то совокупитель-
ный агрегат изобразить бесконечный ряд.
Так например уравнение

$$F(x+h) = S \left[\frac{h^a}{a!} \frac{d^a Fx}{dx^a} \right] \text{ или } S \left[\frac{h^a}{a!} F^{(a)} x \right],$$

где должно принять 0! = 1 а $F^{(0)} x = Fx$, выра-
жает *Тайлорову* теорему при одной перемен-
ной, а формула

$$F^2 = S \left[\frac{F^{(a)}_0}{a!} x^a \right]$$

Маллореном ряд; подобным образом уравнение

$$F(x+h, y+k) = S \left[\frac{h^a}{a!} \cdot \frac{k^b}{b!} \cdot \frac{d^{a+b} F(x, y)}{dx^a dy^b} \right]$$

изобразится Тайлорову теорему, распространенную на случай двух перемешивших независимых величин.

Если, напротив того, ряд должен состоять из конечного числа членов, то есть, если величины a, b и проч не должны превышать некоторый предел, то к агрегату необходимо присовокупить одно или несколько условий уравнений, которые лишутся под самым агрегатом. Например, если бы значение буквы a не могло превышать 10, то такое условие изобразила бы уравнение $a + m = 10$, где m — некая буква, в насмешливом случае a и m не могут допускать иных значений, как только равных нулю и числам целым положительным. Подобным образом, если бы требовалось выразить, что буква a не может быть меньше известного предела, например 3-х, то стоило бы только написать уравнение $a = m + 3$, где уже m можно принять все значения 0, 1, 2, 3 и проч.

Так, например, формула Нютоновой биномии, для показателя целого и положительного, выражаемая уравнением

$$(a+b)^n = S \left[n \cdot a^{n-1} b \right] \text{ или } S \left[\frac{n!}{a! b!} a^a b^b \right],$$

$$a+b=n$$

где впрочем можно откинуть уравнение $a+b=n$, наблюдая что коэффициент n , обращается в нуль для $a > n$.

Равным образом, разложение степени много-членного количества представляется в вид:

$$(a+b+c+d+\dots)^n = S \left[\frac{n!}{a! b! c! d! \dots} a^a b^b c^c d^d \dots \right]$$

$$a+b+c+d+\dots=n$$

Чтобы предложить другого рода примѣръ, положимъ въ предыдущей формулѣ $b=a_1 x$, $c=a_2 x^2$, $d=a_3 x^3$ и проч, где подъ $a_1, a_2, a_3 \dots$ разумею какіе ни есть коэффициенты; получимъ

$$(a+a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+\dots)^n = S \left[\frac{n!}{a! b! c! d! \dots} a^a (a_1 x)^b (a_2 x^2)^c (a_3 x^3)^d \dots \right]$$

$$a+b+c+d+\dots=n$$

$$= S \left[\frac{n!}{a! b! c! d! \dots} a^a a_1^b a_2^c a_3^d \dots x^{b+2c+3d+\dots} \right]$$

$$a+b+c+d+\dots=n$$

Чтобы соединить все члены, заключающіе одну и ту же степень перемешивающей x , стоило только написать

$$(a+a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+\dots)^n = S \left[\frac{n!}{a! b! c! \dots} a^a a_1^b a_2^c a_3^d \dots x^{b+2c+3d+\dots} \right]$$

$$a+b+c+d+\dots=n$$

Если бы, например, желали получить, независимо отъ другихъ членовъ, только коэффициентъ предъ x^3 въ разложеніи $(a+a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+a_4 x^4)^n$, то этотъ коэффициентъ получился бы посредствомъ формулы

$$S \left[\frac{n!}{a! b! c! d! e!} a^a a_1^b a_2^c a_3^d a_4^e \right]$$

$$b+2c+3d+4e=3$$

$$a+b+c+d+e=n$$

Рѣшеніе этихъ двухъ условныхъ уравненій приводитъ къ слѣдующимъ соотношеніямъ различнаго совокупительныхъ перемешивающихъ:

a	b	c	d	e
1	0	1	1	0
1	1	0	0	2
0	1	2	0	0
0	2	0	2	0

слѣдовательно, искомый коэффициентъ предъ x^3 будетъ

$$\frac{n!}{1! 0! 1! 1! 0!} a a_1 a_2 + \frac{n!}{1! 1! 0! 0! 2!} a a_1 a_4 + \frac{n!}{0! 1! 2! 0! 0!} a_1^2 a_2$$

$$+ \frac{n!}{0! 2! 0! 2! 0!} a_1^2 a_3 = 6 a a_1 a_2 + 6 a a_1 a_4 + 6 a_1^2 a_2 + 6 a_1^2 a_3$$

Роме, въ приведенномъ выше сочиненіи, изложилъ весьма удовлетворительнымъ образомъ Исчисленіе совокупительныхъ агрегатовъ, котораго и самое изобрѣтеніе, по справедливости, принадлежитъ ему. Такъ какъ этого рода Анализъ приводитъ все дѣйствіе надъ рядами, конечными или безконечными, каковаго угодно вида, къ численію однихъ только общихъ членовъ сихъ рядовъ, то ясно, что такое пособіе должно быть весьма полезно какъ для практическихъ выкладокъ, такъ и для доказательства различныхъ разложеній, встречающихся во многихъ аналитическихъ изслѣдованіяхъ.

Вопре, для примѣра, такого рода доказательство Нютоновой биноміи, основанное на шогъ свойствѣ, что когда a изобразится числомъ цѣлымъ положительнымъ, то $n_{p+1} = (n-1)_{p+1} + (n-1)_p$, $0_n = 0$ а $0_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
 S[n, a^{n-2}b^2] &= a^n + S[(n-1), a^{n-2-1}b^{2+1}] \\
 &= a^n + S[(n-1), a^{n-3}b^3] + S[(n-1), a^{n-2-1}b^{2+1}] \\
 &= S[(n-1), a^{n-3}b^3] + S[(n-1), a^{n-2-1}b^{2+1}] \\
 &= S[(n-1), a^{n-1-2}b^2(a+b)] = (a+b)S[(n-1), a^{n-1-2}b^2] \\
 &= (\text{точно так же образом}) (a+b)^2S[(n-2), a^{n-2-2}b^2] \\
 &= (a+b)^3S[(n-3), a^{n-3-2}b^2] = \dots \\
 &= (a+b)^kS[(n-k), a^{n-k-2}b^2] = \dots \\
 &= (a+b)^{n-1}S[1, a^{1-2}b^2] = (a+b)^n.
 \end{aligned}$$

Г. Оми (Olm), Профессор Берлинского Университета, в особенностях способствовал своим трудам к развитию и распространению теории Роты, и обогатил ее примечательными приложениями, изложенными в издаваемом им сочинении: „Versuch ein es vollstänigen consequentes System der Mathematik“, которого уже вышло семь частей.

COMBINER. (Анал.) **СОЕДИНЯТЬ, СОВОКУПЛЯТЬ.** Смол. выше. — *Combiner des équations entr'elles; соединять, совокуплять уравнения между собою.*

КОМЕТА. (Астр.) **КОМЕТА.** (Омъ Греч. *κομή*, *головы*). Свѣтлое, неясно и неправильно окрашенное тѣло, на короткое время являющееся въ небѣ, и движущееся собственное движениіе, подобно движению планетъ.

Кометы отличаются отъ планетъ весьма слабо ограниченными, неправильными видами, большимъ эксцентрицитетомъ своихъ путей, имѣющихъ наклоненіи къ эклиптикѣ отъ 0° до 180°, въ которыхъ онѣ движутся по всѣмъ возможнымъ направленіямъ: одніе, отъ запада къ востоку, другіи, отъ востока къ западу, нѣкоторыя отъ юга къ северу и т. д. — Сначала кометы являлись въ видѣ туманныхъ свѣтлыхъ пятенъ. Рассматривая ихъ посредствомъ зрительныхъ трубъ, часто замѣчаютъ въ нихъ свѣтлое ядро, окруженное туманною оболочкою или атмосферою, которая современемъ принимается видъ мычки, хвоста, воронки или онахала, обращенныхъ въ противоположную сторону солнца, и столь прозрачныхъ, что можно сквозь нихъ видѣть всева ясно мерцаніе самыхъ малыхъ звездъ, несмотря на то, что эти мычки и онахалы, какъ наблюденія показываютъ, нѣсколько освѣщены солнцемъ, но еще имѣютъ по видимому свой собствен-

ный свѣтъ; они часто просвѣщаются на нѣсколько мильоновъ миль въ длину, и покрываютъ иногда большую часть неба. Наибольшая ихъ величина бываетъ вскорѣ послѣ прохожденія кометы чрезъ свой перигелий. —

По наружному виду, прежде кометы раздѣлялись на три класса: брадатые, косматые и съ хвостомъ; но это раздѣленіе несправедливо, потому что кометы бывають иногда безъ бороды космъ и хвоста. Въ новѣйшей Астрономіи разсматриваються три части кометы: *голова*, — широкая и блестящая масса тѣла, но весьма неслѣдственно ограниченная; *ядро* — самая свѣтлая и собственно окрашенная часть кометы, находящаяся въ серединѣ головы; *хвостъ* — свѣтлая полоса, болѣе или менѣе широкая и длинная, выходящая изъ головы по направленію, противоположенному солнцу, и которая раздѣляется на многія отрасли. Часто кометы являються или безъ ядра, или безъ хвоста, а иногда безъ того и другаго.

Древніе имѣли весьма различныя, и, по большій части, ошибочныя понятія о кометахъ. Одни полагали, что кометы ничто иное, какъ свѣтъ солнца, отраженный къ землѣ отъ тверди небесной. Другіе думали, что кометы суть оптическія явленія, произведенныя свѣтомъ двухъ планетъ, аходящихся въ соединеніи между собою; нѣкоторые полагали, что это души великихъ людей, парящія въ пріумъ. *Гермидъ Понтийскій* утверждалъ, что кометы суть облака, освѣщенные солнцемъ и другими планетами; *Ксенофонтъ* считалъ ихъ горящими облаками. *Аристотель* полагалъ, что кометы состояются изъ сухихъ горючихъ паровъ, извергаемыхъ вулканами изъ внутренности земной; эти пары, поднимаясь въ верхніе слои атмосферы, сгущаются тамъ отъ скорости сумочнаго вращенія около земли, воспламеняются и горятъ тѣмъ долѣе, чѣмъ больше находятъ питанія въ воздухѣ, или чѣмъ болѣе освобождается ихъ изъ земли. Кометы, по его мнѣнію, движущаясь въ ту сторону, гдѣ находится питаніе; онѣ могутъ засушить воздухъ и произвести на землѣ бурю, засуху и наконецъ голодъ.

Однакожъ и въ самой древности были философы, особенно Пифагоровой секты, которые почитали кометы планетами, показывающимися весьма рѣдко и на короткое время, какъ Меркурій.

Анаксаторъ, Демокритъ и нѣкоторые другіе думали, что кровь семи планетъ, тогда изъясненныхъ, много есть такихъ, которыя, по причинѣ несъема ихъ величины, невидимы, но скопившись въ одну группу, и въ достаточномъ числѣ, дѣлаются видимыми, и составляютъ комету. *Аполлоній Мудійскій* полагалъ, что кометы не иное что, какъ планеты, удаляющіяся отъ земли на весьма великія разстоянія; онѣ бывають видимы тогда только, когда нисходятъ къ намъ по законамъ, имъ предписаннымъ, и пропадаютъ для насъ, когда возвращаются къ своему сирани, или погружаются въ бездну эфира. *Сенека* защищалъ это мнѣніе весьма краснорѣчиво, и подтверждалъ его доводами, какіе только могло доставить ему состояніе наукъ того времени, въ которое онъ жилъ; *Сенека* предсказалъ даже, что современемъ явится великій ужъ, который откроетъ цупя кометъ, опредѣлитъ ихъ величины и свойства.

Вскорѣ послѣ смерти Римскаго философа процвѣтала въ Александріи знаменитый астрономъ *Клавдій Птоломей*, основатель системы міра съ твердыми и непроницаемыми небесами, который могъ бы быть разбитъ, еслибъ кометы двгались по всѣмъ направлѣніямъ въ безпредѣльномъ пространствѣ. Птоломей имѣлъ много учениковъ, которые, видѣши того чтобы самимъ испытывать природу, почитали Аристотелево и его ученіе непреложнымъ, и всѣ познанія астрономическія почерпали въ ихъ сочиненіяхъ. Все что укрылось отъ познанія сихъ двухъ великихъ мужей, онѣ объявляи ложнымъ, смѣшнымъ и безбожнымъ, и такимъ образомъ истинныя познанія Аполлонія и *Сенеки* о кометахъ осудили на тысячу шесть сотъ лѣтънее молчаніе. Съ этого времени кометы почитались метеорами, или свѣдѣвшимися явленіями въ земной атмосферѣ; по этому и не дѣлали надъ ними никакихъ астрономическихъ наблюдѣній, и, можетъ быть, никогда бы объ нихъ и не упомянулъ, еслибъ къ этому ложному пониманію объ нихъ не присовокупилось слѣпое суевѣріе, что онѣ являются предвѣстниками великихъ народныхъ бѣдствій, или возвѣщають близкую смерть какого либо Монарха.

Въ половинѣ 16 вѣка мнѣніа о кометахъ были столь разнорѣчны и несообразны, что наконецъ замѣчательнѣйшіе астрономы рѣшились изучить свойство и природу сихъ тѣлъ посредствомъ соб-

ственныхъ наблюдѣній. *Ресіомонтанъ* оставилъ намъ описаніе кометы 1472 года, въ которомъ означилъ при каждомъ наблюденіи мѣсто кометы. *Петръ Анніанъ (Aprian)*, астрономъ Императора Карла V-го, наблюдалъ кометы съ 1551 до 1539 года, и замѣтилъ, что хвосты кометъ всегда имѣють направленіе, противоположное солнцу, откуда заключилъ, что кометы не горятъ, но что она есть тѣло плоское, отражающее солнечный свѣтъ. Знаменитый *Тихобрагъ*, наблюдалъ комету 1577 года, нашелъ, что 9 Нолбля издалаея ея былъ $19^{\circ}52'$, а 26 Января 1578 года, онъ былъ не болѣе $2'$, и изъ этого заключилъ, что комета была отъ земли далѣе чѣмъ луна, и потому не могла состоявиться изъ земныхъ паровъ; также, что она болѣе и болѣе удалалась отъ земли, и что слѣдовательно небеса не тверды, какъ допускали перипланетики. Основываясь на своихъ наблюдѣніяхъ, Тихобрагъ предполагалъ, что солнце сообщаетъ движеніе кометамъ точно такъ, какъ и планетамъ своей системы, и что кометы двгаются около солнца въ кругѣ.

Наблюдѣнія *Местлина*, *Корнеліа Геммъ*, *Христоба Ротмана* подтвердили, что кометы 1577, 1580, 1582, 1585, 1593 и 1596 были выше луны. — Но главное житіе о кометахъ было тогда: что онѣ бывають двухъ свойствъ, *подземныя* и *надъ-лунныя*. Первые суть метеоры, произведенныя испареніемъ земли, — вторыя происходятъ отъ ступенія чистѣйшихъ частицъ небесной матеріа. — *Кеплеръ*, которому суждено было ускорить торжество истинной Астрономіа открывіемъ прехъ главнѣйшихъ законовъ природы, также наблюдалъ кометы 1607 и 1618 годовъ, и изложилъ въ своемъ сочиненіи *De cometis libellus tres* какъ собственныя наблюдѣнія надъ этими кометами, такъ и вообще свое мнѣніе о сихъ небесныхъ тѣлахъ. Онъ довольно удачно объяснилъ явленіа кометы 1607 г. посредствомъ прямолинейнаго движенія по касательной къ кругу съ увеличивающеюся скоростію, подобно часптамъ касательной къ кругу, соотвѣствующимъ равнымъ дугамъ; изъ этого онъ заключилъ, что кометы двгаются по прямой линіи. Что касается до происхожденія кометъ, то онъ полагалъ, что онѣ состоялись изъ небесной матеріа, которая не всегда чиста. Эта грубая

матерія, потемняющая иногда свѣтъ солнца и звездъ, собирается въ видѣ сферической фигуры; солнце бросаетъ на нее свои лучи, которые, проходя сквозь нее, уносятъ часть ея матеріи, отъ чего образуется хвостъ кометы, который разсѣивается въ пространство, и такими образомъ комета, такъ сказать выдыхая свой хвостъ, испребляется. *Геллій*, достойный ученикъ Кеплера, съ неутомимымъ тщаніемъ наблюдалъ и вычислялъ кометы 1652, 1661, 1664 и 1665 годовъ. Явленія кометы 1652 г. привели его къ изобрѣтенію новой системы кометъ. Онъ первый утверждалъ, что путь кометъ немного изогнутъ къ солнцу, но что онъ имѣетъ сходство съ параболою или гиперболою. *Дорбелъ*, наблюдавшій комету 1680 года, положительно утверждалъ, что ея орбита была параболическая, въ фокусъ которой находилось солнце, и что всѣ кометы движущіяся въ подобныхъ орбитахъ. Наконецъ *Нютонъ*, творецъ физической Астрономіи, включилъ кометы въ число пяти солнечной системы, повинующихся закону всеобщаго тяготѣнія, и показала весьма простой способъ опредѣлять ихъ пути. Такъ какъ кометы, по его сужденію, описываютъ весьма продолговатые эллипсы, и какъ онъ бывающіе нами видны только тогда, когда подходятъ близко къ солнцу, то Нютонъ предлагалъ ту часть эллипса, которую комета описываетъ въ продолженіи своего явленія землѣ, разсматривать какъ часть параболы. Такое предположеніе было весьма выгодно; дѣйствительно, часть продолговатаго эллипса, находящаяся близъ фокуса, весьма мало разнится отъ подобной части параболы, а вычисленіе параболическаго пути, какъ известно, гораздо легче нежели вычисленіе орбиты эллиптической, и, сверхъ того, для эллипса найдется безконечное множество видовъ, а для параболы только одинъ. По способу Ньютона выбираютъ три наблюденія кометы, и изъ двухъ возможныхъ предположеній ищутъ положеніе параболы, которая удовлетворяла бы этимъ тремъ наблюденіямъ. Такимъ образомъ опредѣленная парабола представитъ приближенно истинный путь, по которому двигалась комета въ продолженіи своего явленія. Подтвержденію способа весьма проста. Если опредѣлена теперь орбита ея истинная, то она должна предсказывать всѣ наблюденія, сколько бы

ихъ сдѣлано ни было. По этому способу *Галлей*, другъ Ньютона, вычислилъ пути 24 кометъ, и узналъ, что кометы 1682, 1607, 1531 и 1166 годовъ слѣдовали почти по одному и тому же пути; сверхъ того, такъ какъ промежутки времени, прошедшихъ между послѣдовательными явленіями этихъ кометъ были почти равны, то Галлей утвердился, что это была одна и та же комета, и что, съ возвращеніемъ должно ожидать въ концѣ 1758 или въ началѣ 1759 г. Въ самомъ дѣлѣ, комета прошла чрезъ свой перигелій въ Мартѣ 1759 года. Ближайшее возвращеніе этой кометы въ 1855 году было вычислено *Понтекюломъ*, *Длиадо* и *Розенбергеромъ*. Первый нашелъ, что комета пройдетъ чрезъ свой перигелій 16, а второй, 7 Ноября.

Кромѣ этихъ кометъ видѣли еще много другихъ, и даже вычислили болѣе 140; но такъ какъ онѣ были видны только въ весьма малой части своихъ путей, то весьма трудно, и даже невозможно, показать, хотя съ небольшою точностію, времена ихъ обращенія, которые по большей части весьма продолжительны, и о гупъ были опредѣлены только послѣ вторичнаго явленія одной и той же кометы.

Доселѣ намъ извѣстны только четыре кометы, которые, при возвратѣ ихъ, кометъ объявлять уже бывшими на нашемъ горизонтѣ.

Первая изъ нихъ та, о которой мы сей-часъ упоминали. Она была наблюдаема уже пять разъ, и названа *Галлеевою кометою*. Время ея обращенія содержитъ 76 лѣтъ.

Вторая комета открыта *Ольберсомъ* 6 Марта 1815 года. *Бессель* нашелъ, что время ея обращенія содержитъ 74,043 года; она должна явиться въ 1881 году. Удивительно, что между кометами, прежде наблюдаемыми, не нашлось ни одной, которая бы имѣла одинакіе элементы съ кометою Ольберса.

Третья комета открыта *Понсомъ* (*Pons*) 26 Ноября 1818 года. *Энке* нашелъ посредствомъ вычисленія, что она имѣетъ весьма короткое время обращенія, 5,516 года; она была уже наблюдаема 7 разъ: въ 1828, 1825, 1822, 1819, 1805, 1795 и 1786 годахъ, и названа кометою *Понс-Энке*. Замѣчательно, что время ея обращенія дѣлается короче.

Четвертую комету открылъ *Белла* 27 Февраля 1826 г. и первый показал время ея обращенія, равное 6,74 года. Она была наблюдаема два раза: въ 1805 и 1772 годах, и названа *кометою Беллы*.

Когда кометы приближаются къ планетамъ солнечной системы, то претерпѣваютъ отъ нихъ возмущеніе, которое должно вычислять другимъ образомъ, нежели взаимное возмущеніе планетъ, ибо, по причинѣ большаго эксцентрицизма ихъ путей, нельзя дѣлать ихъ сокращеній, которыми при планетахъ приносятъ большое удобство. Уже Галлею извѣстно было значительное дѣйствіе возмущеній на ту комету, которой онъ предсказалъ возвращеніе; отъ этихъ возмущеній послѣдующія времена обращенія разнились болѣе, нежели на цѣлый годъ. *Лавро*, основываясь на своемъ рѣшеніи задачи о трехъ тѣлахъ, нашелъ, въ 1758 году, что возвращеніе Галлеевой кометы къ перигею, отъ дѣйствія Сатурна, замедлилось на 100 дней, а отъ дѣйствія Юпитера на 518 дней, и что она пройдетъ чрезъ свой перигей 15 Апрѣля 1759 г. Еще значительнѣе были возмущенія отъ планетъ на комету, которая прошла чрезъ свой перигей 15 Августа 1770 г. — *Лексель* нашелъ, что время обращенія ея равно $5\frac{1}{2}$ годамъ, и подробныя вычисленія *Вулгарда* подтверждали этотъ выводъ; но не могли объяснить, отчего путь этой кометы не имѣетъ сходства ни съ однимъ изъ путей прежде наблюдаемыхъ и вычисленныхъ кометъ, и отчего она послѣ не двинулась. *Лаплас* нашелъ, что въ 1767 году, когда она была близка къ Юпитеру, путь ея, вѣроятно бывшій прежде весьма эксцентрическимъ, перемѣнился такъ, что время обращенія ея сдѣлалось $5\frac{1}{2}$ лѣтъ, и что ее опять увидѣли бы въ 1776 году, еслибъ она, во время прохожденія чрезъ перигей, была надъ горизонтомъ мочью; и что потомъ, въ 1779 году, когда она во второй разъ проходила очень близко отъ Юпитера, путь ея опять перемѣнился въ весьма эксцентрическій, и потому она еще и теперь находится отъ насъ въ великомъ удаленіи. Эта комета, въ 1770 году, прошла почти чрезъ середину системы Юпитеровыхъ спутниковъ, и перваго Юля того же года находилась отъ земли только въ шесть разъ далѣе луны; но она не пролетѣла ни въ системѣ четырехъ спутниковъ, ни въ двѣ-

женіи земли ни надѣяшаго возмущенія. Изъ этого можно заключить, что малость кометъ вообще чрезвычайнаго мала, и что сдѣлавъ точно, при желаніи еще ихъ разсмотрѣніи отъ земли, близость ихъ не должна причинять намъ никакого опасенія.

Вѣроятно, что пространство, которое отдѣляетъ тѣла нашей солнечной системы одно отъ другаго, наполнено чрезвычайно тонкою и прозрачною матеріею, и что тѣла въ этомъ эфирѣ движущіяся, претерпѣваютъ отъ него сопротивленіе. При планетахъ — тѣлахъ плотныхъ и твердыхъ — это сопротивленіе должно быть весьма незначительно, потому что до сихъ поръ никакія наблюденія надъ движеніемъ планетъ не показали существованія подобнаго сопротивленія; но кометы — тѣла чрезвычайно разширенныя, и состоящія изъ клочковатой ткани, безъ сомнѣнія претерпѣваютъ отъ этой среды гораздо болѣе сопротивленіе. Такого рода движеніе подвергли анализу, и нашли, что если середина лѣтеть весьма малую плотность, а путь кометы весьма малый эксцентрицизмомъ, то большая ось эллипса всегда будетъ уменьшаться, а время обращенія кометы дѣлаться короче, между тѣмъ какъ угловая скорость ея будетъ возрастать. Отъ такого уменьшенія большой оси, комета безпрерывно должна приближаться къ солнцу, и наконецъ упасть на него. *Энке* въ самомъ дѣлѣ замѣтилъ уменьшеніе времени обращенія кометы, названной его именемъ, и этия самымъ заснѣвалъ впредь обратити вниманіе на обшительство, которое прежде совершенно выпускали изъ виду.

Физики и астрономы изобрѣли разныя гипотезы для объясненія происхожденія кометныхъ хвостовъ. Предѣлы нашего Лексикона не позволяютъ намъ изложить ихъ даже въ сокращенномъ видѣ; ограничимся указаніемъ на главнѣйшія сочиненія, въ которыхъ можно почерпнуть обширныя познанія о кометахъ: *Pingré, Cometographie; Laplace, Mécanique céleste; Lagrange, Mécanique analytique; Olbers, Abhandlung über die leichteste und bequemste Art, die Bahn eines Cometen etc. Delambre, Astronomie; Bode, Considérations générales sur les orbites des planètes et des comètes; Schubert, Astronomie; Lüttrou, Astronomie; Niebuhr des Himmel;*

drago, Annuaire du bureau des longitudes 1832; Döbere, Komiten-Verzeichniß и пр.

КОМЕТОГРАФИЯ. КОМЕТОГРАФИЯ. Отрасль Астрономии, занимающаяся описаніем кометъ. Смол. предыдущую статью.

COMMENSURABILITÉ. (Арие. и Геом.) **СОИЗМѢРНОСТЬ.** Смол. ниже.

COMMENSURABLE. (Арие. и Геом.) **СОИЗМѢРИМЫЙ.** *Созизмеримыми величинами* называются такія, которыя имѣютъ общую мѣру. См. **MESURE, INCOMMENSURABLE.** И такъ, числа 9 и 15 *созизмеримы* между собою, ибо каждое изъ нихъ дѣлится безъ остатка на 3, и это число будетъ общему ихъ мѣрою. Аршинъ и Россійскій (Англійскій) футъ также *созизмеримы*, потому что имѣютъ общую мѣру, именно, дюйма; действительно, аршинъ заключается въ себя 28 дюймовъ, а футъ, 12. — Вся цѣлая числа *созизмеримы* между собою, и за общую ихъ мѣру можно принимать *единицу*. Напротивъ того, $\sqrt{2}$ будетъ величина несоизмерима относително всякаго цѣлаго числа или дроби, у которой какъ числитель такъ и знаменатель, *цѣлые числа*.

COMMENSURABLE EN PUISSANCE. **СОИЗМѢРИМЫЙ ВЪ СТЕПЕНИ,** въ квадратъ. См. **BIMEDIAL.**

NOMBRES SOUS RATS COMMENSURABLES. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ, ГЛУХІЯ ЧИСЛА СОИЗМѢРИМЫЯ МЕЖДУ СОБОЮ. Такія числа, коихъ взаимное отношеніе определяется дробью раціональною. См. **RATIONNEL, IRRATIONNEL.** Таковы количества $\frac{5}{7}\sqrt{2}$ и $2\sqrt{3}$, которыя содержатся одно къ другому какъ 5 къ 2.

Дроби, у которыхъ числитель и знаменатель цѣлыя числа, должны также быть принимаемы за *созизмеримыя*; действительно, одна изъ нихъ будетъ относиться къ другой, такъ какъ цѣлое число къ другому, также цѣлому. Напримеръ, дробь $\frac{5}{7}$ и $\frac{4}{6}$ относятся первая ко второй, какъ 25 къ 28.

COMMOTION ÉLECTRIQUE. **ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СОТРАСЕНИЕ,** электрическій ударъ.

COMMUN. (Геом.) **ОБЩІЙ.** Когда уголъ, линия, площадь и проч. принадлежать въ одно время двумъ фигурамъ, то говорится, что шомъ уголъ, та линия, та площадь *общіе* имъ обѣимъ.

Напримѣръ: *deux triangles ayant un côté commun; два треугольника имѣющие общую сторону.* — Посредствомъ *общихъ* частей часто доказываютъ равенство площадей двухъ различныхъ фигуръ, напримѣръ, въ квадратурахъ *Гиппократовыхъ* луночекъ. См. **LUNULE.** — Въ Ариметикѣ и Алгебрѣ: *commun diviseur, общій дѣлитель.* Смол. **DIVISEUR.**

COMMUNICATION DE MOUVEMENT. (Мех.)

СООБЩЕНІЕ ДВИЖЕНІЯ. При взаимномъ соудареніи тѣлъ сообщаютъ движеніе одно другому, и, послѣ удара, движеніе ихъ переизмѣняется. Что касается до законовъ, по которымъ происходитъ сообщеніе движенія, то отсылаемъ читателей къ статьѣ **CHOC.**

COMMUNIQUEANS (VASES, TUBES, TUYAUX). **СООБЩИТЕЛЬНЫЕ СОСУДЫ, ТРУБКИ, ТРУБЫ.**

COMMUTATION (ANGLE DE). (Астр.) **УГОЛЬ ИЗМѢНЕНІЯ.** Смол. **ANGLE.**

COMMUTATIVES (FONCTIONS). (Анал.) **ОБМѢННЫЯ ФУНКЦІИ.** Такъ назыв. Г. Сервуа (Servois) [Смол. *Annales de Mathématiques, Tome V*] далъ функціи f и F такого свойства, что

$$f[F(u)] = f[F(u)],$$

разумѣя подъ u какое нѣ есть количество. И такъ, известные формулы

$$d, u = f(u), d^2 u = f^2(u)$$

представляють примѣры *обмѣнныхъ функцій.*

Тотъ же математикъ называетъ *распределительными функціями* (*fonctions distributives*) двѣхъ, которыя определяются формулою

$$F(u + v) = F(u) + F(v),$$

гдѣ u и v изображаютъ какія нѣ есть количества. Таковы напримѣръ известные формулы изъ Искисленія Разностей

$$\Delta(u + v) = \Delta u + \Delta v, \Sigma(u + v) = \Sigma u + \Sigma v.$$

Числители могутъ найтись въ Разсужденіи Г-на Сервуа, помѣщенномъ какъ мы уже сказали выше въ *Annales de Mathématiques Tome V*, предложенія сихъ двухъ родовъ функцій къ разнымъ статьямъ Дифференціальнаго и Интегральнаго Искисленія.

COMPAGNE DE LA CYCLOIDE, PETITE CYCLOIDE, TROCHOIDE. (Геом.) **СПУТНИЦА ЦИКЛОНЫ, МАЛАЯ ЦИКЛОИДА, ТРО-**

ХОНДА. Трансцендентная кривая, следующего образования: пусть будет круг $AFGH$ (черт. 7 лист IV), AF его диаметр, и C его центр. Если каждую ординату pt круга продолжим, и возьмем pt равным дугу An , то точка t будет принадлежать *трохоиде*; таким образом получится кривая линии вида $DLAKE$. Прямая DE очевидно равная окружности круга производящего $AFGH$, называется *основанием* широмы.

Чтобы вывести уравнение широмы, положим $Ct = r$, $Ar = x$, $pt = y$; так как по самому определению этой кривой $pt = y = \text{дуга } An$, то надлежит найти выражение для дуги An . Если изобразим угол ACn чрез φ , то получим

дуга $An = r\varphi$ и $r - x = r \cos \varphi$;
следовательно

$$\varphi = \arccos \frac{r-x}{r},$$

и наконецъ

$$y = r \arccos \frac{r-x}{r} \text{ или } x = r - r \cos \frac{y}{r}.$$

Вотъ уравнение *трохоиды* въ прямоугольных координатахъ. Легко усмотреть изъ него, что въ точкахъ K и L кривая изъ вогнутого состояния переходить въ выпуклое, и следовательно, что K и L суть точки изгиба. Смотри: INFLEXION (POINT D').

Чтобы получить площадь, заключающуюся между диаметромъ AF , полу-основаниемъ FE , и частью AKE широмы, стоитъ только взять интегралъ $\int y dx = r \int \arccos \frac{r-x}{r} dx$ между пределами $x = 0$ и $x = 2r$ (Смотри. AIRE); интегрируя по частямъ, найдемъ

$$r \int \arccos \frac{r-x}{r} dx = r^2 \sqrt{1 - \left(\frac{r-x}{r}\right)^2} - r(r-x) \arccos \frac{r-x}{r};$$

если же возьмемъ этотъ интегралъ отъ $x = 0$ до $x = 2r$, то получимъ для искомой площади полу-широмы выражение

$$r^2 \arccos(-1) = \pi r^2.$$

И такъ, *полная площадь трохойды DLAKE* равна удвоенной площади круга производящего $AFGH$.

Что касается до пространства $ACKtA$, то легко видеть, что оно сложаемо; и действительно, для получения его, стоитъ только предъидущий интегралъ взять между пределами $x = 0$ и $x = r$, и тогда получимъ просто r^2 . Слѣдо-

вательно, *площадь ACKtA равна квадрату, построенному на радиусъ круга производящего.*

Такъ какъ *трохоида*, по своему образованию, имѣетъ большое сходство съ *циклоидою*, то для сличенія сихъ двухъ кривыхъ отсылаемъ читателей къ статьѣ: CYCLOIDE.

COMPAGNIE (RÈGLE DE) или RÈGLE DE SOCIÉTÉ. (АЛГ.) ПРАВИЛО ТОВАРИЩЕСТВА.

Это правило имѣетъ предметомъ раздѣленіе даннаго числа на части, пропорціональныя даннымъ числамъ. Его названіе произошло отъ того, что въ задачахъ, относящихся къ нему, обыкновенно требуется раздѣлить прибыль или убытокъ между нѣсколькими купцами, или *товарищамъ* по торгу, положившими различныя капиталы для совершенія какого либо торговаго оборота.

Обыкновенныя задачи, относящіяся къ правилу товарищества, приводятъ къ рѣшенію уравненій первой степени или къ пропорціямъ. Напримеръ:

п купцовъ заключили между собою общій торгъ, и составили капиталъ с; первый положилъ сумму a' , второй a'' , третій a''' , и такъ далѣе. Этотъ капиталъ принесъ чистой прибыли сумму b ; спрашивается, какую часть каждый купецъ долженъ получить изъ суммы b ?

Означая чрезъ a' , a'' , a''' ,... эти части, и замѣнивъ что онѣ должны быть соотвѣстственно пропорціональны суммамъ a' , a'' , a''' ,... очевидно получимъ уравненія

$$a' + a'' + a''' + \dots = c, \quad a' + a'' + a''' + \dots = b,$$

$$\frac{a'}{a''} = \frac{a''}{a''} = \frac{a'''}{a''} = \dots = \frac{a' + a'' + a''' + \dots}{a' + a'' + a''' + \dots} = \frac{b}{c};$$

следовательно

$$a' = \frac{ba'}{c}, \quad a'' = \frac{ba''}{c}, \quad a''' = \frac{ba'''}{c}, \dots$$

Но когда время обращенія вкладныхъ суммъ предполагается не одинаковымъ для всѣхъ вкладчиковъ, и сверхъ того принимаютъ въ соображеніе сложные проценты, то задача дѣлается гораздо сложнее, и рѣшеніе ея уже зависить отъ опредѣленія корня уравненія высшей степени. Правило, служащее для рѣшенія такого рода задачъ, называется *правиломъ товарищества съ расчетомъ времени* (*règle de compagnie à temps*). Вотъ примѣръ:

Два купца, для совершения известного торгового оборота, составили капиталъ положили съ самаго начала: первый, сумму a' , а второй, b' ; по истечении одного года, первый купецъ внесъ въ общий капиталъ сумму a'' ; по истечении двухъ лѣтъ, второй купецъ положилъ сумму b'' ; по истечении трехъ лѣтъ, вклады купцовъ были: первого a''' , а второго, b''' . Въ концѣ четвертаго года оказалось, что чистая прибыль въ сего предпріятія равна суммѣ d ; спрашивается, сколько приходился на долю каждаго изъ двухъ купцовъ?

Для рѣшенія этого вопроса со всюю строгостію, надлежитъ опредѣлить настоящее значеніе каждаго изъ суммъ a' , b' , a'' и проч. то есть, рассматривая эти суммы со дня поступленія ихъ въ общій капиталъ, до дня раздѣла прибыли. Следовательно, каждый изъ вкладовъ долженъ быть рассматриваемъ, какъ еслибы онъ былъ внесенъ для обращенія изъ процентовъ съ присовокупленіемъ ихъ къ капиталу; такса же процентовъ, зависящая отъ прибыли, должна быть одинакова для обоихъ вкладчиковъ. Пустьъ будетъ x эта такса. Такъ какъ суммы a' и b' обращаются четыре года, то, по прошествіи этого времени, онѣ должны доставлять соответственно (См. INTERÊT)

$$(A) \quad a' [(1+x)^4 - 1]$$

$$(B) \quad b' [(1+x)^4 - 1];$$

сумма a'' , обращающаяся при года, доставитъ

$$(A') \quad a'' [(1+x)^3 - 1];$$

сумма b'' , обращающаяся два года, доставитъ

$$(B') \quad b'' [(1+x)^2 - 1];$$

наконецъ, суммъ a''' , b''' , обращающихся одинъ годъ, доставитъ соответственно

$$(A'') \quad a''' [(1+x) - 1] = a'''x$$

$$(B'') \quad b''' [(1+x) - 1] = b'''x.$$

Сложивъ величины (A) , (A') и (A'') , получимъ долю перваго купца, а сумма величинъ (B) , (B') и (B'') изобразитъ долю втораго. Но такъ какъ полная прибыль равна d , то и найдемъ уравненіе

$$(1) \quad (a' + b') [(1+x)^4 - 1] + a'' [(1+x)^3 - 1] + b'' [(1+x)^2 - 1] + (a''' + b''')x = d.$$

Вотъ уравненіе 4-ой степени, опредѣляющее x . Когда найдемъ изъ него величину x , то доля купца въ прибыли будетъ соответственно:

$$a' [(1+x)^4 - 1] + a'' [(1+x)^3 - 1] + a'''x$$

$$b' [(1+x)^4 - 1] + b'' [(1+x)^2 - 1] + b'''x$$

Если въ рѣшенной сей-часъ задачѣ не будемъ принимать въ расчетъ сложныхъ процентовъ (что обыкновенно и дѣлаютъ), то рѣшеніе упрощается значительно образомъ, и вопросъ приводится къ уравненію первой степени. Дѣйствительно, тогда, вмѣсто членовъ $a' [(1+x)^4 - 1]$, $b' [(1+x)^4 - 1]$, $a'' [(1+x)^3 - 1]$, войдутъ величины $4a'x$, $4b'x$, $3a''x$, и уравненіе (1) приметъ видъ

$$4(a' + b')x + 3a''x + 2b''x + (a''' + b''')x = d,$$

изъ котораго выведемъ

$$x = \frac{d}{4(a' + b') + 3a'' + 2b'' + a''' + b'''};$$

следовательно, доли купцовъ будутъ:

$$\frac{(4a' - 3a'' + a''')d}{4(a' + b') + 3a'' + 2b'' + a''' + b'''},$$

$$\frac{(4b' - 2b'' + b''')d}{4(a' + b') + 3a'' + 2b'' + a''' + b'''}$$

Сказанное нами о правилѣ товарищества достаточно для того, чтобы читатели видѣли, какими образомъ поступать при рѣшеніи задачъ болѣе сложныхъ, относящихся къ тому же праву; но для полнаго уразумѣнія сего предмета, необходимо прочитывать всю статью INTERÊT.

COMPAGNIES D'ASSURANCES. См. ASSURANCES.

COMPARAISON. СРАВНЕНИЕ, СЛИЧЕНИЕ. La comparaison de ces deux équations nous montre que и проч. Изъ сличенія сихъ двухъ уравненій, видимъ, что и пр. La comparaison de ces deux figures conduit à la conséquence и проч. Сравненіе сихъ двухъ фигуръ приводитъ къ заключенію и проч.

COMPARER. СРАВНИВАТЬ, СЛИЧАТЬ. En comparant ces deux figures, ces deux triangles, on voit.... Счита я эти двѣ формулы, сравнил я эти двѣ треугольника, видимъ.....

COMPAS. (Геом.) ЦИРКУЛЬ; КРУЖАЛО. Инструментъ служящій для черченія круговъ и для измѣренія длинъ. Изобрѣтеніе циркуля приписываютъ *Талю*, извѣстнику *Адела*, извѣстнаго въ баснословныя времена Греціи усовершеніемъ Критскаго лабиринта. — Нѣтъ никакого сомнѣнія, что мысль объ инструментахъ столь простомъ, каковъ циркуль, должна принадлежать временамъ, въ которыхъ родились первоначальныя геометрическія соображенія, и следовательно, давность сего изобрѣтенія сливается съ началомъ самой Геометріи. — Приведемъ здѣсь названія

нѣкоторыхъ родовъ циркулей, которые были, или еще и теперь въ употребленіи.

Сомпас а trois branches. Циркуль о трехъ ножкахъ. Циркуль, посредствомъ котораго переносили разомъ три точки, или, что все равно, треугольничка съ одного листа бумаги на другой.

Сомпас а verge. Циркуль съ полоскою, служащей для черченія большихъ круговъ и измѣренія линій, значительной длины.

Сомпас davisson или сомпас а arc. Циркуль съ дугою, кружаломъ; употреблялся ремесленниками для вырѣзыванія круговъ на картонной бумагѣ, на мѣдныхъ листахъ, на жести, на деревѣ и проч.

Сомпас а l'allemande. Нѣмецкій циркуль; кривой, крошечный циркуль; циркули съ ножками нѣсколько возвышенными.

Сомпас а pointes changeantes. Циркуль съ выдвигными ножками. Такъ называется циркуль, у котораго одна ножка вынимается, и можетъ быть замѣнена другою.

Сомпас а ressort. Циркуль съ пружиною, служащий для измѣренія малыхъ линій.

Сомпас а pointes tournantes. Циркуль съ тремя ножками. Обыкновенный циркуль съ тою только разницею, что одна изъ трехъ ножекъ оканчивается трубчатою для карандаша, а другая, чертежнымъ перомъ.

Сомпас де proportion. Геометрическая шкала; пропорціональный циркуль. Англичане называютъ этотъ инструментъ *секторомъ*. Онъ состоитъ изъ двухъ равныхъ линеекъ (обыкновенно мѣдныхъ), соединенныхъ одними концами посредствомъ шарнира, около котораго линейки могутъ обращаться. На линейкахъ начертаны разныя линіи, изъ коихъ главныя суть: *линія равныхъ частей, линія хордъ, линія синусовъ, тангенсовъ и секансовъ, линія многоугольниковъ, линія калибровъ орудій, етъ дель* и пр. Подробное описаніе пропорціональнаго циркуля и употребленія его читатель найдетъ въ *Encyclopédie méthodique, Mathématique*, статья: *Сомпас де proportion*.

Нѣкоторые авторы приписывали изобрѣшеніе пропорціональнаго циркуля Нѣмцу Юсту Бирге (*Juste Byrge*); но, какъ замѣчаетъ Монтанья въ своей *Histoire des Ma-*

thématiques, инструментъ, изобрѣшенный Биргомъ, былъ циркуль совсѣмъ другаго рода, и служилъ только для раздѣленія линій на равныя части. Онъ состоялъ изъ двухъ линеекъ, соединенныхъ между собою посредствомъ шарнира, и обращающихся около него въ видѣ креста. Онъ перемѣнялся этого шарнире, отверстія линеекъ, снабженныхъ на концахъ своихъ остриями, получали желаемыя отношенія, наприкладъ, разномѣрныя между двумя верхними штильками могло раздѣляться $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ и проч. линіи, взявшею нижнія острия линеекъ. Кажется, изобрѣшателемъ пропорціональнаго циркуля можно считать Галлеа, который, въ 1607 году, издалъ трактатъ объ употребленіи сего инструмента; заглавіе этого сочиненія: *Operazioni del compasso geometrico e militare*. Сіе изображеніе подаю нѣкогда къ жаркому пренію между Галлеа и Неаполитанцемъ *Балтазаромъ Капра*. Послѣдній, въ изданномъ имъ сочиненіи на Латинскомъ языкѣ подъ заглавіемъ: *Balthazaris Capra, usus et fabrica circini proportionum* (1607 in-4^o), того же года и о томъ же предметѣ, приписывалъ себѣ открытіе упомянутаго инструмента. Читатели могутъ на сему спору въ преніемъ помянутого Галлеа.

Сомпас а coulisse, или сомпас де réduction. Циркуль съ пазомъ, циркуль для уменьшенія размѣровъ. Инструментъ, изобрѣшенный Юстомъ Биргомъ, и служащий для раздѣленія линій на равныя части, для вписанія въ кругъ правильныхъ многоугольниковъ и проч. См. выше.

Сомпас де réduction avec les lignes du сомпас де proportion. Циркуль съ пазомъ, строеніемъ своимъ нѣсколько совершеннѣе предыдущаго, и на которомъ начертаны нѣкоторыя изъ линій, помѣщаемыхъ на пропорціональномъ циркулѣ.

Сомпас spherique или d'épaisseur. Вогнутой циркуль, шаромаръ, крѣпкий циркуль. — Бомбомаръ, Ядромаръ. Циркуль, посредствомъ котораго измѣряются диаметры бомбъ, дѣръ, трубъ, калибры орудій и проч.

Сомпас elliptiques. Эллиптическихъ циркули. Циркули употребляемые для черченія эллипсовъ.

COMPAS DE TRISECTION. Особого рода циркуль, служащий для раздѣленія угла на три равныя части. Этого изобрѣшенія придумалъ Г. Таррагонъ (*Tarragon*). Читатели найдутъ описаніе его въ *Journal des Savants* за 1688 годъ въ Сентябльской книжкѣ и въ *Dictionnaire universel de Mathématique et de Physique*, par M. Saverien (Paris 1753), 1-й Том. стр. 199.

COMPAS DE MER или **COMPAS DE ROUTE.** КОМПАСЪ, СТАВОКЪ, МАТКА. Смолт. BOUSSOLE.

COMPAS DE VARIATION. Компасъ измѣненія. Обыкновенный компасъ снабженный алидадою съ діоптрами, и посредствомъ котораго опредѣляютъ измѣненія въ направленіи магнитной стрѣлки.

COMPAS AZIMUTHAL. Азимутальный компасъ. Компасъ измѣненія, но въ которомъ, для большей точности, сверхъ компаснаго кружка съ рубани въпродъ, находится мѣдный кругъ, раздѣленный на градусы, а иногда и на части градуса. Посредствомъ азимутальнаго компаса находятъ магнитный азимутъ какого либо свѣтила, напримѣръ солнца, а чрезъ сравненіе магнитнаго съ земнымъ азимутомъ, опредѣляютъ измѣненіе компаса. Изобрѣтеніе этого инструмента принадлежитъ Галлею. Для подробностей объ этомъ предметѣ отсылаемъ читателей къ трактатамъ о Навигациіи и къ Морскимъ Слова-рямъ.

COMPENSATEUR или **PENDULE A COMPENSATION.** УРАВНИТЕЛЬНЫЙ, ПОСТОЯННЫЙ, НЕИЗМѢННЫЙ МАЯТНИКЪ, КОМПЕНСАТОРЪ. Маятникъ не подверженный вліянію температуры; этого приборъ придуманъ въ 1730 году извѣстнымъ Англійскимъ механикомъ *Tarrasonom*.

Всѣ шты, отъ дѣйствія тепла разширяются, а отъ холода сжимаются. И шты, въ первомъ случаѣ, обыкновенный часовой маятникъ дѣлается длиннѣе, и следовательно качанія его замедляются, а во второмъ, напротивъ того, они ускоряются. Для отвращенія этой причины не-правильности хода часовъ, придумали устраи-вать постоянные маятники, то есть такіе, въ которыхъ разстояніе центра качанія отъ оси вращенія не измѣняется, какова бы ни была температура окружающаго воздуха.

Для достиженія этой цѣли, обыкновенно дѣлаютъ маятники изъ нѣсколькихъ металличе-скихъ прутьевъ, причѣмъ употребляютъ металлы различной разширяемости, обыкновенно желѣзо и мѣдь. Снарядъ устраиваютъ такъ, чтобы при удлинненіи маятника отъ увеличенія темпера-туры, чечевица поднималась, а съ укороченіемъ его отъ пониженія температуры, чечевица опу-калась; если, при такомъ устройствѣ, центръ качанія маятника съ перемѣною температуры не будетъ перемѣнять своего разстоянія отъ оси привѣса, то качанія будутъ одновременны, и следовательно получатъ неизмѣнный маятникъ.

Стеклянная трубка, въ которую налитъ извѣстное количество ртути, можетъ также слу-жить уравнительнымъ маятникомъ. Дѣйстви-тельно, стеклянная трубка будетъ удлиняться отъ теплоты и укорачиваться отъ холода; но между шты ртутью, заключающагося въ нижней части трубки, разширяется или сжимается въ большемъ содержаніи прошивъ стекла, и въ про-тивную сторону; следовательно, центръ качанія прибора будетъ опускаться отъ одной причи-ны, а подыматься отъ другой, и легко понять, что соразмѣря надлежащимъ образомъ количе-ство ртути, достигнемъ наконецъ до того, что центръ качанія прибора останется неизмѣннымъ, и тогда получимъ маятникъ, не подверженный уже вліянію температуры.

Уравнительные маятники употребляются преимущественно въ астрономическихъ часахъ и карманныхъ хронометрахъ; но такъ какъ въ сихъ послѣднихъ маятникъ круглый, и приво-дится въ движеніе спиральнымъ волоскомъ, то описанное выше устройство уравнителя должно быть нѣсколько измѣнено. Читатели найдутъ въ курсахъ Физики по этому предмету желае-мая подробности, которыя, по свойству нашего Лексикона, не могутъ быть предложены въ немъ.

COMPENSATION. Смолт. выше.

COMPLANATION DES SURFACES, то же что **QUADRATURE DES SURFACES** (Смолт.).

COMPLÉMENT. ДОПОЛНЕНИЕ. Такъ называет-ся вообще величина, которая будучи приложена къ другой, составляетъ одно, какое нибудь услов-ное цѣлое. И такъ это слово заключаетъ въ себѣ понятіе относительное.

Сомплément arithmétique. Арифметическое дополнение. Когда вычтем какое нибудь целое число N из другого, выраженного единицею съ столькою нулями, сколько N содержитъ въ себѣ цифръ, то получимъ разность, которая называется *арифметическимъ дополнениемъ* данного числа N . Такъ наиримѣрь, арифметическое дополнение числа 5597 будетъ 4603, ибо $10000 - 5597 = 4603$. Употребление арифметическихъ дополненій сокращаетъ численные выкладки тѣмъ, что *вычитанія* замѣняются *сложениями*.

Сомплément d'une fraction. Дополнение дроби. Разность между единицею и предложеною дробью, которая предполагается правильною. Наиримѣрь, дополнение дроби $\frac{5}{7}$ есть $\frac{2}{7}$ поному что $1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$.

Сомплément d'un logarithme. Логарифическое дополнение, дополнение логарифма. Логарифмическимъ дополнениемъ числа называется логарифмъ числа ему обратнаго. Обратными числами именуется такіа, коихъ произведеніе равно единицѣ. Наиримѣрь $\frac{7}{11}$ и $\frac{11}{7}$ суть *числа обратныя*, ибо $\frac{7}{11} \times \frac{11}{7} = 1$. И такъ дополнение логарифма какого угодно числа a , будетъ равняться логарифму дроби $\frac{1}{a}$. Означивъ чрезъ L логарифмъ, а чрезъ L' дополнение логарифма, получимъ $L'(a) = L(\frac{1}{a}) = -L(a)$, следовательно также $L(\frac{1}{a}) = L(b) + L'(a)$. Положимъ наиримѣрь, что ищемъ дополнение $L(54521)$; будетъ $L(54521) = 4,7349678$; следовательно $L(\frac{1}{54521}) = -4,7349678 = -5 + (1 - 0,7349678) = -5 + 0,2650322$. Это дополнение обыкновенно пишется такъ: $\bar{5},2650322$; знакъ $-$, поставленный надъ характеристикой, относится только къ ней, а десятичная дробь удерживаетъ положительный смыслъ. И такъ, еслибы требовалось опредѣлить логарифмъ дроби $\frac{100000}{54521}$, то, въ силу сказаннаго выше, имѣли бы

$$L\left(\frac{100000}{54521}\right) = L_{100000} + L_{54521} = 5 + \bar{5},2650322 = 0,2650322.$$

Употребленіе логарифмическихъ дополненій, какъ видно изъ приведеннаго примѣра, представляють ту выгоду что вычитаніе десятичныхъ дробей приводится къ ихъ сложению.

Сомплément arithmétique d'un logarithme. Арифметическое дополнение логарифма. Разность между какою нибудь целымъ числомъ, наиримѣрь 10-ю, и даннымъ логарифмомъ. И такъ, арифметическое дополнение логарифма $L(54521) = 4,7349678$, равняется $10 - 4,7349678 = 5,2650322$. Смол. **Сомплément arithmétique**

Сомплément. (Геом.) **ДОПОЛНЕНИЕ.** *Complément d'un angle* или *d'un arc.* Дополнение угла или дуги. Избытокъ прямого угла или 90° предъ даннымъ угломъ или дугою. Наиримѣрь, дополнение угла или дуги въ 36° есть уголъ въ 54° , ибо $90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$. — Въ сферическомъ треуголн, *дополнение угла* есть избытокъ 180° предъ даннымъ угломъ.

Сомплément d'un angle à 180°, или просто, *supplément d'un angle.* Дополнение угла къ 180° , или, *добавленіе.* Разность между 180° (или, 200° въ сферическомъ треуголн, и даннымъ угломъ. Наиримѣрь, дополнение угла къ 85° къ 180° , есть 95° , ибо $180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$.

SINUS SOMPLÉMENT; то же что **COSINUS** (См.).

Сомплément d'un parallélogramme.

ДОПОЛНЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА. Когда въ какомъ нибудь параллелограммѣ $ABCD$ чертн 8. Листъ IV, чрезъ какую угодно точку O діагонали AD , проведутся двѣ линіи EF и GH , параллельныя сторонамъ AB и BD параллелограмма $ABCD$, то получатся два параллелограмма $CEGO$ и $HBFO$, не пересѣкаемые діагональю AD . Эти два параллелограмма и называются *дополненіями* данного. Параллелограммы $CEGO$ и $HBFO$ имѣютъ то свойство, что площади ихъ равны; и дѣйствительно, такъ какъ $L + \beta + \gamma = M + \alpha + \delta$, то по причинѣ $\beta = \alpha$ и $\gamma = \delta$, будетъ $L = M$.

Сомплémentaire (arc). ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ДУГА, ДОПОЛНЕНИЕ. Избытокъ дуги въ 90° предъ данною дугою; наиримѣрь, если данная дуга 50° , то *дополнительная дуга* будетъ 60° . Смол. **Сомплément.**

Сомплémentaire (fonction). (Нитт Исч.) **ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ФУНКЦІЯ.** Лейбница,

занимаясь изложением началъ Дифференціального Искисленія, занимаясь привѣщательную аналогію между степенями и дифференціалами. См. ANALOGIE DES DIFFERENCES AVEC LES PUISSANCES. Это самое привело его къ разсмотрѣнію дифференціалов отрицательнаго порядка, принимая ихъ за интегралы; онъ даже предлагалъ возможность извлечь пользу изъ дифференціаловъ какого нѣ есть порядка, то есть: дробнаго, ирраціональнаго и даже лишняго. Но извѣстно, что когда дифференцируемъ функцию — n разъ, то есть, когда интегрируемъ ее n разъ, то, для дополненія этого дифференціала — n -го порядка, надлежитъ прибавить къ нему цѣлую рациональную функцию степени $n - 1$. Эта функция, обращающаяся въ нуль при $n = 1$, называется *дополнительною*. И такъ, если возьмемъ дифференціалъ — 3-го порядка количества x , то получимъ $\frac{x^4}{2.3.4}$, а дополнительная функция этого дифференціала будетъ $Cx^3 + Cx + C''$. Вообще, если означимъ чрезъ $f(x)$ функцию, для которой ищемъ дифференціалъ какого нѣ есть порядка i , то, для дополненія дифференціала $d^i f(x)$, надлежитъ прибавить къ нему некоторую функцию, именуемую *дополнительною*. Эта функция очевидно должна быть такова, чтобы ея дифференціалъ порядка — i равнялся нулю. И такъ, изобразивъ чрезъ $\eta(x)$ функцию, удовлетворяющую условию $d^{i-1} \eta(x) = 0$, получимъ для полнаго дифференціала i -го порядка функции $f(x)$ слѣдующую сумму: $d^i f(x) + \eta(x)$. См. DIFFÉRENTIEL (CALCUL), INTEGRAL (CALCUL).

Нѣкоторые математикѣ утверждаютъ, что дополнительная функция $\eta(x)$ будетъ, во всѣхъ случаяхъ, цѣлая рациональная функция переменной x ; но доказательство, на которомъ они основываютъ это предположеніе, кажется, не совсѣмъ удовлетворительно.

COMPLET. ПОЛНЫЙ. Carré, cube complet; полный квадратъ, кубъ. Intégrale complète; полный интегралъ. Интегралъ дифференціальной функции, или дифференціального уравненія, съ присоюуженіемъ къ нему одного или нѣсколькихъ постоянныхъ произвольныхъ величинъ. См. INTEGRAL (CALCUL), DIFFÉRENTIELLES (ÉQUATIONS).

COMPLETIF. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ, ДОБАВОЧНЫЙ. Quantité complétive; добавочное, дополнительное количество.

COMPLÉTER. ДОПОЛНИТЬ. Compléter un carré, дополнить квадратъ.

COMPLEXE. МНОГОЧЛЕННЫЙ, СЛОЖНЫЙ.

Quantité complexe; многочленное, сложное количество. Количество состоящее изъ нѣсколькихъ частей, опредѣленныхъ знаками $+$ и $-$; такъ, напримеръ, количество $a + b - c$. Nombre complexe; сложная дробь, то есть цѣлое число съ дробью, напримеръ $3 \frac{1}{2}$; также именованное число, напримеръ 3 саж. 2 арш. 3 вер. 5 дп. 8 час. 40 мин. 15 сек. и проч.

COMPLETION. СЛОЖНОСТЬ. Сюм. COMBINATOIRE (ANALYSE).

COMPLICATION. МНОГОСЛОЖНОСТЬ. Extrême complication des formules, des calculs numériques; чрезвычайная многосложность формулъ, численныхъ выкладокъ.

COMPLIQUÉ. СЛОЖНЫЙ. Construction géométrique compliquée; сложное геометрическое построеніе. Formules compliquées, сложные формулы. Ces calculs sont très compliqués; эти выкладки очень сложны. Problème très compliqué; многосложная задача.

COMPONENDO. Сюм. COMPOSITION.

COMPOSANT (COUPLE). СОСТАВЛЯЮЩАЯ ПАРА. Сюм. COUPLE.

COMPOSANTE. (Мех.) СОСТАВЛЯЮЩАЯ. Составляющими называются силы, происходящія отъ разложенія другой какой нѣ есть силы по произвольнымъ направленіямъ. Composantes horizontales, composante verticale; горизонтальная составляющая, составляющая вертикальная. См. PARALLELOGRAMME DES FORCES, FORCE.

COMPOSANTE DE LA VITESSE. СОСТАВЛЯЮЩАЯ СКОРОСТИ. См. PARALLÉLOGRAMME DES VITESSES.

COMPOSÉ. (Ариф.) СЛОЖНЫЙ, СОСТАВНОЙ.

Nombre composé; сложное, составное число. Такъ называется всякое цѣлое число, составленное изъ произведенія двухъ или большаго числа множителей, изъ коихъ исключается единица. Напримеръ, числа 35 и 56 суть сложные, ибо первое изъ нихъ равно произведенію 5×7 , а второе $2^3 \cdot 7$. Сюм. FACTEUR, DIVISEUR.

NOMBRES COMPOSÉS ENTIERUX, или, употребительные: *nombres qui ont un diviseur commun*. Числа имеющие общаго дѣлителя; наковы между собою приведенныя два числа 33 и 56; общій дѣлитель ихъ есть 7. Смол. **NOMBRE PREMIER, DIVISEUR**.

RAISON COMPOSÉE или RAPPORT COMPOSÉ. Сложное содержаніе. Содержаніе, получаемое чрезъ перемноженіе нѣсколькихъ простыхъ содержаній. Напримеръ дроби $\frac{10}{21}$ изображаетъ

сложное содержаніе двухъ простыхъ $\frac{2}{3}$ и $\frac{5}{7}$. См.

RAPPORT.

REGLE DE TROIS COMPOSÉE. Сложное тройное правило. Смол. **TROIS (REGLE DE)**.

QUANTITES COMPOSÉES, COMPLEXES или MULTIPLES. Смол. **COMPLEXE**.

PROBABILITE COMPOSÉE. Сложная вѣроятность. Смол. **PROBABILITE**.

COMPOSÉ (PENDULE). (Мех.) **СЛОЖНЫЙ МАЯТНИКЪ**. Всякое твердое тѣло, или неизмѣняемая система тѣлъ, приводимая въ движеніе силою нѣжески около неподвижной оси или точки. Смол. **PENDULE**.

MOUVEMENT COMPOSÉ Сложное движеніе. Движеніе, производимое нѣсколькими силами, действующими на тѣло въ одно время, но по различнымъ направленіямъ. Всякое криволинейное движеніе есть сложное. См. **MOUVEMENT**.

COMPOSITION. (Ариф.) *Par composition de raison*. Чрезъ сложеніе предыдущаго съ послѣдующимъ. Дѣйствіе посредникомъ котораго изъ геометрической пропорціи $a : b :: c : d$ выводится слѣдующія: $a + b : a :: c + d : c$ и $a + b : b :: c + d : d$. Въ этомъ самомъ смыслѣ употребляется Латинскій терминъ *compendio*. Когда же составляемъ пропорціи чрезъ вычитаніе одного члена содержанія изъ другаго, какъ напримеръ $a - b : a :: c - d : c$ и $a - b : b :: c - d : d$, то такое дѣйствіе выражаютъ Латинскіи словомъ *dividendo*. — Когда же, напротивъ того, за послѣдующій каждаго содержанія принимаемъ сумму или разность предыдущаго и послѣдующаго первоначальной пропорціи, то такое дѣйствіе именуетъ *convertendo* (*par conversion de raison*). И такъ, изъ пропорціи $a : b :: c : d$, выводимъ изъ преращеніе, $a : a + b :: c : c + d$

COMPOSITION DES FORCES. (Мех.) **СОВОКУПЛЕНІЕ, СЛОЖЕНІЕ СИЛЪ**. Приведеніе нѣсколькихъ силъ, действующихъ на матеріальную точку или на твердое тѣло къ менѣшему числу. Смол. **FORCE, RÉSULTANTE, PARALLÉLOGRAMME DES FORCES, COUPLE** и проч.

Здѣсь представляются два случая: 1°. Совокупленіе силъ действующихъ на одну точку; 2°. Совокупленіе силъ приложенныхъ къ нѣсколькимъ точкамъ, составляющимъ неизмѣняемую систему. Прежде нежели разсмотримъ эти два случая, приведемъ нѣкоторыя необходимыя предположенія, которыя могутъ быть приняты въ Механикѣ за аксіомы.

1°. *Дѣи силы равныя, приложенныя къ одной точкѣ по направленіямъ прямопротивуположнымъ, уравновѣсиваются между собою.*

2°. *Такое же свойство силы, приложенныя къ двумъ точкамъ, которыя соединены между собою неизмѣняемымъ образомъ, также уравновѣсиваются.*

3°. *Точка приложенія силы можетъ быть перенесена по направленію силы, въ какую угодно другую точку, лишь бы только эти двѣ точки были соединены между собою неизмѣняемымъ образомъ.*

4°. *Если двѣ силы P и Q дѣйствуютъ по одному направленію и въ одну сторону, то онѣ совокупляются въ одну силу, равную ихъ суммѣ P + Q.*

О Совокупленіи силъ, действующихъ на одну точку.

Если нѣсколько силъ P, Q, R, ... приложены къ одной точкѣ по одному направленію и въ одну сторону, то равнодѣйствующая ихъ будетъ равна суммѣ $P + Q + R + \dots$, ибо разсматривая сперва только двѣ силы P и Q, получимъ, въ савѣщеніе предложенія 4-го, равнодѣйствующую $P + Q$; совокупляя силу $P + Q$ съ R, найдется равнодѣйствующая $P + Q + R$, и такъ далѣе.

Когда, при одинаковомъ направленіи силъ онѣ будутъ дѣйствовать въ одну сторону, а другія въ противоположную, то равнодѣйствующая опредѣлится избыткомъ суммъ силъ, дѣйствующихъ въ одну сторону, предъ суммою силъ, дѣйствующихъ въ противоположную, и будетъ направлена въ

сторону силъ, для которыхъ получится большая сумма. Действительно, пусть силы P, Q, R, \dots действуют въ одну сторону, а P', Q, R', \dots въ противоположную. Такъ какъ равнодействующая первая будетъ $P+Q+R+\dots$, а вторыхъ $P'+Q'+R'+\dots$, то, положивъ $P+Q+R+\dots > P'+Q'+R'+\dots$, и написавъ первую сумму въ видѣ $P'+Q'+R'+\dots+(P+Q+R+\dots, -P'-Q'-R'-\dots)$, получимъ двѣ суммы $P'+Q'+R'+\dots$ и $P'+Q'+R'+\dots+(P+Q+R+\dots -P'-Q'-R'-\dots)$, действующія на точку по одному направлению, но въ противоположныя стороны. Двѣ силы равны и прямопротивоположны $P'+Q'+R'+\dots$ уничтожаются взаимно въ слѣдствіе предложенія 1-го, а останется, какъ сказано выше, равнодействующая $P+Q+R+\dots - P' - Q' - R' - \dots$.

Рассмотримъ теперь общій случай. Положимъ, что нѣсколько силъ P, Q, R, S, \dots действуют на точку m по какимъ нѣ есть направлениямъ; для совокупленія этихъ силъ, накладываемъ по направлению каждой изъ нихъ, отъ точки m , длины p, q, r, s, \dots соотвѣстственно пропорциональнымъ величинамъ P, Q, R, S, \dots . Такъ какъ равнодействующая R' двухъ силъ P и Q изобразится по величинѣ и по направлению діагональю r' параллелограмма, построеннаго на линияхъ p и q , пропорциональныхъ силамъ P и Q (см. PARALLELOGRAMME DES FORCES), то система силъ Q, R, S, \dots приведетъ къ силамъ R', R, S, \dots . Совокупивъ точно такимъ образомъ силы R' и R , то есть, построивъ параллелограммъ на линияхъ r' и r , и проведя діагональ, которой длину изобразимъ чрезъ r'' , получимъ равнодействующую R'' двухъ силъ R' и R ; и такъ же система первоначальныхъ силъ будетъ замѣнена силами R'', S, \dots . Продолжая это строеніе, найдемъ равнодействующую R''' двухъ силъ R'', S, \dots и такъ далѣе. Наконецъ, тѣмъ же путемъ достигнемъ до послѣдней изъ силъ P, Q, R, S, \dots , и найдемъ равнодействующую всѣхъ предложенныхъ силъ.

О совокупленіи силъ, действующихъ на неизменяемую систему.

а) О совокупленіи силъ параллельныхъ.

Рассмотримъ сперва случай силъ параллельныхъ, приложенныхъ къ точкамъ, которые соединены между собою неизменяемымъ образомъ.

Для совокупленія такихъ силъ, мы будемъ основываться на слѣдующей теоремѣ.

Дѣя какія нѣ есть параллельныя силы P и Q (черт. 9 Листъ IV), действующія въ одну сторону, то равнодействующая изъ точекъ неизменяемой прямой AB , или есть равнодействующая; эта равнодействующая 1^о, равна суммѣ $P+Q$ составляющихъ силъ, 2^о, параллельна имъ, направляется въ одну сторону съ ними, и заключается въ ихъ плоскости, и наконецъ 3^о, раздѣляетъ прямую AB на двѣ части, обратно пропорциональныя силамъ P и Q такъ что $\frac{OA}{OB} = \frac{Q}{P}$.

Доказательство. Приложимъ къ концамъ A и B , по направлению AB , двѣ силы равныя и прямопротивоположныя S и T ; дѣйствіе первоначальныхъ силъ P и Q не измѣнится, ибо, въ слѣдствіе предложенія 2-го, силы S и T будутъ уравниваться между собою. Если изобразимъ силу P линіею Ak , Q линіею Bm , а вводныя силы S и T равными длинами Al , Bn , то равнодействующая двухъ силъ P и S выразится діагональю Am , а равнодействующая силъ Q и T діагональю Bn ; пусть будетъ $Am = R'$, а $Bn = R''$. Продолжимъ линіи Am и Bn до общаго ихъ пересѣченія въ точкѣ C ; можно перенести точки приложенія силъ R' и R'' изъ A и B въ C (предложеніе 3^е). Проведемъ теперь изъ точки C линію CD , параллельную направлению силъ P и Q ; очевидно, что разложивъ силу R' , приложенную въ точкѣ C , на двѣ другія, одну по направлению CD , а другую, по линіи CS , параллельной прямой AB , получимъ составляющія P и S ; сила R'' , приложенная также къ точкѣ C , разложится на двѣ составляющія Q и T . Силы S и T , равныя и прямопротивоположныя, уничтожаются взаимно, и останутся только двѣ силы P и Q , действующія на точку C , оба по направлению CD ; следовательно, равнодействующая ихъ равна суммѣ $P+Q$, направляется параллельно составляющимъ силамъ P и Q , и дѣйствуетъ въ одну сторону съ ними.

Остается теперь найти точку O , въ которой равнодействующая $P+Q$ пересѣкается прямую приложенія AB . Для этого, замѣтимъ, что по строенію, треугольники AkC и ACO , также BmC и BCO подобны. Слѣдовательно

$$\frac{ak}{AO} = \frac{Al}{OC} \quad \text{и} \quad \frac{Bm}{BO} = \frac{Bn}{OC};$$

но $\overline{ak} = \overline{bm}$, и сверхъ того $\frac{kA}{mb} = \frac{P}{Q}$, почему и найдемъся

$$\frac{\overline{ak}}{P} = \frac{OA}{OC} \text{ и } \frac{\overline{ak}}{Q} = \frac{\overline{OB}}{OC};$$

раздѣля первое уравненіе на второе, получимъ

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{Q}{P},$$

что и имѣетъ въ виду доказать.

Для совокупленія двухъ параллельныхъ силъ въ томъ случаѣ, когда онѣ дѣйствуютъ въ противоположныя стороны, примемъ въ соображеніе систему трехъ параллельныхъ силъ P, Q, R (черт. 10, листъ IV), приложенныхъ къ точкамъ A, B, O неизмѣняемой прямой AB . Допустимъ, что эти три силы уравновѣшиваются между собою; въ такомъ случаѣ, въ слѣдствіе доказанной сей часъ теоремы, сила R , равная и противоположная равнодѣйствующей силъ P и Q , должна равняться суммѣ $P + Q$, проходить черезъ точку O , коей положеніе опредѣляется условіемъ $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{Q}{P}$, и наконецъ, должна быть направлена параллельно силамъ P и Q , но въ противоположную сторону. И такъ, если предположимъ, что даны силы P и R , дѣйствующія въ противоположныя стороны, то равнодѣйствующая имъ изобразится силою Q , направленною отъ B къ C , ибо сила Q , направляющаяся отъ B къ b , приводитъ силы P и R въ равновѣсіе. Но такъ какъ $R = P + Q$, то $Q = R - P$; следовательно, исконая равнодѣйствующая равняется разности $R - P$ составляющихъ силъ, имъ параллельна, и направлена въ одну сторону съ R , но есть съ большею изъ двухъ составляющихъ силъ. Что касается до точки приложенія B равнодѣйствующей, то она будетъ находиться на продолженіи прямой приложенія AO , и ближе къ наибольшей силѣ R . Если въ уравненіи $\frac{OA}{OB} = \frac{Q}{R-P}$ поставимъ $R - P$ вмѣсто Q , то, для опредѣленія точки B , получимъ

$$OB = \frac{P \times OA}{R - P}.$$

Здѣсь надобно сдѣлать одно замѣчаніе: чѣмъ меньше будетъ разность между составляющими R и P , тѣмъ меньше будетъ и равнодѣйствующая имъ Q , между тѣмъ какъ точка приложенія сей последней будетъ болѣе и болѣе удаляться отъ прямой приложенія AO . Наконецъ, если по-

ложимъ, что силы R и P равны между собою, то равнодѣйствующая имъ Q обратится въ нуль, а разность ея точки приложенія B отъ O ,

то есть линія $\overline{OB} = \frac{P \times \overline{OA}}{0} = \text{бесконечности}$.

Это самое приводитъ къ тому заключенію, что двѣ равныя параллельныя силы, приложенныя къ концамъ неизмѣняемой прямой, и дѣйствующія въ противоположныя стороны, не могутъ быть замѣнены одною силою. Такая совокупность двухъ силъ называется *парою*; См. COUPLE.

На этомъ основаніи весьма легко опредѣлять равнодѣйствующую сколькихъ угодно параллельныхъ силъ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему. Положимъ напримѣръ что имѣетъ четыре параллельныя силы P, Q, R, S (черт. 11, листъ IV), все направленныя въ одну сторону. Совокупимъ сперва силы P и Q ; ихъ равнодѣйствующая X равна суммѣ $P + Q$, и проходитъ черезъ точку O , которую опредѣляютъ раздѣляя прямую приложенія AB на двѣ части обратно пропорціональныя силамъ P и Q . Соединимъ потомъ O съ точкою C , къ которой приложена третья сила R . Равнодѣйствующая двухъ силъ X и R , которую изобразимъ черезъ X' , будетъ равна суммѣ $X + R$ или $P + Q + R$, и направлена ея пересѣчетъ прямую OC въ точкѣ O' такою, что $\frac{O'D}{O'C} = \frac{R}{X}$. Наконецъ, для совокупленія силы

X' и последней силы S , проведемъ линію $O'D$, и раздѣлимъ ее на двѣ части $O'D', O''D$, обратно пропорціональныя силамъ X' и S . Точка O'' будетъ точкою приложенія равнодѣйствующей X'' силъ X' и S , и сверхъ того имѣемъ $X'' = X' + S = P + Q + R + S$. Следовательно, равнодѣйствующая параллельныхъ силъ P, Q, R и S , направленна въ одну сторону, будетъ параллельна своимъ составляющимъ, и равна ихъ суммѣ. Точка O'' , черезъ которую проходитъ равнодѣйствующая X'' , называется *центромъ параллельныхъ силъ* P, Q, R, S ; См. CENTRE DES FORCES PARALLELES. Очевидно, что выведенное сей часъ слѣдствіе, а равно и приведенное строеніе, можетъ быть приложено къ какому угодно числу параллельныхъ силъ, дѣйствующихъ въ одну сторону.

Если бы изъ которыхъ нѣзъ данныхъ параллельныхъ силъ, напримѣръ $P, P', P'' \dots$ дѣйствующихъ

въ одну сторону, а другія, $Q, Q', Q'' \dots$ въ противоположную, но надлежало бы предварительно совокупить какъ силы P, P', P'', \dots , такъ и силы $Q, Q', Q'' \dots$. Изобразимъ чрезъ X равнодѣйствующую силъ P, P', P'', \dots , а чрезъ Y , равнодѣйствующую силъ $Q, Q', Q'' \dots$. Такимъ образомъ система силъ P, P', P'', \dots и $Q, Q', Q'' \dots$ приведется къ двумъ параллельнымъ силамъ X и Y , действующимъ въ противоположныя стороны, и равнодѣйствующая ихъ опредѣлится по правилу, приведенному выше. Если случится, что силы X и Y равны между собою, то онѣ или взаимно уничтожаются, или составляютъ пару, смотря по тому, будутъ ли эти силы прямопротивны, или нѣтъ.

б О совокупленіи силъ, имѣющихъ какия ни есть направленія

Пусть будутъ (черт. 12, листъ IV) силы P, Q, R, \dots , приложенныя къ неизмѣнной системѣ точекъ A, B, C, \dots , и имѣющія какия ни есть направленія въ пространствѣ. Для совокупленія этихъ силъ беремъ произвольную точку O , и предполагаемъ, что она соединена неизмѣнимымъ образомъ съ системою точекъ A, B, C, \dots . Къ точкѣ O , параллельно силѣ P , прикладываемъ двѣ силы прямопротивныя, изъ которыхъ каждая равна P ; очевидно, что первоначальная система не измѣнилась чрезъ введеніе этихъ двухъ силъ, взаимно уничтожающихся. И такъ, вѣсно силы P , приложенной въ A , мы можемъ разсматривать силу P , приложенную въ точкѣ O , и пару силъ $(P, -P)$, действующую на прямую AO . Пару $(P, -P)$, для большей удобности, можемъ перенести въ какую ни есть плоскость, параллельную самой плоскости пары, и эту систему продолжимъ; тогда останется только сила P , приложенная въ точкѣ O , и какъ бы перенесенная параллельно самой себѣ изъ A въ O . Если поспушимъ точно такимъ образомъ съ силами Q, R, \dots , относительно той же точки O , то очевидно, что всѣ онѣ соединятся въ этой точкѣ O , въ которой будутъ действующи параллельно прежнимъ своимъ направленіямъ; сверхъ того получатся пары $(Q, -Q), (R, -R), \dots$. Силы P, Q, R, \dots , действующія на точку O , совокупятся въ одну силу X по правилу параллелограмма силъ; что касается до паръ $(P, -P), (Q, -Q), (R, -R), \dots$,

то совокупности ихъ можетъ быть замѣнена одною равнодѣйствующею парою $(T, -T)$ (Смощ. COUPLE), приложенною къ прямой HK . И такъ, система силъ P, Q, R, \dots , приложенныхъ къ точкамъ A, B, C, \dots , соединенныхъ между собою неизмѣнимымъ образомъ, приводится къ одной силѣ X и къ одной парѣ $(T, -T)$, вообще не заключающихся въ одной плоскости.

Для равновѣсія подобной системы, сила X и пара $(T, -T)$ должны порознь уничтожаться. Если сила X находится въ плоскости пары $(T, -T)$, или въ плоскости ей параллельной, то X и пара $(T, -T)$ совокупляются въ одну силу.

Для совершеннаго уразумѣнія этого предмета читатели должны обратиться къ слѣдующимъ: FORCE, ÉQUILIBRE, PARALLÉLOGRAMME DES FORCES, COUPLE.

COMPOSITION DES COUPLES. Совокупленіе паръ. Смощ. COUPLE.

COMPOSITION DES VITESSES, DU MOUVEMENT. Совокупленіе скоростей, движеній. Такъ какъ совокупленіе скоростей или движеній производится по тѣмъ же правиламъ, какъ и совокупленіе силъ, то и описываемъ читателямъ къ спашью: COMPOSITION DES FORCES, а также къ PARALLÉLOGRAMME DES VITESSES, MOUVEMENT.

COMPOSITION DES EQUATIONS. (Алг. СОСТАВЛЕНІЕ УРАВНЕНІЙ. Дѣйствию, посредствомъ котораго составляются уравненія, когда корни предполагаются извѣстными, или дѣйствительны даны. Напримѣръ, если бы желали составить такое уравненіе, которое бы имѣла n корней равныхъ a , и корней равныхъ b , и двѣ однопочные корни c и d , то изобразявъ чрезъ x неизвѣстную, получили бы уравненіе

$$(x-a)^m (x-b)^n (x-c) (x-d) = 0.$$

Совершивъ обозначенія здѣсь умноженія, нашла бы исконое уравненіе, расположенное по нисходящимъ степенямъ неизвѣстной x .

COMPOST или COMPOSITE. (Смощ. COMPUT. COMPRENDRE. (Геом. и Алг.) ЗАКЛЮЧАТЬ.

Deux côtés et l'angle qu'ils comprennent étant donnés, décrire le triangle; по даннымъ двумъ сторонамъ и углу между ними заключающемуся, построить треугольникъ. — Equation composée dans une autre, уравненіе равнозначущее, тождественное съ дру-

елия. Например, уравнение $5x - 3y + 6 = 0$, *равнозначное* съ уравнением $x + y = 2 + \frac{6x}{5}$.

COMPRESSIBILITÉ (Физ.) СЖИМАЕМОСТЬ.

Одно из общих свойств телъ. См. CORPS. COMPRESSIBLE. Сжимаемый; — упругий. *Fluide compressible; сжимаемая, упругая жидкость.* Смол. FLUIDE.

COMPRESSION. СЖИМАНІЕ, СЖАТІЕ.

Сдавливаніе, сгнѣтеніе, сжсненіе. *Dénscissement, посредствомъ кшорато уменьшающъ объемъ тѣла.*

COMPRIMER. СЖАТЬ, СДАВИТЬ. — СГУСТИТЬ.

En comprimant un corps; сжимая тѣло. En compr mant l'air atmosphérique; сжимая, ссущая атмосферическій воздухъ.

COMPTE-RAS или ODOMÈTRE. ПУТЕМЪРЪ,

ШАГОМЪРЪ, ОДОМЕТРЪ. Инструментъ служащій для узнанія пройденнаго пути (числа шаговъ) пешеходомъ. *Одометръ* представляющъ также иногда и къ повозкамъ для опредѣленія, посредствомъ числа оборотовъ колесъ, пути который она прошла.

COMPUT, COMPOST или COMPOSITE ÉCLÉSIASTIQUE. СВЯТЫЦЫ, ЦЕРКОВНЫЙ КАЛЕНДАРЬ.

Говорится о календарѣ, употребляемомъ для нахождения подвижныхъ праздниковъ.

CONCAVE. (Геом.) ВОГНУТЫЙ.

Говорится о выпуклой части кривой линіи или поверхности. *Courbe, surface concave, вогнутая кривая, вогнутая поверхность.* Собственно, это слово имѣетъ только значеніе относительное; ибо, если кривая линія или поверхность съ одной стороны *вогнута*, то съ другой будетъ *выпукла*. См. ниже.

CONCAVITÉ. (Геом.) ВОГНУТОСТЬ.

Вогнутая часть кривой линіи или поверхности. *Вогнутая часть* кривой относительно прямой AB (черт. 13, листъ IV) находящаяся въ углѣ BOI , составляемомъ прямою AB съ касательною MT , проведенною къ какой нѣ есть точки M сей части кривой; *выпуклая часть* или *выпуклость* кривой (*convexité*), напротивъ того, находящаяся внѣ означеннаго угла (черт. 14, листъ IV). *Courbe tournant sa concavité или sa convexité vers l'axe des abscisses; кривая, обращенная своею вогнутостію или выпуклостію къ оси абсциссъ.* — Въ томъ же значеніи

должно разумѣть вогнутость и выпуклость кривой поверхности; но, въ этомъ случаѣ, вѣсто прямой AB , надлежитъ разсматривать плоскость, а вѣсто касательной линіи MT , касательную плоскость къ кривой поверхности въ той точкѣ, въ сопредѣльности которой разсматривается поверхность. Смол. INFLEXION.

CONCENTRER. (Меч.) СОСРЕДОТОЧИТЬ, КОНЦЕНТРИРОВАТЬ.

Когда тяжелое тѣло принимается за матеріальную точку, но предполагается, что вся масса его *сосредоточена* въ его центрѣ тяжести. — *Mettre une serie sous une forme plus concentree; представить рядъ въ видѣ болѣе сжатого.*

CONCENTRIQUE. (Геом.) ОДНОЦЕНТРЕННЫЙ, КОНЦЕНТРИЧЕСКИЙ, СОЦЕНТРЕННЫЙ.

Такъ называются два, или нѣсколько круговъ, имѣющихъ общій центръ. Это слово употребляется также иногда и въ томъ случаѣ, когда говорится о другихъ кривыхъ линіяхъ, имѣющихъ общій центръ. *Ellipses concentriques; одноцентричныя, concentricескія эллипсы.*

CONCHOÏDE. Такъ называли прежде конхонду. См. ниже.

CONCHOÏDE. (Геом.) КОНХОНДА. Алгебраическая кривая четвертой степени, изобрѣшенная Никомедомъ, и названная пошому Никомедовой конхондой (*conchoïde de Nicomède*).

Положимъ, что чрезъ точку C , (черт. 15, 16 и 17, листъ IV) линіи AB проведемъ перпендикуляръ EO . Пусть будетъ $CE = a$ и $CO = b$. Изъ точки O проводимъ произвольную прямую OH , и отъ точки F ея пересѣченія съ AB , оплскадываясь $FM = a$ и $FM' = a$. Точки M и M' будутъ принадлежать конхондѣ, первая, *верхней* ея вѣтви, а вторая, *нижней*.

Найдемъ теперь уравненіе конхонды. Примемъ точку C за начало координатъ, а линіи AB , EO соответственно за координатныя оси; пусть будетъ $\overline{CP} = x$, $\overline{PM} = y$. Если изъ точки M опустимъ на линію CE перпендикуляръ MQ , то треугольники OQM и MPF будутъ подобны; следовательно

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{MQ}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{FP}}.$$

Но $\overline{OQ} = \overline{CO} + \overline{PM} = b + y$, $\overline{MQ} = \overline{CP} = x$, $\overline{PM} = y$, $\overline{FP} = \sqrt{FM^2 - PM^2} = \sqrt{a^2 - y^2}$. И такъ, предъ-

дущее уравнение примемъ видъ

$$\frac{b+y}{x} = \frac{y}{y^2/a^2 - x^2},$$

или

$$x^2 y^2 = (b+y)^2 (a^2 - x^2).$$

Вопъ уравнение конхойды; изъ его разбора усмотримъ:

1-ое. Что когда $b > a$, то конхоида (черт. 15) будетъ имѣть четыре точки изгиба $K, K', K'',$ и K''' .

2-ое. Когда $b = a$, то конхоида имѣетъ только две точки изгиба K и K' , и, сверхъ того, одну точку возврата въ O (черт. 16).

3-е. Когда $b < a$, то конхоида имѣетъ также две точки изгиба K и K' , и одну двойную въ O (черт. 17).

4-ое. Во всѣхъ случаяхъ неопредѣленно продолженная линия AB будетъ асимптотическою къ обѣимъ вѣтвямъ конхойды.

Точка O называется полюсомъ конхойды (*pôle de la conchoïde*), а постоянная линия $CE = a$ высотой (*hauteur или règle de la conchoïde*).

Полярное уравненіе конхойды весьма просто: если изобразимъ чрезъ r радіусъ векторъ OM верхней ея вѣтви, а чрезъ φ уголъ MOE , то изъ треугольника OMQ получимъ $OQ = r \cdot \cos \varphi$, но $OQ = OC + CQ = b + MP$, а $MP = MF \cdot \cos \varphi$; следовательно $OQ = b + a \cdot \cos \varphi$, и наконецъ $b + a \cdot \cos \varphi = r \cdot \cos \varphi$, или $r = \frac{b}{\cos \varphi} + a$; для нижней вѣтви конхойды получили бы подобнымъ образомъ $r' = \frac{b}{\cos \varphi} - a$, гдѣ подъ r' разумемъ радіусъ векторъ OM' .

Древніе геометры употребляли Никомедову конхoidу для нахождения двухъ среднихъ пропорціональных между двумя данными числами, а также для раздѣленія угла на три части. Ньютонъ, Лейбнъ, Ла Кондаминъ и многіе другіе занимались изслѣдованіемъ свойствъ этой кривой. Объ конхойдахъ писаны были особые трактаты, между прочими: С. Wille, *Conchoïdis Nicomedae aequatio et indoles*; Göt., 1815 г., на Русскомъ языкѣ книга подъ заглавіемъ: *О геометрическомъ строеніи уравненій высшихъ степеней посредствомъ кривой линій, называемой конхойдою, и проч. соч. Шуберта*; перевелъ Н. Нагорный. С. П. Б. 1827 in-8°.

CONCHOÏDE PARABOLIQUE. ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ КОНХОИДА. Такъ называетъ Декартъ

плоскую кривую третьей степени, къ которой приводится рѣшеніе слѣдующей задачи: Даны пять прямыхъ линій, неопредѣленно продолженныхъ, изъ которыхъ четыре A, B, C, D параллельны между собою, а пятая E перпендикулярна къ нимъ; найти такую точку M , чтобы произведеніе трехъ перпендикулярныхъ разстояній точки M отъ прямыхъ A, B и C , равнялось произведенію двухъ перпендикулярныхъ же разстояній M отъ D и отъ E , помноженному на третью постоянную линію. Геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, удовлетворяющихъ прежнему условію, будетъ параболическая конхоида. Можно также представить образованіе параболической конхойды въ другомъ видѣ. Положимъ, что обыкновенная парабола движется по своей оси, и, при такомъ движеніи, увлекаетъ за собой прямую, проходящую чрезъ постоянную точку, именуемую полюсомъ, и чрезъ другую точку, которая находится на оси параболы, въ опредѣленномъ отъ вершины ея разстояніи. Последовательныя пересѣченія движущейся параболы съ прямою линіею будутъ принадлежать параболической конхойдѣ.

Когда, вмѣстѣ парабола, будемъ разсматривать кругъ, и предположимъ, что прямая постоянно проходитъ чрезъ его центръ, то получимъ обыкновенную конхoidу. Основываясь на томъ или на другомъ изъ предложенныхъ здѣсь спросеній параболической конхойды, можно безъ труда вывести уравненіе этой кривой.

CONCLURE. ЗАКЛЮЧИТЬ. *Conclure par analogie; заключить по аналогіи.*

CONCLUSION. ЗАКЛЮЧЕНІЕ, ВЫВОДЪ.

CONCOURANTES (FORCES или PUISSANCES).

(Мех.) **СИЛЫ ПЕРЕСѢКАЮЩИЯСЯ, СХОДЯЩИЯСЯ.** Силы, коихъ направленія пересѣкаются. *Forces concourantes или convergentes*; содѣйствующія силы; также называющіяся силами, производящими въ совокупности извѣстное дѣйствіе, въ противоположность тѣмъ, которыя производятъ дѣйствія противныя другъ другу.

LIGNES CONCOURANTES или CONVERGENTES.

(Геом.) **ПЕРЕСѢКАЮЩИЯСЯ, СХОДЯЩИЯСЯ ЛИНІИ.** **CONCOURIR. Геом., ПЕРЕСѢКАТЬСЯ, СХОДИТЬСЯ, СОЕДИНЯТЬСЯ.** Когда двѣ линіи

заключаются в одной плоскости, и не параллельны между собою, то они, быть продолжены, если нужно, пересыкаются взаимно.

CONCOURS (POINT DE) или **POINT D'INTERSECTION.** (Геом.) **ТОЧКА ВСТРЯЧИ, ТОЧКА ПЕРЕСЫКАНИЯ.** Точка, в которой две или несколько линий встрячаются или пересыкаются. *Point de concours de plusieurs rayons, тогда встрячи нескольких радиусов; фокус.* Смолт. FOYER.

CONCOURS (MÉTHODE PAR LES POINTS DE). (Перс.) **СПОСОБЪ ТОЧЕКЪ ВСТРЯЧИ, СПОСОБЪ СХОДА.** Способъ часто употребляемый для сопоставления перспективъ, и состоящий въ слѣдующемъ: положить, что желаемъ поставить въ перспективу известные предметы, и что положеніе картинной поверхности, какъ оптически снхъ предметовъ, такъ и относительно глаза, известно. Для этого проводимъ черезъ глаза двѣ произвольныя прямыя *A* и *B*, и поможемъ, черезъ каждую точку, которую имеемъ въ виду поставивъ въ перспективу, двѣ линіи параллельныя проведеннымъ черезъ глаза *A* и *B*. Пусть будутъ *P* и *Q* точки, въ которыхъ прямыя *A* и *B* встрячаются картинную поверхность, предполагаемую, для простоты, плоскою; *P* и *Q* будутъ *точками встрячи* или *точками схода* всѣхъ линій, параллельныхъ прямымъ *A* и *B*. Замѣтимъ теперь, что какая бы есть точка *O* пространства можетъ быть принята за вершину угла, коего стороны *a* и *b*, соответственно параллельныя прямымъ *A* и *B*, встрячаются картинную поверхность въ двухъ точкахъ *p* и *q*; если соединимъ точку *P* съ *p*, а также *Q* съ *q*, то получимъ пересыченіе картинной плоскости съ плоскостями, проходящими черезъ параллельныя линіи *A* и *a*, *B* и *b*. Точка пересыченія прямыхъ *Pp* и *Qq* будетъ искомымъ пересыченіемъ точки *O* пространства.

Точно такимъ образомъ можно будетъ построить перспективу сколькихъ угодно точекъ пространства. Смолт. PERSPECTIVE.

CONCRETE (QUANTITÉ) или **NOMBRE CONCRET.** **ИМЕНОВАННОЕ ЧИСЛО.** Смолт. ABSTRACT.

CONDENSABILITÉ. (Физ.) **СГУЩАЕМОСТЬ, СЖИМАЕМОСТЬ.** Свойство тѣла, по которому оно можетъ быть приведено къ меньшему объему.

CONDENSABLE. СГУЩАЕМЫЙ, СЖИМАЕМЫЙ. **CONDENSATION.** СГУЩЕНІЕ, СЖАТИЕ. *Condensation des corps par le refroidissement; сгущеніе тѣла отъ охлажденія.*

CONDENSER (v). СГУЩАТЬСЯ, СЖИМАТЬСЯ.

CONDITION. УСЛОВІЕ, ТРЕБОВАНИЕ. *Les conditions du problème exigent que.... Условія задачи требуютъ чтобы.... Formule conditionnelle; условная формула.* Формула справедливая при нѣкоторыхъ условіяхъ.

EQUATIONS DE CONDITION. Условныя уравненія. Смолт. EQUATION.

CONDUCTIBILITÉ или **CONDUCTIBILITÉ.** (Матем. Физ.) **ТЕПЛОПРОВОДИМОСТЬ.** Въ статьѣ CHALEUR найдено было уравненіе

$$(1) \quad C \frac{du}{dt} = K \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right),$$

опредѣляющее законъ измѣненія температуры въ твердомъ однородномъ тѣлѣ. Постоянное количество *K* мы назвали *теплопроводимостью*, или просто, *проводимостью*. Теперь изслѣдуемъ свойство этой величины *K*.

Прежде всего замѣтимъ, что изъ сказаннаго нами въ статьѣ CHALEUR слѣдуетъ заключить, что количество *K* зависима только отъ свойства расширяемаго твердаго тѣла, а очевидно не зависима отъ его температуры, развѣ сія послѣдняя будетъ весьма возмущена, чего мы не предполагаемъ; и такъ, чтобы указать что собственно изображаетъ количество *K* намъ представляется само собою средство, весьма легкое, состоящее въ разсмотрѣніи какого нибудь простого случая при распредѣленіи температуръ.

Если помножимъ величину $K \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right)$ на $dx dy dz dt$, то получимъ количество теплоты, приобретаемое безконечно малымъ объемомъ $dx dy dz$ въ элементъ времени dt ; интегрируя произведевіе $K \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right) dx dy dz dt$

во всемъ пропаяннѣмъ тѣлѣ, найдемъ выраженіе

$$K dt \int \left(\frac{du}{dx} \cos \lambda + \frac{du}{dy} \cos \mu + \frac{du}{dz} \cos \nu \right) ds,$$

изображающее количество теплоты, приобретаемое цѣлымъ тѣломъ въ элементъ времени dt . Здѣсь λ, μ, ν означаютъ углы, составляемые нормалью къ поверхности тѣла съ координатными осями, а ds , элементъ поверхности.

Предположим, что рассматриваемое тело есть призма или цилиндр, которого боковая поверхность покрыта какимъ либо веществомъ, не пропускающимъ тепла. Допустимъ сверхъ того, что изъ двухъ оснований цилиндра, одно, которое назовемъ A , поддерживается постоянно при температурѣ $+1^\circ$, а другое, B , при температурѣ 0° . Получимъ

$$\int \left(\frac{du}{dx} \cos \lambda + \frac{du}{dy} \cos \mu + \frac{du}{dz} \cos \nu \right) ds = \\ \int \left(\frac{du}{dx} \cos \lambda + \frac{du}{dy} \cos \mu + \frac{du}{dz} \cos \nu \right) ds \\ + \int \left(\frac{du}{dx} \cos \lambda + \frac{du}{dy} \cos \mu + \frac{du}{dz} \cos \nu \right) ds,$$

гдѣ первый интегралъ второй части уравненія относится къ боковой поверхности цилиндра, а второй, къ его двумъ основаниямъ. Но такъ какъ, по предположенію, боковая поверхность не пропускаетъ теплоты, то первый интегралъ долженъ равняться нулю. Что касается до оснований, то для A найдемъ $\cos \lambda = -1$, для B , $\cos \lambda = +1$, и для обоихъ оснований $\cos \mu = \cos \nu = 0$.

Итакъ, количество теплоты, приобщаемое цилиндру, будетъ

$$-Kdt \int \frac{du}{dx} ds + Kdt \int \frac{du}{dx} ds = -Kdt \left(\frac{du_1}{dx} - \frac{du_0}{dx} \right) s,$$

гдѣ первый интегралъ относится къ основанію A , а второй къ основанію B ; u_1 изображаетъ температуру основанія A , а u_0 температуру основанія B . Изобразивъ чрезъ Q предыдущее количество, получимъ

$$-Kdt \left(\frac{du_1}{dx} - \frac{du_0}{dx} \right) s = Q.$$

Положимъ теперь, что цилиндръ уже достигъ того состоянія, когда температуры различныхъ его частей сдѣлались неизмѣнными; тогда будетъ $Q=0$, и следовательно $\frac{du_1}{dx} = \frac{du_0}{dx}$. Итакъ,

въ этомъ случаѣ, выраженіе $-Kdt \frac{du_1}{dx} s$ изображаетъ количество теплоты, выходящей изъ цилиндра въ теченіи времени dt ; если означимъ чрезъ qdt это количество, то будетъ $-K \frac{du_1}{dx} s = q$, и, въ допущенномъ предположеніи, получимъ $\frac{du}{dx} = 0$, $\frac{du}{dy} = 0$, $\frac{du}{dz} = 0$, чрезъ что уравненіе (1) обратится просто въ $\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$, откуда $u = ax + b$. Для опредѣленія величинъ a и b , изобразимъ длину цилиндра AB чрезъ l , и замѣтимъ, что для $x=0$, должно быть $u=1$, а для $x=l$, $u=0$, по-

чему $b=1$, $a=-\frac{1}{l}$, и предыдущее уравненіе приметъ видъ $u = \frac{l-x}{l}$, $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{l}$. Следовательно

$q = \frac{Ks}{l}$, откуда $K = \frac{ql}{s}$; полагая $l=1$ и $s=1$, найдемъ $K=q$. И такъ, Kdt выражаетъ количество теплоты, выходящей изъ цилиндра въ продолженіи мгновенія dt ; следовательно, *теплопроводность K изображаетъ количество теплоты, проходящей въ единицу времени сквозь единичную площадь сѣненія цилиндра, имѣющаго высоту равную единице, предполагая, что одно основаніе нагревается до $+1^\circ$, а другое имѣетъ температуру 0° , и сверхъ того, что температуры цилиндра достигли уже неизмѣннаго состоянія, а боковая его поверхность не пропускаетъ теплоты.*

CONDUCTIBILITÉ EXTERIEURE или РАСХОДЪ ÉMISSION. Наружная теплопроводность. Количество теплоты, испускаемой въ единицу времени единичною поверхностью тѣла, нагрѣтой до $+1^\circ$, въ окружающую среду, которой температура равна 0° .

CONDUITE (TUYAU DE). (Гидрав.) ВОДОПРОВОДНАЯ ТРУБА.

CONE. (Геом.) КОНУСЪ; КЕГЛЯ. *Cône droit*; *прямой конусъ*. Въ Начальной Геометріи призмъ конусомъ называется тѣло, образуемое обращеніемъ прямоугольнаго треугольника SAc (черт. 18 Листъ IV) около неподвижной его стороны Sc . При такомъ движеніи, точка A стороны Ac описываетъ окружность круга, площадь $ABDH$ которой называется *основаніемъ конуса* (*base du cône*). Сторона же SA описываетъ *выпуклую или боковую поверхность конуса* (*surface convexe du cône*). Точка S называется *вершиною конуса* (*sommet du cône*); линія Sc осью или *высотой* (*axe или hauteur*), а SA *стороною, ребромъ или апотемой* (*côté, arête или apothème*).

Въ Геометріи доказываютъ, что объемъ конуса равняется основанію, помноженному на $\frac{1}{3}$ высоты, а боковая поверхность, окружности основанія, помноженной на $\frac{1}{2}$ стороны конуса.

Cône tronqué, *треугольный конусъ*, *сѣченный конусъ*. Отсѣченный, усѣченный, отрезной конусъ. Такъ называется тѣло $ABDHobdh$ (черт. 18), которое получимъ, когда описѣмъ конусъ $SABDH$, плоскостію параллельною его основанію.

конусъ *Sabdh*. Линія *cS* именуется *высотой* оп-
сѣченнаго конуса, *aA* его *стороною*, а площадь
круговъ *AEDH* и *abdh* его *основаніями*, *ниж-*
нимъ и *верхнимъ* или *большимъ* и *меньшимъ*.

Можно также предположить, что опсѣченный
конусъ образуется обращеніемъ пирамиды *cSA*
около неподвижной ея стороны *cS*.

Если изобразимъ чрезъ *R* и *r* радиусы осно-
ваний разсѣнриваемаго пріамогъ усѣченнаго ко-
нуса, чрезъ *h* его высоту, и чрезъ π отношеніе
окружности къ диаметру, то объёмъ усѣченнаго
конуса выразится произведеніемъ $\frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$,
а его боковая поверхность чрезъ $\pi c(R + r)$, ра-
зумѣя подъ *c* его сторону *aA*.

СѢНЕ *oblique* или *cône scalène*. Косой конусъ.
Тѣло, образуемое обращеніемъ какого нѣ есть ко-
соугольнаго треугольника около которой нѣбудъ
изъ его сторонъ, предполагаемой неподвижною. —

Когда ось *SC* (черт. 18 или IV) какого нѣ
есть конуса будетъ болѣе радиуса *CA* его осно-
ванія, то конусъ называется *остроугольнымъ*
(*acutangle*); если же *SC < CA*, то конусъ именуется
тупоугольнымъ (*obtusangle*); наконецъ, когда
SC = CA, то конусъ принимаетъ названіе *прямо-*
угольнаго (*rectangle*). —

Въ обширномъ смыслѣ, *конусомъ* называется
тѣло, образуемое движеніемъ прямой, проходя-
щей чрезъ неподвижную точку (вершину конуса),
и опирающейся на какую нѣ есть кривую ли-
нію. Такихъ образомъ произойдутъ двѣ *кониче-*
скія поверхности, *противоположенныя вершинна-*
ми (*surfaces coniques verticalement opposées* или *ap-*
proposées par le sommet). См. **CONIQUE** (SURFACE).

CONE DE LUMIÈRE, CONE D'OMBRE. (Опти.)

КОНУСЪ СВѢТА, КОНУСЪ ТѢНИ. Когда
лучи свѣта, исходя изъ одной точки, падаютъ
на поверхность опредѣленной величины, то со-
вокупность сихъ лучей образуетъ *конусъ свѣта*
котораго вершина находится въ свѣщающей
точкѣ. Если передъ свѣщающейся тѣлою бу-
детъ находиться другое, непрозрачное, то по ту
сторону сего послѣдняго образуется просвѣт-
лство неосвѣщенное, называемое *конусомъ тѣни*:
таково, напримѣръ, во время луннаго затмѣнія,
просвѣтлство между землею и луною.

CONFOCAL. (Геом.) **ОДНОФОКУСНЫЙ, СОФО-**
КУСНЫЙ. *Paraboles confocales*; *однофокусныя па-*
раболы; *параболы, имѣющія общій фокусъ.*

CONFONDRE (SE). (Геом.) **СОВМЕЩАТЬСЯ,**

СОВПАДАТЬ. *Ces deux figures se confondent par*
la superposition; *эти двѣ фигуры совмѣщаются*
чрезъ наложеніе. См. **COINCIDER.**

CONGRU. (Теор. Чис.) **РАВНООСТАТОЧНЫЙ.**

Когда разность двухъ цѣлыхъ чиселъ *b* и *c* (по-
ложительныхъ или отрицательныхъ) дѣлится
на-цѣло на другое цѣлое *a*, то числа *b* и *c* на-
зываются *равноостаточными* относительно *a*;
въ противномъ случаѣ, они именуются *разноос-*
таточными (*incongrus*). Число *a* принимаетъ
название *модуля* (*module*). И такъ, $+12$ и $+5$
равноостаточны относительно модуля 7, ибо
 $\frac{12-5}{7} = \text{цѣлому числу} = 1$. Равныя образцы,
 $+32$ и -12 *равноостаточны* по модулю 11, а
разноостаточны въ отношеніи модуля 7.

Равноостаточность двухъ чиселъ изобра-
жается знакомъ \equiv , поставленнымъ между ними;
модуль, заключенный въ скобкахъ, пишется по-
слѣ знака \equiv ; напримѣръ $12 \equiv 5 \pmod{7}$ или
 $12 - 5 \equiv 0 \pmod{7}$. Такого рода уравненіе назы-
вается *остаточнымъ сравненіемъ*, *равноостаточ-*
ностью, или просто *сравненіемъ* (*congruence*). Чи-
сляется оно слѣдующимъ образомъ: 12 *равноос-*
таточно съ 5 по модулю 7.

Приведенное здѣсь знаменіе было упо-
треблено знаменитымъ *Гауссомъ* (*Gauss*) въ его
сочиненіи: *Disquisitiones arithmeticae*, и пришло
нынѣ многими математиками.

CONGRUENCE. (Теор. Чис.) **ОСТАТОЧНОЕ**
СРАВНЕНИЕ, РАВНООСТАТОЧНОСТЬ, СРА-
ВНЕНИЕ. Равенство между остатками. Смотъ

CONGRU. *Congruence du premier degré*; *равноос-*
таточность первой степени, напримѣръ $5x \equiv 3$
($\text{mod. } 7$) и вообще $ax \equiv c$ ($\text{mod. } b$), гдѣ *a*, *b*, *c*
изображаютъ цѣлыя числа. Последнее сравненіе
равнозначуще съ неопредѣленнымъ уравненіемъ
первой степени $ax - by = c$. Относительно же
его разрѣшенія, См. **CONTINUE** (FRACTION).
Congruence du second degré; *равноостаточность вто-*
рой степени; таковы напримѣръ слѣдующія:
 $5x^2 \equiv 3 \pmod{7}$, $ax^2 \equiv b \pmod{c}$, $ax^2 + by^2 \equiv 0 \pmod{c}$
и проч. Смотъ статьи **RÉSIDU, RESTE, RA-**
CINE PRIMITIVE, FERMAT (THÉORÈME DE).

Предложимъ теперь главныя правила, отно-
сящіяся къ остаточнымъ сравненіямъ.

1°. Когда два числа равноостаточны с третьим по одному и тому же модулю, то они равноостаточны также и между собою. И так, из сравнений

$$A \equiv C \pmod{p}, \quad B \equiv C \pmod{p},$$

вызодит

$$A \equiv B \pmod{p}.$$

2°. Если имеем ряд сравнений

$$A \equiv a, \quad B \equiv b, \quad C \equiv c, \dots \pmod{p},$$

то можем вывести из них

$$A + B + C + \dots \equiv a + b + c + \dots \pmod{p}.$$

Положив в частности $A \equiv B \equiv C \equiv \dots$,

$a \equiv b \equiv c \equiv \dots$, найдем

$$kA \equiv ka,$$

разумя под k число слагаемых членов A, B, C, \dots

Из двух сравнений $A \equiv a, B \equiv b$, получим также

$$A - B \equiv a - b.$$

3°. Предполагая как выше $A \equiv a, B \equiv b, C \equiv c, \dots$ найдем

$$ABC \dots \equiv abc \dots;$$

следовательно, приняв $A \equiv B \equiv C \equiv \dots$ и $a \equiv b \equiv c \equiv \dots$, и допуская, что число количеств A, B, C, \dots равно k , получим

$$A^k \equiv a^k.$$

4°. Пусть будет X целая функция количества x , вида $Ax^a + Bx^b + Cx^c + \dots$, где A, B, C, \dots изображают числа целые, положительные или отрицательные, а a, b, c, \dots целые положительные числа. Если примем количеству x значения равноостаточные между собою по известному модулю, то и соответственные величины функции X будут также равноостаточны.

И так, если $f \equiv g \pmod{p}$, то, в следствии предыдущего, будет $f^a \equiv g^a, Af^a \equiv Ag^a$; точно таким образом получим $Bf^b \equiv Bg^b$ и проч. и наконец

$$Af^a + Bf^b + Cf^c + \dots \equiv Ag^a + Bg^b + Cg^c + \dots \pmod{p}.$$

Все эти правила, а равно и другие, относящиеся к остаткам, доказывающиеся весьма просто, основывался на том замечании, что всякое остаточное сравнение $L \equiv M \pmod{p}$ может быть написано в виде обыкновенного уравнения такого образом: $L = M + kp$, где под k разумем число целое, положительное или отрицательное.

* Для сокращения мы не пишем модуля, который предполагается всегда одинаковым.

Многие теоремы, предлагаемые в Арифметике, могут быть доказаны весьма легко посредством приведенных здесь предложений об остаточных сравнениях; например, теоремы об делимости чисел на 9, на 11 и проч. Чтобы доказать известное правило о делимости чисел на 9, пусть будет данное число $N \equiv a + 10b + 100c + 1000d + \dots$. Замечив, что $10 \equiv 100 \equiv 1000 \equiv \dots \equiv 1 \pmod{9}$, получим, в следствии 4-го предложения, $N \equiv a + b + c + d + \dots \pmod{9}$. Из этого следует, что если сложим цифры a, b, c, \dots данного числа N , не принимая в соображение их разрядов, то полученная сумма и предложенное число N будут равноостаточны по модулю 9. И так, если N делился на 9, то и сумма цифр, составляющих N , будет делиться на 9; если же N не делился, то и сумма цифр делиться не будет. То же самое правило справедливо и для делителя 3.

Для делителя 11, замечаем что

$$10 \equiv -1, \quad 100 \equiv +1, \quad 1000 \equiv -1, \dots \pmod{11},$$

и вообще

$$10^{2k} \equiv +1 \pmod{11}, \quad 10^{2k+1} \equiv -1 \pmod{11};$$

следовательно, представив как и выше предложенное число в виде $a + 10b + 100c + 1000d + \dots$, получим

$$a + 10b + 100c + 1000d + \dots \equiv a - b + c - d + \dots \pmod{11};$$

это сравнение выражает известное всем правило для узнания, делился ли без остатка предложенное число N на 11.

CONGRUENCE. (Геом.) **СОВПАДАЕМОСТЬ.** В этом смысле *congruence* вышло теперь из употребления, а употребляясь в том же значении слово **COINCIDENCE** (Смют).

CONGRUITÉ. (Геом.) **РАВЕНСТВО ПО СОВПАДЕНИЮ.** Чтобы ознакомить наших читателей с *способом равенств по совпадению*, придуманным *Лейбницем*, и имеющим целью различия геометрических исследований, мы приведем, в переводе, отрывок об эпохе предшествующей *Öbtingische deutsche Arithmetik* 194, 195 Str. d. 4. Decembris 1834. Авторитетный писец, знаменитого в астрономических точных наук, должен, кажется, признать во мнении математиков некоторую значительность способу, о котором говорим. Хотя круг приложений способа *Лейбница*, в настоящее его время, и весьма ограничен

чень, попри новых усиліяхъ, можно надѣяться, что онъ распространится, и даже приведетъ къ доказательству истинъ геометрическихъ самымъ простымъ и легкимъ путемъ. Вотъ обѣщанный опривокъ:

„Въ числѣ уцѣлѣвшихъ опривковъ, одинъ изъ примѣчательнѣйшихъ заключаетъ въ себѣ опытъ новаго знаменитѣйшаго въ Геометріи, предложеннаго Лейбницемъ. Уже прежде было извѣстно, что Лейбницъ занимался изслѣдованіями этого рода; но не знали какимъ образомъ онъ былъ приведенъ къ своимъ выводамъ. Лейбницъ, въ одно изъ писемъ къ Гугенсу, упоминаетъ объ изъясненіи Разсужденія по этому предмету, которое онъ послалъ ему послѣднему. Разсужденіе, о которомъ говоритъ, дѣйствительно найдено между бумагами Гугенса, и сообщено намъ издательскъ книги: *Christiani Hugonii aliorumque seculi XVII virorum celeberrimorum exercitationes mathematicae et philosophicae. Ex manuscriptis in bibliotheca Academiae Lugduno-Batavae servatis edidit P. J. Uylbroeck* и проч. in-4. 1855 г. Оно показалось намъ болѣе замѣчательнымъ рецензенту, что онъ слышалъ отъ знаменитѣйшаго математика нашего вѣка нѣкоторые мнѣнія о Геометріи, имѣющія большое сходство съ нѣкоторыми изъ тѣхъ, о которыхъ идетъ рѣчь. Лейбницъ, говоря о своемъ открытіи, придаетъ ему большую важность. Онъ думаетъ, что если это открытіе обрабатывается надлежащимъ образомъ, то можно будетъ описать сложную машину со всѣми ея частями, ея употребленіе и движенія безъ пособія чертежей и моделей, и не имѣя надобности дополнять описанія воображеніемъ. Руководствуясь тѣмъ же способомъ, могли бы описать предметы изъ Естественной Исторіи, какъ то: растенія, деревья, животныхъ и проч. не срисовывая ихъ. За сими слѣдуютъ примѣчательныя слова Лейбница: Mais comme je ne remarque pas que quelque autre ait jamais eu la même pensée, ce qui me fait craindre qu'elle ne se perde, si je n'ay pas le tems de l'achever; j'adjouteray ici un essai qui me paroît considerable, et qui suffira au moins à rendre mon dessein plus croyable et plus aisé à concevoir, afin que, si quelque hazard en empêche la perfection à present, ceci serve de monument à la postérité, et donne lieu à quelque autre d'en venir à bout. Дѣлѣ Лейбницъ показываешь, какими образомъ

новое его знаменитѣйшее открытіе можетъ быть приведено къ Геометріи. Первые буквы алфавита означаютъ данныя точки, а послѣднія, исконыя. Сверхъ того онъ вводитъ знакъ для изображенія *сопадѣнія (congruë)*, двухъ точек*); мы употребимъ въ этомъ смыслѣ знакъ равенства къ вертикальнымъ положеніямъ. И такъ, выраженіе $a b c || d e f$ означаетъ, что точки a, b, c могутъ быть соотвѣстственно совмѣщены съ точками d, e, f , чрезъ что относительное положеніе, какъ точекъ a, b, c , такъ и точекъ d, e, f не перемѣнится, ибо предполагается, что первыя три точки, а равно и три послѣднія, связаны между собою неизмѣнимыми линіями, кривыми или прямыми. Должно также замѣтить, что Лейбницъ приводитъ прежде опредѣленіе плоскости, а потомъ уже линіи. Теперь онъ предлагаетъ знаменитѣйшее для неопредѣленнаго пространства, для шаровой поверхности, для плоскости, круга, прямой линіи и точки. *Неопредѣленное пространство* выражается чрезъ $a || x$. Смыслъ этого знаменитѣйшаго открытія, что должно искать всѣ точки, которые могутъ совмѣститься съ точкою a ; но такъ какъ всякая точка удовлетворяетъ этому требованію, то всѣмъ всѣхъ x -овъ будетъ неопредѣленное пространство. Въ выраженіи $a || x$, значеніе всѣхъ x -овъ будетъ *поверхность шара*, имѣющаго своимъ центромъ точку a . Далѣе, равенство по совпадѣнію $a c || b c$ означаетъ, что двѣ точки a и b даны, а ищется третья точка c , имѣющая одинаковое положеніе относительно каждой изъ точекъ a и b , то есть, что точку c можно связывать съ a , не нарушая чрезъ то относительнаго ихъ положенія въ разсужденіи точекъ x . Мѣстомъ всѣхъ x -овъ будетъ *плоскость*, простирающаяся въ безконечность**). Выразеніе $a b c || a b c$ означаетъ, что три точки a, b, c даны, а ищется четвертая x , которая бы имѣла то же положеніе относительно точекъ a и b .

*) Лейбницъ употребляетъ знакъ $||$; и такъ $a b c || A B C$ означаетъ, что точки A, B, C могутъ быть соотвѣстственно совмѣщены съ точками a, b, c , или, иначе, что треугольникъ $A B C$ равенъ треугольнику $a b c$, при чемъ уголъ $A =$ углу a , уголъ $B =$ углу b , уголъ $C =$ углу c .
Примеч. Сов. Изд.

**) Известный Французскій математикъ Жюль, которому возразилъ Лейбницъ на Геометрію не могъ быть извѣстенъ, опредѣлялъ плоскость точно такъ же. Онъ называлъ *плоскостью* такую *поверхность*, *каждъ ея точки равно удаленъ отъ двухъ*

δ , как и точка c . Мысленъ всѣхъ x -овъ будешь *кругъ*. Это опредѣленіе круга не замѣняеяся понятиями о плоскости и о прямой линіи; ибо, для опредѣленія положенія одной точки относительно другой, нѣтъ надобности въ прямой линіи, а споспѣшь только вообразить, что эти точки связаны между собою неизмѣняемымъ образомъ посредствомъ линіи, произвольнаго вида. Отсюда, можемъ сказать, что двѣ линіи нѣтъ ли то же положеніе одна относительно другой, какъ и двѣ другія, когда двѣ первыя могутъ быть связаны какою линіею, которая совпадаетъ съ линіею, связывающею двѣ другія. И такъ, выраженіе $ax || bx || cx$ означаетъ, что три точки a, b, c даны, а ищется четвертая x , имѣющая одинаковое положеніе относительно всѣхъ трехъ a, b, c . Мысленъ всѣхъ x -овъ будешь *прямая линія*. Выразеніе $ax || bx || cx || dx$ означаетъ, что четыре точки a, b, c, d даны, а ищется четвертая x , которая бы имѣла одинаковое положеніе относительно каждой изъ четырехъ a, b, c, d . Мысленъ всѣхъ x -овъ въ этомъ случаѣ будешь *точка*. Вошь основаніе новаго знакоположенія, предлагаемаго Лейбницемъ. Чтобы показашъ приложенія своего способа, онъ приводитъ доказательства нѣкоторыхъ предположеній; напримеръ, того, что *стѣние шаровой поверхности плоскостью будешь кругъ*. Выразеніе для шаровой поверхности есть $ac || ax$, а для плоскости, $ax || bx$; отсюда слѣдуетъ $ac || bx$, и въ слѣдствіе перваго выраженія, $bc || ax$, откуда еще $bc || bx$. Если совокупимъ три выраженія $ab || ab$, $bc || bx$, $ac || ax$, то получимъ равенство по совпаденію $abc || abx$, которое принадлежитъ *кругу*. Въ одномъ письмѣ къ Гугенсу, Лейбницъ дѣлаетъ еще замѣчаніе, относящееся къ приложенію этого способа къ Аналитической Геометріи; вошь его слова: Je puis exprimer parfaitement par ce calcul toute la nature ou definition de la figure (ce que l'Algèbre ne fait jamais, car disant que $x^2 + y^2 = a^2$ est l'équation d'un cercle, il faut expliquer par la figure ce que c'est que ce x et y , c'est-à-dire que ce sont des lignes droites, dont l'une est per-

постояннымъ токкомъ. Это опредѣленіе очевидно равнозначу-
ю съ опредѣленіемъ, предложеннымъ Лейбницемъ, и которое
выражается равенствомъ по совпаденію $ax || dx$. Основываясь
на этомъ опредѣленіи, весьма легко вывести уравненіе плоскости
Примеч. Сов. Лав.

pendiculaire à l'autre, et l'une commence par le centre, l'autre par la circonférence de la figure). Et je le puis en toutes les figures, puisqu'elles se peuvent expliquer toutes par des sphériques, plans, circulaires et droites, dans les quelles je l'ay fait. Car les points des autres courbes se peuvent trouver par des droites et cercles etc." (Томъ 1 стр. 16).

Для дальнѣйшихъ подробностей отсылаемъ къ упомянутой выше книгѣ Уйленброка, Томъ 2, стр. 6 и слѣдующія.

CONIQUE. (Геом.) КОНИЧЕСКИЙ, КЕГЕЛЬНЫЙ.

Принадлежащій, относящійся къ конусу. Иногда это прилагательное употребляется во множественномъ числѣ, въ видѣ существительнаго: *les coniques*; въ такомъ случаѣ разучаютъ, или *коническія стѣненія*, или *трактаты о коническихъ стѣненіяхъ*. *Sections coniques*, *коническія стѣненія*, то есть *эллипсы*, *парабола* и *гипербола*. Къ коническимъ стѣненіямъ можно еще причислить *точку*, *прямую линію*, *систему двухъ прямыхъ* и *кругъ*.

Разсмотримъ теперь при какихъ положеніяхъ, сѣкущей плоскости образуются различныя коническія кривыя. Для простоты предполагаемъ, что имѣемъ прямую конусъ $SABDH$ (черт. 19 Листъ IV), съ круговымъ основаніемъ $ABDH$. Положимъ сперва, что сѣкущая плоскость ONE параллельна сторонѣ AS конуса, и выхлѣпъ съ нѣмъ перпендикуляренъ къ плоскости треугольника SAB , который изображаетъ стѣненіе конуса плоскостью, проходящею чрезъ ось SC . Пусть будешь $OhNE$ кривая пересѣченія; чрезъ какую нѣ есть точку h этой кривой проводимъ плоскость, параллельную основанію конуса; такимъ образомъ получимся, какъ извѣстно изъ Начальной Геометріи, кругъ $abch$. Изобразимъ чрезъ t линію Ok , чрезъ z , линію kh . По свойству круга, имѣемъ $z^2 = ak \times kb = AK \times kb$; но изъ подобныхъ треугольниковъ Okb , OKB , получаемъ $Ok \times kb \cdot OK = KB$, откуда $kb = \frac{KB \times Ok}{OK} = \frac{KB}{OK} \cdot x$.

Слѣдовательно $z^2 = \frac{AK \times KB}{OK} \cdot x$; по $AK \times KB = KN^2$ почему и найдемъ $z^2 = \frac{KN^2}{OK} \cdot x$. Замѣшимъ теперь, что KN и OK изображаютъ величины постоянныя; и такъ, если положимъ $\frac{KN^2}{OK} = p$, то по-

лучить для кривой $OhHE$ уравнение $y^2 = px$, где p означает величину постоянную.

Найденная кривая называется *параболою*, а постоянная величина p ее *параметром*.

Положим теперь, что сѣкающая плоскость, перпендикулярная как и прежде къ треугольнику SAB (Черт. 20 Листъ IV), пересѣкаетъ обѣ стороны AS и SB конуса. Получится сомкнувшаяся кривая пересѣченія $OhO'e$; чрезъ какую ли есть точку h этой кривой проведемъ параллельно основанію $ABDH$ плоскость, которая разсѣчетъ поверхность конуса по кругу $abhe$. Положимъ $Oh = x$, $hh = y$, и сверхъ того $OO' = 2a$, $OP = l$, $O'Q = m$, гдѣ a , l , m изображаютъ величины постоянныя, найдемъ $y^2 = \overline{ak} \times \overline{hb}$, изъ подобія же треугольниковъ $O'ka$ и $OO'P$, а также Ohk и $OO'Q$, выведемъ

$$\overline{ak} = \frac{\overline{OO'} \times \overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{l(2a-x)}{2a}$$

$$\overline{hb} = \frac{\overline{OQ} \times \overline{O'Q}}{\overline{OP}} = \frac{mx}{2a};$$

слѣдовательно

$$y^2 = \frac{lm}{4a^2} (2ax - x^2);$$

полагая для простоты $\frac{lm}{4} = l^2$, получимъ

$$y^2 = \frac{l^2}{a^2} (2ax - x^2).$$

Кривая, определяемая этимъ уравненіемъ, называется *эллипсомъ*; постоянное количество a именуется *большою*, а b , *малою полу-осью* эллипса.

Наконецъ, предположимъ что сѣкающая плоскость ODE , (Черт. 21 Листъ IV), перпендикулярная къ плоскости треугольника SAB , будетъ параллельна оси SC конуса. Очевидно, что эта плоскость пересѣчетъ какъ конусъ $SABDE$, такъ и противоположный ему $SA'B'$, и что такимъ образомъ получатся двѣ кривыя $OhDE$ и $O'D'E'$. Удержимъ прежнія наименованія, то есть примемъ $\overline{Ok} = x$, $\overline{hh} = y$, $\overline{OO'} = 2a$, $\overline{OP} = l$, $\overline{O'Q} = m$. Во первыхъ найдемъ, какъ и выше, $y^2 = \overline{ak} \times \overline{hb}$; поможемъ, чрезъ сравненіе подобныхъ треугольниковъ $O'ak$ и $O'PO$, также Ohk и $OO'Q$, получимъ

$$\overline{ak} = \frac{\overline{OP} \times \overline{Ol}}{\overline{OQ}} = \frac{l(2a+x)}{2a}$$

$$\overline{hb} = \frac{\overline{OQ} \times \overline{O'Q}}{\overline{OP}} = \frac{mx}{2a};$$

слѣдовательно

$$y^2 = \frac{lm}{4a^2} (2ax + x^2)$$

и полагая $\frac{lm}{4} = l^2$, найдемъ

$$y^2 = \frac{l^2}{a^2} (2ax + x^2).$$

Вотъ уравненіе кривой, которая называется *гиперболою*. Она состоитъ изъ двухъ равныхъ и противоположныхъ частей $OhDE$ и $O'D'E'$, расширяющихся въ безконечность. Если въ выведенномъ сей-часъ уравненіи будемъ приписывать x -у значенія большія $2a$, но отрицательныя, то найденное уравненіе будетъ определять часть $O'D'E'$.

Для дальнѣйшихъ подробностей о каждой изъ коническихъ кривыхъ, отсылаемъ читателей къ статьямъ: PARABOLE, ELLIPSE, HYPERBOLE.

Мы сказали выше, что къ коническимъ сѣченіямъ можно причислить точку, прямую линію, систему двухъ прямыхъ и кругъ. Тогда получится, когда сѣкающая плоскость, не пересѣкая конической поверхности и не касаясь къ ней, пройдетъ чрезъ вершину конуса. Если плоскость будетъ касательна къ конусу, то касаніе произойдетъ по *прямой линіи*, то есть, по одному ребру конуса. Сѣченіе конуса плоскостію, проходящею чрезъ его ось, достигавитъ системы *двухъ прямыхъ*. Наконецъ, получится *кругъ*, когда примемъ сѣкающую плоскость параллельною основанію конуса.

Изобрѣтеніе коническихъ сѣченій принадлежитъ Школѣ Платона; даже нѣкоторые авторы приписываютъ это открытіе самому Платону. Ученики и со товарищи его Аристей, Эвдоксъ, Менелай, Диностратъ и другіе съ особеннымъ стараніемъ изучали свойства коническихъ кривыхъ, и не мало способствовали къ усовершенствованію этой новой отрасли Геометріи. Аристей составилъ о коническихъ сѣченіяхъ пять книгъ, о которыхъ древніе писатели отзывались съ большою похвалою; но онъ не дошелъ до насъ. Изъ трудовъ Менехма остались намъ два рѣшенія задачи объ удвоеніи куба посредствомъ коническихъ сѣченій. Первое рѣшеніе приводитъ къ построению *двухъ параболъ*, имѣющихъ общую вершину, а оси взаимно перпендикулярныя; параметръ одной параболы долженъ быть равенъ сторонѣ данного куба, а параметръ другой, удвоенной сторонѣ. Абсцисса, соответствующая

щая точка пересечения двух парабол, будетъ исконая сплора удвоеннаго куба. Смол. CONSTRUCTION DES ÉQUATIONS. Другое рѣшеніе основано на пересѣченіи параболы съ равно-стороннею гиперболою между своими асимптотами. — Пслѣ Аристеля *Филлиды* написала чешыра книги о коническихъ сѣченіяхъ. Наконецъ, *Аполлоній*, жившій за 200 лѣтъ до Р. X., собравъ всё извѣстное до него объ этомъ предметѣ, и присоединивъ къ нему собственныя свои изслѣдованія, составилъ подробный трактатъ о коническихъ сѣченіяхъ, раздѣленный на восемь книгъ; эпоху труда, въ переводахъ, дошелъ до насъ почти въ цѣлости. Знаменитый *Гиллей*, стѣржавъ съ большаго лшаніемъ всё что осталось отъ текста, писаннаго на Греческомъ языкѣ, съ переводами на Арабскій и на Латинскій, и составивъ по плану Аполлонія упрощенную восьмую книгу, напечаталъ на Латинскомъ языкѣ великолѣпное изданіе этого трактата. Книга его издана въ Оксфордѣ въ 1710 году. Внослѣдствіи многие математикн занимались теоріею коническихъ сѣченій; наиболее извѣстные своими трудами по этому предмету: *Лавиръ, де Гинс (de Guisné)*, *Маркизъ де Л'Опитали*, *Ла Шапелъ, Декартъ, Ферматъ, Нитонъ, Эйлеръ, Крамеръ*.

SECTIONS CONIQUES D'UN ORDRE SUPÉRIEUR.

Коническія сѣченія высшихъ порядковъ. Такъ назывались кривыя пересѣченія плоскости съ конусомъ, у котораго основаніе есть кругъ высшаго порядка. Смол. CERCLE DE DEGRES SUPÉRIEURS. Положимъ напримѣръ, что основаніе прямого конуса есть кругъ второго порядка, опредѣляемый уравненіемъ $y^2 = 2ax^2 - x^4$. Въ такомъ случаѣ найдуся слѣдующія коническія кривыя второго порядка:

Парабола, опредѣляемая уравненіемъ $y^2 = px^2$. Смол. CUBIQUE (PARABOLE).

Эллипсъ, опредѣляемый уравненіемъ $y^2 = px^2 - qx^4$.

Гипербола, для которой найдемся уравненіе $y^2 = px^2 + qx^4$.

Въ этихъ трехъ уравненіяхъ p и q изображаютъ постоянныя положительныя величины, зависящія отъ діаметра $2a$, и отъ положенія сѣкущей плоскости.

CONIQUE (SURFACE). КОНИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ. Когда прямая обращается около

неподвижной точки, и непрерывно опирается на какую нѣ есть кривую линію, то образуетъ поверхность, именную *коническою*. Пусть будутъ

$$(1) \quad \begin{cases} x - \alpha = a(z - \gamma) \\ y - \beta = b(z - \gamma) \end{cases}$$

уравненія производящей прямой линіи, въ координатахъ α, β, γ изображающихъ координаты вершины конуса. Количества a, b, γ будутъ постоянны при всѣхъ положеніяхъ производящей прямой; напротивъ того, α и β будутъ измѣняться при различныхъ ея положеніяхъ. Такъ какъ величины a и b остаются постоянными для одного и того же положенія производящей прямой, а измѣняются при переходѣ отъ одного положенія въ другое, то одно изъ этихъ количествъ будетъ зависѣть отъ другаго. И такъ $b = \varphi(a)$, или

$$\frac{y - \beta}{z - \gamma} = \varphi\left(\frac{x - \alpha}{z - \gamma}\right),$$

гдѣ φ изображаетъ произвольную функцію, которую можно опредѣлить посредствомъ уравненія *направляющей кривой* (*directrice*). Если включимъ произвольную функцію φ (Смол. ARBITRAIRES (ÉLIMINATION DES FONCTIONS)), то получимъ слѣдующее уравненіе коническихъ поверхностей въ частныхъ дифференціалахъ:

$$(x - \alpha) \frac{dz}{dx} + (y - \beta) \frac{dz}{dy} = z - \gamma.$$

Положимъ, напримѣръ, что направляющая кривая есть *крутъ*; уравненія сего послѣдняго, разсеприваемаго въ пространство, будутъ

$$(2) \quad \begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \\ mx + ny + z = C. \end{cases}$$

Первое изъ сихъ уравненій принадлежитъ шару, коего радіусъ равенъ r , а координаты центра x_0, y_0, z_0 ; второе, опредѣляющее плоскость, заключаетъ въ себя три постоянныя величины m, n и C . Такъ какъ въ обоихъ уравненіяхъ мы сохранили одиѣ буквы x, y, z , то совокупность сихъ уравненій опредѣлитъ пересѣченіе шара съ плоскостію, то есть, требуемый кругъ. Положимъ для простоты, что центръ шара совпадаетъ съ вершиною конуса; въ такомъ случаѣ $x_0 = \alpha, y_0 = \beta, z_0 = \gamma$; и слѣдовательно первое изъ уравненій (2) приметъ видъ

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2.$$

Совокупля это уравненіе съ формулами (1), получимъ

$$r - \alpha = \frac{ar}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$$

$$r - \beta = \frac{br}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$$

$$r - \gamma = \frac{r}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$$

Если подставим теперь эти величины въ уравнение $mx + ny + z = C$,

то найдемъ искомое отношеніе между a и b ,

именно

$$m\left(a + \frac{ar}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\right) + n\left(\beta + \frac{br}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\right) + r \cdot \frac{r}{\sqrt{1+a^2+b^2}} = C,$$

или

$$(ma + nb + 1)r = (C - m\alpha - n\beta - \gamma)\sqrt{1+a^2+b^2}.$$

Очевидно, что для полученія искомага уравненія координатной поверхности между прямоугольными координатами, спомогъ только въ последнемъ

уравненіи, вмѣсто a , написать $\frac{x-\alpha}{z-\gamma}$, а вмѣсто

$$b, \frac{y-\beta}{z-\gamma}.$$

CONJECTURER (ART DE). См. ARS CONJECTANDI.

CONJOINTE (RÈGLE). (Арно.) **СЛОЖНОЕ ТРОЙНОЕ** или **ЦѢПНОЕ ПРАВИЛО.** Правило, служащее для опредѣленія отношенія двухъ чиселъ, когда отношенія каждаго изъ нихъ послѣднихъ къ другимъ, извѣстны. Цѣпное правило основано на геоцентрическихъ пропорціяхъ; рѣшеніе слѣдующаго вопроса покажетъ въ чѣмъ состоитъ это правило:

Спрашивается, сколько надобно заплатить за 25 сажень земной работы, зная что за 86 англійскихъ фунтовъ той же работы заплачено 300 рублей?

Сперва надобно обратиться англ. фунты въ сажени; но извѣстно, что 7 фунт. = 1 саж.; следовательно, составимъ пропорцію

$$7 \text{ фунт.} : 1 \text{ саж.} = 86 \text{ ф.} : \frac{86}{7} \text{ саж.}$$

изъ которой заключаемъ, что 86 англ. фунт. = $\frac{86}{7}$ саж. Дальше, говоримъ: если за $\frac{86}{7}$ саж. заплачено 300 руб., то сколько слѣдуетъ заплатить за 25 сажень, что приводить насъ къ пропорціи

$$\frac{86}{7} \text{ саж.} : 300 \text{ руб.} = 25 \text{ саж.} : x;$$

величина x , равная $\frac{7 \times 25 \times 300}{86}$ рубл., будетъ искома величина, и найдемъ

$$x = 610 \frac{20}{43} \text{ рубл.}$$

Задачи о переводѣ денегъ, при извѣстномъ валютномъ курсѣ, рѣшаются также посредствомъ цѣпнаго правила. См. CHANGÉ.

CONJUNCTION. (Астр.) **СОЕДИНЕНІЕ.** Положеніе двухъ свѣтилъ или планетъ, при которомъ они имѣютъ одну и ту же долготу, или какъ долготу, такъ и широту равныя. Въ первомъ случаѣ соединеніе называется *видимымъ* (*apparente*), а во второмъ — *истиннымъ* (*vraie*). Если такое положеніе свѣтилъ разсматривается изъ солнца, то оно называется *гелиоцентрическимъ соединеніемъ*; если же изъ земли, то *геоцентрическимъ*. Геоцентрическое соединеніе планетъ съ солнцемъ бывающъ или *верхнимъ* или *нижнимъ*: первымъ — когда солнце находится между землею и планетою, вторымъ — когда планета находится между солнцемъ и землею, что бываетъ съ Меркуриемъ и Венерою. Нижнія соединенія Меркурия и Венеры весьма важны въ Астрономіи, потому что посредствомъ ихъ весьма точно опредѣляется параллаксъ солнца, следовательно расстояние солнца отъ земли. Луна бываетъ каждый мѣсяцъ въ соединеніи съ солнцемъ, именно въ мгновеніе новолунія. Если это соединеніе послѣдуетъ въ узлахъ луннаго пути съ эклиптикою, или не болѣе 18° отъ нихъ, то послѣдуетъ затмѣніе солнца.

Въ Календаряхъ соединеніе означается знакомъ ζ . Соединенія планетъ и противуположенія ихъ съ солнцемъ вообще называются *сизигіями*. Время отъ одного соединенія или противуположенія до другаго, ближайшаго, называется *синодическимъ временемъ обращенія*.

CONJUGUÉ. (Геом.) **СОПРЯЖЕННЫЙ.** *Diamètres conjugués, сопряженные диаметры.* См. DIAMÈTRES.

CONJUGUÉE (OVALE). **ОТДѢЛЬНЫЙ, СОПРЯЖЕННЫЙ ОВАЛЪ.** Такъ называется *кружло-продолговатая* фигура, принадлежащая кривой линіи, и находящаяся въ ея плоскости но отдѣльно отъ прочихъ частей этой самой кривой. *Отдѣльные овалы* встрѣчаются въ Алгебрѣ—

ских кривых, начиная съ кривыхъ шретьяго порядка; такъ, наприкръ, овалъ AB (черп. 22 Листъ IV), который ондѣленъ разстояніемъ AC отъ части DCE . Предположивъ $AC = b$, $BA = c$, $AP = x$, $PM = y$, уравненіе этой кривой будетъ:

$$y^2 = x(x - b)(x + c).$$

Иногда сопряженный овалъ примыкаетъ къ кривой линіи. Наприкръ, если предположимъ $AC = b = 0$, то предыдущее уравненіе обратится въ слѣдующее:

$$y^2 = x^2(x + c),$$

и кривая, опредѣляемая этой уравненіемъ, будетъ имѣть видъ, изображенный на чертѣ 23 (Листъ IV). Въ такомъ случаѣ точка A будетъ двойною.

POINT CONJUGUÉ или ISOLE. Отдѣльная, сопряженная, уединенная точка. Такъ называемая отдѣльная отъ кривой линіи точка, по коей координаты удовлетворяютъ уравненію этой самой кривой. Наприкръ, предполагая въ предыдущемъ уравненіи $y^2 = x(x - b)(x + c)$, $c = 0$, увидимъ, что начало координатъ, то есть A (черп. 22 Листъ IV) есть отдѣльная точка; и дѣйствительно, въ предположеніи $AB = c = 0$, фигура AB обращается въ одну точку. Для опредѣленія сопряженной точки по уравненію кривой, надобно вывесли отношеніе $\frac{dy}{dx}$, и разсмотрѣть, для какой изъ системы координатъ x и y , удовлетворяющихъ уравненію кривой, это отношеніе обратится въ мнимое количество, или приметъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$. И такъ, для кривой, опредѣляемой уравненіемъ $y^2 = x^2(x - c)$, получимъ $\frac{dy}{dx} = \frac{3x - 2c}{2\sqrt{x - c}}$; для $x = 0$, $\frac{dy}{dx}$ обратится въ $\frac{-2c}{0} = \sqrt{-1}$, количество мнимое; но при $x = 0$ будетъ и $y = 0$; слѣдовательно, разсматриваемая кривая имѣетъ сопряженную точку въ началѣ координатъ. Слѣд. POINTS SINGULIERS.

Иногда случается, что сопряженный овалъ пересѣкается безконечно въ точку кривой; если, въ такомъ случаѣ, овалъ обратится въ одну точку, то она будетъ находиться на периметрѣ кривой, и имѣть съ нѣею быть сопряженною.

Такую точку называютъ прикосновенно-сопряженною (*point conjugué adhérent*).

CONJUGUÉS (tangentes). Сопряженные касательныя. Когда къ кривой поверхности проведемъ обертывающій цилиндръ, то касательная къ кривой касанія, въ какой на есть ея точка, и ребро цилиндра, проходящее чрезъ ту же точку, называются сопряженными касательными. Г. Дюпенъ (*Dupin*), въ сочиненіи своемъ *Développemens de Géométrie* (1815 г. in-4^e), первый употреблялъ это наименованіе, основываясь на томъ взаимномъ свойствѣ этихъ линій, что если одну изъ нихъ принять за ребро касательнаго цилиндра, то другая будетъ касательною къ кривой касанія на поверхности. Для дальнѣйшихъ подробностей о свойствахъ сопряженныхъ касательныхъ, отсылаемъ къ упомянутому сей часъ сочиненію Г. Дюпена.

CONJUGUÉS (hyperboles). Сопряженные гиперболы. Сопряженными или сопряженными называются такія гиперболы, которыя имѣютъ общія асимптоты. Наприкръ, на черп. 1 (Листъ V) гиперболы $ABCEFG$ и $GHKLM$ суть сопряженные одна относительно другой. Асимптоты NP и QR принадлежатъ имъ обѣмъ. Если уравненіе гиперболы $ABCEFG$ будетъ $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, то для гиперболы $GHKLM$ получимъ $y'^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(x'^2 + a'^2)$, откуда легко заключить, что поперечная ось одной изъ двухъ гиперболъ будетъ второю осью другой, и наоборотъ.

CONJUGUÉS (racines imaginaires). Сопряженные мнимые корни. Когда алгебраическое уравненіе имѣетъ комплексныя сопряженные, и допускаетъ мнимые корни, то сіи послѣдніе непременно будутъ по два сопряженные, то есть, если одинъ изъ нихъ равенъ $a + b\sqrt{-1}$, то необходимо будетъ другой $a - b\sqrt{-1}$. Дѣйствительно, положимъ, что корень $a + b\sqrt{-1}$ удовлетворяетъ уравненію $f(x) = 0$; слѣдовательно $f(a + b\sqrt{-1}) = A + B\sqrt{-1} = 0$, разутья подѣ A и B величины вещественныя; если разложимъ $f(a - b\sqrt{-1})$, то очевидно получимъ $A - B\sqrt{-1}$; но изъ уравненія $A + B\sqrt{-1} = 0$ выводимъ $A = 0$ и $B = 0$; слѣдовательно $A - B\sqrt{-1} = 0$, откуда заключаемъ что и корень $a - b\sqrt{-1}$ будетъ удовлетворять предложенному уравненію.

Корни $a + b\sqrt{-1}$ и $a - b\sqrt{-1}$ называются, один относительно друга, *сопряженными*.

CONNOISSANCE DES TEMPS. АСТРОНОМИ-

ЧЕССКИЙ КАЛЕНДАРЬ, заключающий в себя различныя таблицы, необходимыя для астрономов и мореплавателей. Первый помъ этого Календаря, за 1679-й годъ, вышелъ въ 1678 году, и былъ составленъ известнымъ астрономомъ *Пикардомъ* (*Picard*), членомъ Парижской Академiи Наукъ. Боле спользitia этотъ трудъ издавался Академiею Наукъ; нынѣ же онъ составляется при *Bureau des longitudes*.

СНОИДЕ. (Геом.) **КОНОИДЪ, ТѢЛО ВРАЩЕНИЯ.** Такъ называется тѣло, образуемое вращенiемъ какой ни есть кривой линiи около неподвижной оси. *Conoïde parabolique* или *paraboloides de révolution*; *параболическiй коноидъ* или *параболюидъ вращенiя*; *conoïde hyperbolique* или *hyperboloides de révolution*; *гиперболическiй коноидъ* или *гиперболюидъ вращенiя*, и проч. — Также называютъ и погда *коноидами* и тѣла, коихъ сѣченiя, перпендикулярныя оси, не круговыя, а имѣющыя какой ни есть другой видъ, сомкнутой кривой, напримѣръ, *эллиптическiй*. — Это же самое названiе присвоено одной лицевчатой поверхности сѣдущаго образованiя: прямая горизонтальная линiя, являясь параллельно самой себѣ, опиравшись на двѣ направляющiя, изъ которыхъ одна есть вертикальная прямая, а другая, плоская кривая линiя, на вертикальной плоскости начерченная. Смол. COIN CONOÏDE. —

Нѣкоторые математикъ называютъ *коноидомъ* всякое тѣло, ограниченное кривою поверхностью, простирающуюся въ безконечность, а *сферондомъ*, тѣло сомкнутое со всѣхъ сторонъ.

СНОИДЕ. Прилаг. **КОНОИДАЛЬНЫЙ, КОНОИДНЫЙ.** *Coin conoïde*; *коноидальный клинъ*. Смол. COIN CONOÏDE.

СНОН (SPIRALE DE). Геом. **КОНООВА СПИРАЛЬ.** Смол. SPIRALE.

СНОСЮТИР. ПОСЛѢДОВАТЕЛЬНЫЙ, СМЕЖНЫЙ. *En prenant trois élémens, trois points consécutifs sur une courbe...*; *взявъ на кривой три смежные элемента, три смежныя точки...* *Termes consécutifs d'une série infinie*; *последовательные, рядомъ стоящiя члены безконечной строки*.

CONSEQUENCE. СЛѢДСТВИЕ, ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Tirer une conséquence; *вывести слѣдствiе, заключить*; *заключить*.

СНОСЮЭНТ. (Ариф.) **ПОСЛѢДУЮЩИЙ.** Смол. ANTÉCÉDENT.

СНОСВОВАНИЕ DU MOUVEMENT DE CERTAINES DE GRAVITÉ (PRINCIPE DE LA). Начало **СНОХРАНЕНИЯ** ДВИЖЕНIЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ. Смол. DYNAMIQUE.

СНОСВЕРВОНЪ СВОЕГО СНОСТАНIЯ. (Мех.) **СОХРАНЯТЬ СВОЕ СНОСТАНIЕ.** Говорится о тѣлѣ, когда оно, повиноваясь закону инерцiи, или пребываетъ въ покоѣ, или движется по прямой линiи съ постоянною скоростью. Смол. INERTIE, FORCE.

СНОСВЕРВОНТ. (Мех.) **СОДѢЙСТВУЮЩИЙ.** *Forces, puissances conspirantes*; *содѣйствующiя силы*. Силы дѣйствующiя подъ какимы ни есть угломъ, оплнчными отъ двухъ прямыхъ; слѣдовательно, отсюда исключается тошъ случай, когда силы будутъ *прямопротивныя*. И такъ, силы пересѣкающiяся и силы дѣйствующiя по одному направлению, или по направленимъ параллельнымъ, и въ одну сторону, могутъ быть названы *силами содѣйствующими*. Впрочемъ, это наименованiе несвойственно, ибо направлениа и величины силъ могутъ быть таковы, что силы оптически уничтожатъ дѣйствiе другъ друга, или даже совсѣмъ истребятся.

СНОСВОНТ. (Мат.) **НОСТОЯННЫЙ, НЕИЗМѢНЯЕМЫЙ.** *Quantité constante* или просто *constante*; *постоянное, неизмѣняемое количество, постоянная*. Величина, которая остается одна и та же, между тѣмъ какъ другiя измѣняются, почему послѣдiя и называются *переменными* или *измѣняемыми величинами* (*quantités variables* или просто *variables*). И такъ *радиусъ круга, параметръ параболы, оси эллипса* и проч. суть количества *постоянныя*, а координаты этихъ кривыхъ, *координаты переменныя*. Впрочемъ, самое свойство задачи покажетъ всегда, какiя величины должны быть принимаемы за постоянныя. Въ Алгебрѣ, *постоянныя* обыкновенно изображаются первыми буквами алфавита, а *переменныя*, послѣдними.

CONSTANTE ARBITRAIRE. (Имш. Исч.) Произвольное постоянное количество, произвольная постоянная. Смол. INTEGRAL (CALCUL), ARBITRAIRE.

VARIATION DES CONSTANTES ARBITRAIRES. (Имш. Исч.) Изменение постоянных произвольных. Смол. VARIATION DES CONSTANTES.

CONSTELLATION или ASTÉRISME. (Астр.) **СОЗВЕЗДИЕ.** Собрание или система многих звезд, означенная какою либо фигурою человека, животного, машины и проч. Разделение звездного неба на группы различной фигуры, может быть, древнее самой Астрономии. Для обозрѣнія безчисленнаго множества звездъ, необходимо было раздѣлить всё звездное небо на части, и дать каждой изъ нихъ определенную фигуру и название.

Древнѣйшіе писатели, какъ церковные такъ и свѣтскіе, упоминаютъ о созвѣздіяхъ. Такъ въ *Евангеліи*, въ житіи Іова, гл. 9 стр. 9 сказано: *Творѣи пѣлѣдъ, ѿ сѣвера, ѿ арктѣа, ѿ сокровища бжжѣа; и далѣе, гл. 38 стр. 31, Глѣбѣла же ли бѣи собѣа пѣлѣдъ, ѿ ѿгражѣніе ѿрѣакоа ѿбѣзла ли сѣи.*

Еще и въ другихъ мѣстахъ Священнаго Писанія встрѣчаются названія нѣкоторыхъ созвѣздіи.

О многихъ созвѣздіяхъ упоминаютъ *Геліодъ* и *Глиеръ* за 900 лѣтъ до Р. Х. — *Аратъ*, Греческій астрономъ — Поэтъ, жившій за 277 лѣтъ до Р. Х., написалъ трактатъ о созвѣздіяхъ, извѣстныхъ въ его время, и означилъ какъ взаимное ихъ положеніе, такъ и относительно главнѣйшихъ круговъ неба. Знаменитый *Гиппархъ* доказалъ, что Аратъ слѣдовалъ при этомъ описаніи *Эвдоксу*, жившему за 100 лѣтъ до Арата. Вероятно *Птолемей*, въ своемъ *Алмагестѣ*, придалъ тѣ же фигуры и названія созвѣздіи, присовокупивъ къ нимъ нѣкоторыя новыя.

Древніе раздѣляли на созвѣздія только ту часть неба, которую они видѣли. Птолемей считалъ 48 созвѣздіи: 12 *зодіакальныхъ*, 21 въ *сѣверномъ полушаріи* и 15 въ *южномъ*. Звѣзды, не заключающіяся въ созвѣздіяхъ, но видимыя простымъ глазомъ, названы *незвѣзденными* (*informes, errantes, errantes*); впоследствии многія изъ нихъ вошли въ составъ новыхъ созвѣздіи. Самый по-

ный атласъ созвѣздіи составлялъ Беринскій астрономъ *Бодѣ*.

Въ прошедшемъ столѣтіи нѣкоторые писатели пыпались извлечь изъ фигуръ и названій созвѣздіи объясненія аллегорій и басенъ древней Мифологіи. Самыя остроумныя и правдоподобныя догадки по этому предмету, безъ сомнѣнія предложены Профессоромъ *Дюпи* (*Dupuis*) (Смол. *Journal des savans*, 1779 г. также за 1785, 1788 и 1806 годы).

Въ заключеніе приводимъ таблицу древнихъ и новыхъ созвѣздіи.

СОЗВЕЗДІЯ ПТОЛЕМЕЕВЫ.

Сѣверныя созвѣздія:

1. Малая медвѣдица. Petite ourse.
2. Большая медвѣдица. Grande ourse.
3. Драконъ. Dragon.
4. Цетей. Cephée.
5. Воиновъ. Le Bouvier.
6. Сѣверный вѣнецъ. Couronne boréale.
7. Геркулесъ. Hercule.
8. Лира. La lyre.
9. Лебедь. Le cygne.
10. Кассіопея. Cassiopée.
11. Персей. Persée.
12. Возничій. Le cocher.
13. Змѣносецъ. Le serpenteaire.
14. Змѣя. Le serpent.
15. Стрѣла. La flèche.
16. Орелъ и Антиной. L'aigle et Antinoüs.
17. Дельфинъ. Le dauphin.
18. Малый конь. Petit cheval.
19. Пегасъ. Le cheval Pégase.
20. Андромеда. Andromede.
21. Треугольникъ. Triangle.

Зодіакальныя созвѣздія:

22. Овѣнъ. Le bélier.
23. Телецъ. Le taureau.
24. Близнецы. Les gémeaux.
25. Ракъ. Le cancer или l'ecrevisse.
26. Левъ. Le lion.
27. Дѣва. La vierge.
28. Вѣсъ. La balance или les serres.
29. Скорпионъ. Le scorpion.
30. Стрѣлецъ. Le sagittaire.
31. Козерогъ. Le capricorne.
32. Водолей. Le versseau.
33. Рыбы. Les poissons.

Южная созвездія:

34. Китъ. La baleine.
35. Орионъ. Orion.
36. Эриданъ. L'Eridan.
37. Задцъ. Le lièvre.
38. Большой пёсъ. Le chien.
39. Малый пёсъ. Procyon или le chien précurseur.
40. Корабль Арго. Argo.
41. Гидра. L'hydre.
42. Чаша или кубокъ. La coupe.
43. Вороны. Le corbeau.
44. Кентавръ. Le centaure.
45. Волкъ. Le loup.
46. Жершеникъ. L'autel.
47. Южный вѣнецъ. La couronne australe.
48. Южная рыба. Le poisson austral.

Созвездія, прибавленные Гевелиемъ:

1. Антиной (подъ орломъ). Antinoüs.
2. Гора Менахъ. Le mont Ménale.
3. Гонимыя собаки. Les chiens de chasse.
4. Жирафъ или КAMEЛОПАРДЪ. La giraffe.
5. Церберъ. Cerbère.
6. Власы Вереникины. La chevelure de Bérénice.
7. Ящерица. Le lézard.
8. Рысь. Le lynx.
9. Щитъ Собіескаго. L'écu de Sobieski.
10. Секстантъ Урании. Le sextant d'Uranie.
11. Малый треугольникъ. Le petit triangle.
12. Малый левъ. Le petit lion.

*Созвездія, прибавленные Галлеемъ съ
южной стороны неба:*

1. Голубь. La colombe.
2. Дубъ Карла II. Le chêne de Charles II.
3. Журавль. La grue.
4. Фениксъ. Le phénix.
5. Павлинъ. Le paon.
6. Индійская птица. L'oiseau indien или sans pied.
7. Муха. La mouche.
8. Хамелеонъ. Le caméléon.

Южная созвездія Байера:

1. Индеецъ. L'Indien.
2. Журавль. La grue.
3. Фениксъ. Le phénix.
4. Пчела или муха. L'abeille или la mouche.
5. Южный треугольникъ. Le triangle austral.
6. Райская птица. L'oiseau du paradis.

7. Павлинъ. Le paon.
8. Туканъ. Le toucan.
9. Гидра. L'hydre mâle.
10. Дорада. La dorade.
11. Летучая рыба. Le poisson volant.
12. Хамелеонъ. Le caméléon.

Южная созвездія Лакалля (Lacaille):

1. Мастерская скульптора. L'atelier du sculpteur.
2. Химическая печь. Le fourneau chimique.
3. Астрономическіе часы. L'horloge astronomique.
4. Ромбоидальная сѣтка. Le réticule rhomboïde.
5. Рѣзецъ гравера. Le burin du graveur.
6. Скамеекъ живописца. Le chevalet du peintre.
7. Компасъ. La boussole.
8. Пневматическая машина. La machine pneumatique.
9. Октантъ. L'octant.
10. Циркуль и кругъ. Le compas et le cercle.
11. Наугольникъ и линейка. L'équerre et la règle.
12. Телескопъ. Le télescope.
13. Микроскопъ. Le microscope.
14. Столовая гора. La montagne de la table.
15. Большое и малое облако. Grand et petit nuages.
16. Крестъ. La croix.

Другія новыя созвездія:

Олень. Le renne.

Пустынникъ. Le solitaire.

Мессьеръ, (спорожъ). Le messier.

Волъ Понятовскаго. Le taureau de Poniatowski.

Почести Фридриха. Les honneurs de Frédéric.

Бранденбургскій скипетръ. Le sceptre de Brandebourg.

Гершель телескопъ. Le telescope de Herschel.

Воздушный шаръ. Le globe aérostatique.

Сѣтчатый квадратъ. Le quart de cercle mural.

Кошъ. Le chat.

Ладъ. Le hoch.

Арта Георга. La harpe de George.

CONSTRUCTEUR DES ÉQUATIONS. КОРРЕ-

СТРОИТЕЛЬНАЯ МАШИНА. Машина посредствомъ которой опредѣляются, по приближенію, вещественные корни алгебраическаго уравненія какой ни есть степени. Числа и формулы подробное описаніе этой машины въ *Encyclopédie Méthodique*, отдѣленіе *Mathématiques* (Том. 1 стр. 659).

CONSTRUCTION. (Геом.) ПОСТРОЕНИЕ, СТРОЕНИЕ, КОНСТРУКЦИЯ. — ЧЕРЧЕНИЕ. — СОСТАВЛЕНИЕ.

Графическое производство надъ линиями дѣйствій, изображенныхъ алгебраическою формулою. Напримеръ, если бы неизвѣстная линия x определялась формулою

$$x = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

гдѣ a, b, c изображаютъ данныя линіи, то для построенія этой величины x слѣдовало бы: 1° опредѣлить длину $\sqrt{a^2 + b^2}$, которую означимъ чрезъ l , и 2° найти x изъ формулы $x = \frac{c^2}{l}$, или, что всё равно, изъ пропорціи $b : c :: c : x$.

Для опредѣленія линіи $l = \sqrt{a^2 + b^2}$, стоимъ только построить прямоугольный треугольникъ ABC (черт. 2 Листъ V) такъ, чтобы $AB = a$, $AC = b$; гипотенуза BC будетъ исконая линія l . Потомъ, составимъ произвольный уголъ HOI (черт. 2); отложимъ по OH линію $OD = l$ и $OF = OE = c$ по OH и OI ; соединимъ точку D съ точкою E , проводимъ линію FG параллельно DE . Очевидно, что по прицѣлу подобія треугольниковъ ODE и OFG получимъ $OD : OF = OE : OG$, или, что всё равно, $l : c :: c : x$; слѣдовательно $x = OG$, и выраженіе $\frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ построено.

CONSTRUCTION D'UNE TABLE. Составленіе таблицы.

CONSTRUCTION D'UNE COURBE PAR POINTS. Построеніе кривой линіи по точкамъ. Когда, опредѣливъ по извѣстнымъ правиламъ достаточное число точекъ, принадлежащихъ какой либо кривой линіи, соединимъ ихъ непрерывною кривою, то такого рода черченіе называется *построеніемъ кривой по точкамъ*. Для примѣровъ опспыдаемъ числителей къ словамъ Cissoïde, CONCHOÏDE и проч.

CONSTRUCTION DES ÉQUATIONS. Построеніе, строеніе уравненій. Опредѣленіе корней уравненій посредствомъ графическихъ дѣйствій. Напримеръ, если бы требовалось найти *чрезъ построеніе* величину x изъ уравненія

$$x^2 = 2a^2,$$

гдѣ a изображаетъ линію извѣстную, то стоило бы только начертить двѣ параболы, опредѣляемыя уравненіями

$$x^2 = ay \text{ и } y^2 = 2ax,$$

и абсцисса x , соответствующая точкѣ пересѣченія этихъ двухъ параболъ, изобразила бы искомую величину x ; дѣйствительно, предположивъ $y' = y$, найдемъ

$$x^2 = ay \text{ и } y^2 = 2ax,$$

откуда, по исключеніи y , получимъ

$$x^4 = 2a^2x.$$

Величина $x = 0$, соответствующая общей вершинѣ двухъ параболъ, должна бытъ опкинута; слѣдовательно, раздѣляя на x , найдемъ

$$x^3 = 2a^2, \text{ откуда } x = \sqrt[3]{2a^2}.$$

Эта задача извѣстна подъ наименованіемъ *задачи объ удвоеніи куба*. Смол. CONIQUE (SECTION), DUPLICATION DU CUBE, CISSEID, TRISSECTON DE L'ANGLE и проч.

Графическое построеніе корней алгебраическихъ уравненій было предметомъ изслѣдованій для многихъ математиковъ, и между прочими для Виета, Декарта, Бакера, Ла Гира, Ньютона, Маклорена, Маркиса де Л'Опитала. Нынѣ, съ усовершенствованіемъ аналитической теоріи алгебраическихъ уравненій, эти способы потеряли ту значительность, какую имѣли прежде.

РАССТРОЕНОСТЬ. По строенію, по построенію. — По черченію. Deux lignes égales par construction, двѣ линіи равныя по строенію, по отложенію Deux angles égaux par construction; два угла равныя по строенію, по нанесенію.

CONSTRUCTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. (Исп. Иск.) ПОСТРОЕНИЕ дифференціальныя уравненій. Для построенія дифференціальныя уравненій, то есть кривыхъ ими опредѣляемыхъ, стараются привести эти уравненія къ другимъ, коихъ строеніе уже извѣстно. Если же не успѣютъ въ этомъ, то можно будетъ употребить одинъ изъ слѣдующихъ способовъ.

Положимъ, напримеръ, что кривая дана посредствомъ уравненія между дугою s и тригонометрическимъ тангенсомъ $\frac{dy}{dx} = p$ касательной съ осью x -овъ; слѣдовательно $s = f(p)$. Такого рода уравненіе очевидно будетъ дифференціальнымъ уравненіемъ второго порядка въ разсужденіи прямоугольныхъ координатъ x и y ; дѣйствительно, взявъ его дифференціалъ, получимъ

$$\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = f\left(\frac{dy}{dx}\right) \frac{d^2y}{dx^2},$$

наблюдая что $s = \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$ а $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Для построения кривой, выражаемой уравнением $s = f(p)$, въ которомъ p принимается за переменную независимую, положимъ, что эта кривая проходитъ чрезъ начало координатъ O (черт. 3 Листъ V), гдѣ $p = 0$; взявъ по произволію величину p , то есть задавъ себѣ уголъ MTP , определимъ изъ уравненія кривой дугу OM . Принявъ потомъ другое значеніе для p , весьма мало разнѣющееся отъ предыдущаго, найдемъ дугу OM' ; разность между двумя найденными дугами, определимъ длину небольшой дуги MM' . Принявъ эту послѣднюю за прямую линію, коей наклоненіе къ оси OX равно средней арифметической между углами MTP и $M'T'P'$, получимъ $MQ = \frac{MM'}{2} \cos \alpha$, $M'Q = \frac{MM'}{2} \sin \alpha$, разумѣя подъ α полу-сумму угловъ MTP и $M'T'P'$. Легко видѣть, что если составимъ рядъ возрастающихъ величинъ для p , начиная отъ $p = 0$, такъ, чтобы каждыя два смежныя члена этого ряда весьма мало разнѣшались между собою, то сумма линій, подобныхъ MQ или PP' , вычисленныхъ для всѣхъ величинъ p , будетъ приблизительно изображать абсциссу OM , а сумма линій, подобныхъ $M'Q$, изображать ординату PM . Зная x и y , можно будетъ построить кривую $OMM'A$.

Изложенный сей-часъ способъ предложенъ Эйлеромъ; Лежандръ, въ своихъ *Exercices de Calcul Intégral*, придавъ ему болѣе точности, выразивъ посредствомъ сходящихся рядовъ поправки для x и y въ томъ случаѣ, когда кривая, определяемая уравненіемъ $s = f(p)$, имѣетъ малую кривизну.

Разнаправленіе соприкасающихся кривыхъ доспавляетъ способъ для построения по приближенію дифференціальнымъ уравненіемъ съ двумя переменными, и каковаго бы ни былъ порядка.

Когда имѣемъ дифференціальное уравненіе перваго порядка, то беремъ произвольно точку M (черт. 4 Листъ V), коей координаты пусть будутъ $OP = a$ и $PM = b$; подставивъ a и b на мѣсто x и y въ предложенное уравненіе, выведемъ изъ него величину для $\frac{dy}{dx}$; эта величина очевидно изобразитъ тангенсъ угла, составляемаго осью OX съ касательною MT къ искомой кривой въ точкѣ M . Беремъ теперь на продол-

женіи прямой TM точку M' ; эта точка такъ же будетъ удалена отъ искомой кривой, чѣмъ разстояніе MM' будетъ меньше. Подставляя величинъ OP' , $P'M'$ на мѣсто x и y въ предложенное дифференціальное уравненіе доспавимъ новую величину для $\frac{dy}{dx}$, по которой опредѣлимъ направленіе касательной $M'T'$, составляющей весьма малый уголъ съ прямою MT , и следовательно, весьма близко подходящей къ искомой кривой. Продолжая точно такимъ образомъ, получимъ многоугольникъ $MM'M''M'''...$, который такъ ближе будетъ подходить къ кривой, определяемой предложеннымъ дифференціальнымъ уравненіемъ, чѣмъ меньше будутъ линіи MM' , $M'M''$, $M''M'''...$.

Когда имѣемъ дифференціальное уравненіе втораго порядка, то для построения кривой, имъ определяемой, можно будетъ употребить кругъ кривизны. Выбравъ по произволію точку M (черт. 5 Листъ V) и направленіе первой касательной MT , имѣемъ величины для x , y и $\frac{dy}{dx}$; подставляя ихъ въ предложенное уравненіе, найдемъ соопвѣствующую имъ величину для $\frac{d^2y}{dx^2}$. Посредствомъ же известныхъ величинъ $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, можно будетъ опредѣлить радіусъ кривизны, соопвѣствующій точкѣ M . Действительно, известно, что радіусъ кривизны $= \frac{(1 + \frac{dy^2}{dx^2})^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$.

Проведъ изъ M нормальную, и отложивъ по ней найденную длину MC радіуса кривизны, опишемъ изъ C , радіусомъ CM , круговую дугу; на этой дугѣ беремъ весьма близкую къ M точку M' , для которой величины x , y и $\frac{dy}{dx}$ будутъ опять известны. Опредѣливъ посредствомъ сихъ послѣднихъ $\frac{d^2y}{dx^2}$, вычислѣмъ радіусъ кривизны $M'C$, и опишемъ изъ точки C свѣтъ радіусомъ круговую дугу $M'M''$; продолжая такимъ образомъ, опредѣлимъ рядъ точекъ M , M' , $M''...$ такъ ближе подходящихъ къ кривой, чѣмъ меньше будутъ круговыя дуги MM' , $M'M''...$.

Для построения кривыхъ, определяемыхъ дифференціальными уравненіями высшихъ порядковъ,

надлежало бы прибавить къ соприкасающимся кривымъ также высшіе порядковъ.

CONSTRUIRE. (Геои.) **ПОСТРОИТЬ. — НАЧЕРТИТЬ. — СОСТАВИТЬ.** Определить графическими дѣйствіями величину, выраженную алгебраическою формулою. См **CONSTRUCTION.** *Construire les racines d'une équation du troisième degré; построить корни уравненія третьей степени Construire une table; составить таблицу.*

CONTACT. (Геои.) **КАСАНИЕ, ПРИКОСНОВЕНІЕ.** *Point de contact; точка касанія, прикосновенія.* Такъ называется точка на кривой линіи, чрезъ которую проведена касательная, или, общіе, точка, въ которой двѣ кривыя касаются одна другой.

THEORIE DES CONTACTS DES CORPS PLANS. Теорія прикосновенія плоскихъ кривыхъ. Положимъ, что изъ точки m касанія двухъ плоскихъ кривыхъ AB и CD (черт. 6 Листъ V), безконечно малымъ радіусомъ i , описали окружность круга EF ; эта окружность пересѣчетъ обѣ кривыя въ точкахъ n и n' , безконечно близкихъ одна онъ другой. Слѣдствіе прикосновенія кривыхъ AB и CD , на разстояніи i отъ точки ихъ взаимнаго касанія, будетъ измѣряться безконечно малою дугою nn' , или, что все равно, хордою, соединяющею двѣ точки n и n' . Если, сверхъ того, изобразимъ чрезъ ω уголъ, составленный радіусами nm и nm' , то дуга nn' будетъ равняться произведенію $i\omega$, а хорда $nn' = 2i \sin \frac{1}{2}\omega$. Легко видѣть, что въ опредѣленности точки касанія m , кривыя будутъ тѣмъ ближе близки одна къ другой, чѣмъ менше будетъ уголъ ω , соответствующій всею малому значенію радіуса i . И такъ, чтобы составить себѣ ясное понятіе о порядкѣ прикосновенія двухъ кривыхъ линій, надобно разскапъ, чрезъ какія сшеніи величинъ можеть переходить безконечно малый уголъ ω , принимаемый за функцію радіуса i .

Но, при сближеніи кривыхъ AB и CD , уголъ ω , въ опредѣленности точки m , непрестанно уменьшается а слѣдовательно, порядокъ сей безконечно малой величины будетъ по мѣрѣ того возвышаться. Основываясь на этомъ замѣчаніи, естественно брать за **порядокъ прикосновенія (ordre de contact)** двухъ кривыхъ, самый порядокъ

безконечно малой величины ω , принимаемой за функцію радіуса i . Пустьъ будетъ a порядокъ безконечно малого угла ω . Такъ какъ предѣлъ отношенія

$$\frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}$$

есть единица, то произведеііе

$$\omega \frac{\sin \frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega} = 2 \sin \frac{1}{2}\omega$$

будетъ количествомъ безконечно малое того же порядка a , а выраженія $i \omega$ и $2i \sin \frac{1}{2}\omega$, количества безконечно малыя порядка $a+1$. Смотри **INFINIMENT PETIT**. И такъ, можно будетъ предположить слѣдующую теорему:

Когда двѣ кривыя AB и CD касаются одна другой въ точкѣ m , то порядокъ прикосновенія въ этой точкѣ равняется порядку безконечно малой хорды nn' , безъ единицы; хорда nn' получается соединивъ прямою точки n и n' , въ которыхъ кругъ, описанный радіусомъ i изъ центра m , пересѣкаетъ разсматриваемыя двѣ кривыя. Радіусъ i принимается здѣсь за безконечно малое количество первого порядка.

Вѣдѣно хорды nn' можно употреблять разстояніе nq , заключающееся между точками n и q двухъ кривыхъ, гдѣ сѣкущая SS' пересѣкаетъ ихъ; но, въ такомъ случаѣ, должно предположить, что уголъ mnq , составляемый сѣкущею съ элементомъ кривой, чувствительнымъ образомъ разнится отъ нуля. Въ этомъ предположеніи стороны nq и nn' треугольника nnq суть величины одного и того же порядка, ибо онѣ, какъ извѣстно изъ Тригонометріи, соотвѣстственно пропорціональны синусамъ противоположныхъ угловъ $nn'q$ и qnq' , которые, въ настоящемъ случаѣ, не обращаются въ нуль. Слѣдовательно, порядокъ безконечно малой величины nq , увеличенный единицею, изображаетъ порядокъ прикосновенія двухъ кривыхъ AB и CD въ точкѣ m .

Если кривыя AB и CD определяются уравненіями между прямоугольными координатами x и y , и если, сверхъ того, общій касательная въ точкѣ m не будетъ параллельна оси y -ою, то предположивъ, что сѣкущая SS' параллельна этой оси, и замѣтивъ, что разстояніе точки прикосновенія отъ сѣкущей есть количество безконечно малое первого порядка, именно, равное произведенію $i \sin(mnq)$, выведемъ слѣдующее предположеніе:

Для определения порядка прикосновения двух плоских кривых, касающихся в такой точке, в которой общая их касательная не параллельна оси y -ой, надобно провести бесконечно близкую ординату к точке прикосновения; потом искать число, изображающее порядок бесконечно малой величины той части ординаты, которая заключается между двумя кривыми, приравняв расстояние точки прикосновения от ординаты принимается за бесконечно малое количество ε порядка. Это число, уменьшенное в единицу, изображает порядок прикосновения.

Вопре краткое изложение теории прикосновения плоских кривых в том же виде, в каком предложил ее Г. Коши в сочинении своем: *Leçons sur les applications du Calcul Infinitesimal a la Géométrie*; Paris, 1826 $m=4^0$, в 2х частях. Мы не будем останавливаться на изложении этой теории; читатели найдут обширнейшие дополнения этого предмета в книге, о которой сейчас упоминали. — Изложим теперь вкратце теорию прикосновения плоских кривых в том же виде, в каком она обыкновенно предлагается.

Опишем кривые AMB и CMD (черт. 7 Лист V) в двух прямоугольных осях OX , OY , и предположим, что эти кривые соответственно определяются уравнениями $y=f(x)$ и $Y=F(x)$. Допустим, что кривые AB и CD имеют общую точку M , и пусть будет $\overline{OP} = x$, $\overline{PM} = y$; следовательно $y=f(x)$, откуда $f(x)=F(x)$. Возьмем теперь в соображение другую абсциссу $\overline{OP'}$, весьма мало различающуюся от прежней \overline{OP} , и положим $\overline{PP'} = i$, величина i будет весьма малая, и абсцисса $\overline{OP'}$ изобразится суммой $x+i$. Подставляя эту величину на место x в уравнения кривых, найдем, по Тейлоровой теореме,

$$\overline{P'm} = f(x+i) = f(x) + f'(x)i + \frac{f''(x)}{1 \cdot 2} i^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m} i^m + \dots$$

$$\overline{P'n} = F(x+i) = F(x) + F'(x)i + \frac{F''(x)}{1 \cdot 2} i^2 + \dots + \frac{F^{(m)}(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m} i^m + \dots$$

Если изобразим через ε разность \overline{mn} между этими двумя ординатами, то, в следствие равенства $f(x)=F(x)$, получим

$$(1) \quad \varepsilon = [f'(x) - F'(x)]i + [f''(x) - F''(x)] \frac{i^2}{1 \cdot 2} + \dots + [f^{(m)}(x) - F^{(m)}(x)] \frac{i^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m} + \dots$$

Степень сближения двух кривых будет зависеть от степени малости величины ε ; но так как i изображает количество весьма малое, то ясно, что ε будет тем меньше, чем больше будет уничтожающихся членов в ряду (1), считая их по порядку от первого. Если $f'(x) - F'(x) = 0$, или $f'(x) = F'(x)$, то ε пропорционально величине i^2 , и кривые имеют общую касательную. В таком случае говоримся, что кривые имеют между собою прикосновение первого порядка (*contact du premier ordre*) в точке M . Если, сверх того, будет $f''(x) = F''(x)$, то получится прикосновение второго порядка. Вообще, когда имеют ряд равенств

$$(2) \quad f'(x) = F'(x), f''(x) = F''(x), f'''(x) = F'''(x), \dots, f^{(m)}(x) = F^{(m)}(x),$$

так что первая из уничтожающихся разностей есть $f^{(m+1)}(x) - F^{(m+1)}(x)$, то кривые, для которых эти условия удовлетворяются, имеют в точке касания прикосновение m -го порядка.

Высший порядок прикосновения, то есть наибольшая степень сближения кривой, данной только по виду, с предложенною кривою линиею, называется *соприкасанием* (*osculation*). Кривая, данная только по виду, называется *соприкасающеюся кривою* (*courbe osculatrice*). Число постоянных количеств, заключающихся в самом общем уравнении, определяет высший порядок прикосновения, то есть *соприкасание*. Вообще, предполагая, что уравнение соприкасающейся кривой содержит в себе $(m+1)$ постоянных количеств, легко видеть, что порядок прикосновения будет m -ой, ибо сверх числа m условий, выраженных рядом (2), имеют еще одно, изображаемое уравнением $f(x)=F(x)$. Если, напротив, примем за соприкасающуюся кривую круг, то он может иметь с предложенною кривою линиею прикосновение второго порядка, потому что самое общее уравнение круга заключает в себе три постоянных количества — две координаты центра и радиус; следовательно можно будет удовлетворить трем условиям, именно: $f(x)=F(x)$, $f'(x)=F'(x)$ и $f''(x)=F''(x)$. Такой круг называется *соприкасающимся кругом* или *кругом кривизны*. См. OSCULATEUR (CERCLE).

Нѣкоторыя математич. называютъ *соприкасающимися кривыми* тѣми, которыя, въ точкѣ прикосновенія, имѣютъ одинъ и тотъ же кругъ кривизны.

Для другихъ подробностей по этому предмету отсылаемъ читателей къ статьямъ: OSCULATION, DÉVELOPPÉE, DÉVELOPPANTE, COURBURE, и проч.; также, сверхъ упомянутого выше сочиненія Г. Коши, къ книгѣ: *Théorie des fonctions analytiques*, соч. Лагранжа.

Согласіе двѣхъ кривыхъ а double courbure.

Двѣ кривизны кривыхъ двоякой кривизны. Вообразимъ двѣ кривыя имѣющія общую точку M . Если изъ M , принимая за центръ, радіусомъ безконечно малымъ i , опишемъ шаровую поверхность, то она пересѣчетъ кривыя въ двухъ точкахъ m и n , весьма близкихъ между собою. Степень сближенія двухъ кривыхъ будетъ измѣряться безконечно малой хордою mn . Если изобразимъ чрезъ ω уголъ mMn , составляемый радіусами, то получимъ, какъ и выше,

$$\text{хорда } mn = 2i \sin \frac{1}{2} \omega.$$

Разсуждая точно такъ, какъ въ случаѣ прикосновенія плоскихъ кривыхъ, выведемъ слѣдующую теорему:

Когда двѣ кривыя касаются одна другой въ точкѣ M , то порядокъ изъ прикосновенія будетъ единицею меньше противу порядка безконечно малой величины, изображающей разстояніе точекъ m и n , взятыхъ на кривыхъ отъ разстоянія i отъ M ; длина i принимаетъ здѣсь за безконечно малое количество *т-го* порядка.

Положимъ, что кривыя даны посредствомъ уравненій между прямоугольными координатами; пусть будутъ $y = f_1(x)$, $z = f_2(x)$ уравненія одной изъ нихъ, а $Y = F_1(x)$, $Z = F_2(x)$ уравненія другой; такъ какъ кривыя имѣютъ общую точку M , то предположимъ, что координаты ея суть x , y , z , получимъ

$$f_1(x) = F_1(x), \quad f_2(x) = F_2(x).$$

Изобразимъ чрезъ i безконечно малое приращеніе абсциссы x , и положимъ, что на разстояніи $x+i$ отъ начала координатъ провели плоскость, перпендикулярную къ оси x ; эта плоскость пересѣчетъ обѣ кривыя въ нѣкоторыхъ точкахъ,

которыя означимъ буквами m и n ; пусть будемъ ϵ разстояніе mn . Очевидно, что степень сближенія двухъ кривыхъ, въ опредѣленности точки M , будетъ зависѣть отъ степени малости величины ϵ . Для опредѣленія количества ϵ , заметимъ, что координаты точекъ m и n будутъ соотвѣстственно:

$$\begin{aligned} x+i, \quad f_1(x+i), \quad f_2(x+i) \\ x+i, \quad F_1(x+i), \quad F_2(x+i). \end{aligned}$$

Слѣдовательно

$$\epsilon = \sqrt{[f_1(x+i) - F_1(x+i)]^2 + [f_2(x+i) - F_2(x+i)]^2}.$$

Если разложимъ теперь каждую изъ функций $f_1(x+i)$, $F_1(x+i)$, $f_2(x+i)$ и $F_2(x+i)$ въ рядъ, и примемъ въ соображеніе уравненія $f_1(x) = F_1(x)$, $f_2(x) = F_2(x)$, то найдемъ для подкореннаго количества сумму

$$\begin{aligned} & [(f_1'(x) - F_1'(x))i + (f_1''(x) - F_1''(x))\frac{i^2}{1.2} + \dots]^2 \\ & + [(f_2'(x) - F_2'(x))i + (f_2''(x) - F_2''(x))\frac{i^2}{1.2} + \dots]^2. \end{aligned}$$

Изъ разсмотрѣнія этого выраженія, увидимъ, что когда $f_1'(x) = F_1'(x)$ и $f_2'(x) = F_2'(x)$, то количество ϵ будетъ пропорціонально i^2 , и кривыя будутъ имѣть, въ точкѣ M , прикосновеніе *перваго* порядка.

Когда, сверхъ того,

$$f_1''(x) = F_1''(x) \quad \text{и} \quad f_2''(x) = F_2''(x),$$

то ϵ пропорціонально i^3 , и получится прикосновеніе *второго* порядка. Слѣд. OSCULATEUR (CERCLE). Вообще, если предположимъ существованіе слѣдующихъ условий:

$$f_1(x) = F_1(x), \quad f_2(x) = F_2(x)$$

$$f_1'(x) = F_1'(x), \quad f_2'(x) = F_2'(x)$$

$$f_1''(x) = F_1''(x), \quad f_2''(x) = F_2''(x)$$

$$\dots \dots \dots f_1^{(m)}(x) = F_1^{(m)}(x), \quad f_2^{(m)}(x) = F_2^{(m)}(x),$$

и допустимъ сверхъ того, что по крайней мѣрѣ одно изъ равенствъ

$$f_1^{(m+1)}(x) = F_1^{(m+1)}(x), \quad f_2^{(m+1)}(x) = F_2^{(m+1)}(x)$$

не имѣетъ мѣста, то кривыя, удовлетворяющія этимъ предположеніямъ, будутъ имѣть, въ общей точкѣ, прикосновеніе *m-го* порядка.

Высшій порядокъ прикосновенія двухъ кривыхъ двоякой кривизны можно назвать *соприкасаеміемъ*.

Согласіе двѣхъ поверхностей двойной кривизны. Прикосновеніе кривыхъ поверхностей. Разсмотримъ двѣ поверхности, которыя касаются

одна другой в точке M . Если провести чрез M плоскость, нормальную къ обоимъ поверхностямъ, то кривыя пересѣченія будутъ касательными одна къ другой. Предположимъ теперь, что упомянутая плоскость обращается около нормали; положение и видъ кривыхъ пересѣченія вообще изменятся. Что касается до числа, изображающаго порядокъ прикосновенія сихъ кривыхъ, то оно можетъ быть или постояннымъ, или измѣняющимся вѣдѣ съ положеніемъ нормальной плоскости. Это число, когда оно будетъ постоянное, или, въ противномъ случаѣ, *наименьшая* его величина, опредѣляетъ порядокъ прикосновенія *двухъ* поверхностей. Пусть будетъ m этотъ порядокъ. Если изъ точки M , принимаемой за центръ, опишемъ дугу круга бесконечно малымъ радиусомъ ρ ; то эта дуга пересѣкнетъ кривыя сѣченія, заключающіяся въ нормальной плоскости, въ двухъ точкахъ P и Q ; разстояніе PQ , измѣняющееся съ положеніемъ нормальной плоскости, будетъ также бесконечно малымъ количествомъ порядка или постоянного, или переменнаго; сумма $m+1$ изобразитъ или *наименьшую* величину этого порядка, или постоянное его значеніе.

Когда кривыя поверхности даны посредствомъ ихъ уравненій между прямоугольными координатами, то, по общепредлагаемой теоріи сопрягасанія, разсуждаемъ слѣдующимъ образомъ:

Пусть будутъ

$$1) z = f(x, y) \quad \text{и} \quad 2) Z = F(X, Y)$$

уравненій двухъ данныхъ поверхностей. Предполагая, что общая точка M соответствуетъ координатамъ x, y, z , получимъ для этой точки $X = x, Y = y, Z = z$, и слѣдовательно $f(x, y) = F(x, y)$. Положимъ теперь, что на первой поверхности разсматривается точка P , а во второй, точка Q , соответственно опредѣляемыя координатами

$$\begin{aligned} x + i, y + k, f(x + i, y + k) \\ x + i, y + k, F(x + i, y + k); \end{aligned}$$

гдѣ i и k изображаютъ количества бесконечно малыя первого порядка, независимыя между собою. Разстояніе PQ , которое изобразитъ чрезъ ϵ , опредѣлится разностию

$$\epsilon = F(x + i, y + k) - f(x + i, y + k);$$

эта разность, въ слѣдствіе равенства $f(x, y) = F(x, y)$, будучи разложена въ рядъ, приведемъ видъ

$$\epsilon = \left(\frac{dZ}{dX} - \frac{dz}{dx} \right) i + \left(\frac{dZ}{dY} - \frac{dz}{dy} \right) k + \left(\frac{d^2 Z}{dX^2} - \frac{d^2 z}{dx^2} \right) \frac{i^2}{1.2} + \left(\frac{d^2 Z}{dX dY} - \frac{d^2 z}{dx dy} \right) ik + \left(\frac{d^2 Z}{dY^2} - \frac{d^2 z}{dy^2} \right) \frac{k^2}{1.2} + \dots$$

Въ этомъ разложеніи $\frac{dZ}{dX}, \frac{dZ}{dY}$ изображаютъ соответственно производныя первого порядка функціи $F(x, y)$ относительно x и y ; $\frac{d^2 Z}{dX^2}, \frac{d^2 Z}{dX dY}, \frac{d^2 Z}{dY^2}$ производныя второго порядка той же функціи: первая, относительно x ; вторая, относительно x и y ; третья, относительно y ; и такъ далѣе. Очевидно теперь, что когда будемъ идти къ одно время

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{dz}{dx}, \quad \frac{dZ}{dY} = \frac{dz}{dy},$$

то ϵ изобразитъ количество бесконечно малое второго порядка, и поверхность будетъ имѣть прикосновеніе *первого* порядка.

Когда, сверхъ того,

$$\frac{d^2 Z}{dX^2} = \frac{d^2 z}{dx^2}, \quad \frac{d^2 Z}{dX dY} = \frac{d^2 z}{dx dy}, \quad \frac{d^2 Z}{dY^2} = \frac{d^2 z}{dy^2},$$

то прикосновеніе поверхностей будетъ *второго* порядка, и такъ далѣе.

Вообще, если допустимъ условія

$$\begin{aligned} Z &= z \\ \frac{dZ}{dX} &= \frac{dz}{dx}, \quad \frac{dZ}{dY} = \frac{dz}{dy} \\ \frac{d^2 Z}{dX^2} &= \frac{d^2 z}{dx^2}, \quad \frac{d^2 Z}{dX dY} = \frac{d^2 z}{dx dy}, \quad \frac{d^2 Z}{dY^2} = \frac{d^2 z}{dy^2} \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d^m Z}{dX^m} &= \frac{d^m z}{dx^m}, \quad \frac{d^m Z}{dX^{m-1} dY} = \frac{d^m z}{dx^{m-1} dy}, \\ &\frac{d^m Z}{dX^{m-2} dY^2} = \frac{d^m z}{dx^{m-2} dy^2}, \dots \frac{d^m Z}{dY^m} = \frac{d^m z}{dy^m}, \end{aligned}$$

и, сверхъ того, предположимъ, что по крайней мѣрѣ одно изъ равенствъ

$$\begin{aligned} \frac{d^{m+1} Z}{dX^{m+1}} &= \frac{d^{m+1} z}{dx^{m+1}}, \quad \frac{d^{m+1} Z}{dX^m dY} = \frac{d^{m+1} z}{dx^m dy}, \\ \frac{d^{m+1} Z}{dX^{m-1} dY^2} &= \frac{d^{m+1} z}{dx^{m-1} dy^2}, \dots \end{aligned}$$

не имѣетъ мѣста, то двѣ кривыя поверхности, удовлетворяющія этимъ условіямъ, будутъ имѣть въ общей точкѣ прикосновеніе m -го порядка.

Высшій порядокъ прикосновенія двухъ поверхностей называется, какъ и для кривыхъ линій, *соприкасаниемъ*.

Описываемъ чинящееся для дальнѣйшихъ подробностей къ упомянутымъ уже выше сочиненіямъ. Смол. также COURBURE DES SURFACES, TANGENTE, TANGENT (PLAN).

CONTACT (ELEMENTS DE). Элементы касания.

Так называются постоянные величины, входящие в уравнение касательной или соприкасающейся кривой. Так, например, в соприкасающейся кривой, мысленно сь предложенною кривой касание второго порядка, элементами касания будут: двѣ координаты его центра и радиусъ. Вообще, касание m -го порядка будетъ зависеть отъ $m+1$ элемента касания. Смол. предыдущую статью.

CONTACT (ANGLE DE). Уголъ смежности, уголъ касания. Смол. CONTINGENCE (ANGLE DE).

CONTENANCE. КВАДРАТНОЕ СОДЕРЖАНИЕ.

Contenance des piéces de terre; квадратное содержаніе, площадь участковъ земли.

CONTENIR. (Теор. Чис.) ЗАКЛЮЧАТЬ. Когда видъ второй степени

$$F = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

можетъ быть измѣненъ въ другой

$$F' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$$

чрезъ положеніе $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \alpha' x' + \beta' y'$, гдѣ α, β, γ и δ изображаютъ цѣлыя числа, то, следуя Гауссу, говоримъ, что видъ F заключается въ F' , или, что видъ F' заключается въ F . —

Въ Геометриіи говоримъ, что поверхность или плоскость *заключаетъ* линію когда сія поверхность лежитъ вѣ�и своихъ точками на этой поверхности или плоскости —

CONTENU, CAPACITÉ, CONTINENCE.

ЁМКОСТЬ, ВМѢСТИТЕЛЬНОСТЬ, ВМѢСТИМОСТЬ. Пространство заключающееся внутри какого либо сосуда.

CONTE-PAS. Смол. COMPTE-PAS.

CONTIGU. (Геом.) СМЕЖНЫЙ, ПРИЛЕЖАЩИЙ, СОПРИКОСНОВЕННЫЙ. *Deux solides contigus,*

два смежныя тѣла, то есть, прилежащія одно къ другому. Les trois arêtes contigus d'un parallélépipède; три смежныя ребра параллелепипеда; angles contigus или adjacens. смежные углы Смол. ADJACENT.

CONTIGUE (FONCTION). (Анал.) НЕПРЕРЫВАЮЩАЯСЯ, СПЛОШНАЯ ФУНКЦІЯ. Такая

функция, коей значеніе отъ весьма малаго измѣненія переменной величины, также весьма мало измѣняется, хотя это измѣненіе и не подчинено нѣмъ одному закону. Напримеръ, на чертѣ 8 (Листъ V) функция, изображающая ординату фи-

гуры $MM'M''M'''$, составленной изъ различныхъ кривыхъ MM' , $M'M''$, $M''M'''$, удовлетворяетъ закону непрерывающейся функции; по закону измѣненія ординаты отъ точки M до точки M''' непрерывается; и дѣйствительно, такъ какъ кривыя MM' , $M'M''$, $M''M'''$ предполагаются различными, то очевидно, что и законъ измѣненія ординаты для каждой изъ частей MM' , $M'M''$ и $M''M'''$ будетъ различенъ. И такъ, въ геометрическомъ смыслѣ, *сплошная функция* изображается ординатою фигуры, коей периметръ не прерывался. Напротивъ того *прерывающаяся функция* (*fonction discontigue*) называется такая, которая имѣетъ дѣйствительныя значенія только между некоторыми системами предѣловъ переменной величины. И такъ, функция $f(x)$ будетъ *прерывающеюся*, если она имѣетъ опредѣленные значенія отъ $x=a$ до $x=b$, отъ $x=b$ до $x=c$, отъ $x=c$ до $x=f, \dots$ и не допускаетъ никакихъ значеній отъ $x=b$ до $x=c$, отъ $x=c$ до $x=d$ до $x=e, \dots$ — Въ геометрическомъ смыслѣ, *прерывающаяся кривая* будетъ такая черта, коей различныя части не соединены между собою. И такъ, переломная ордината фигуры $MM', M''M'''$ (черт. 8 листъ V) изображаетъ функцию *прерывающуюся*, ибо эта функция будетъ существовать только отъ $x=OP$ до $x=OP'$, отъ $x=OP'$ до $x=OP''$, а отъ $x=OP''$ до $x=OP'$ до $x=OP'''$ она не имѣетъ вовсе никакого значенія.

Всякую кривую линію, начерченную наудачу, то есть, не подчиненную никакому закону, можно назвать *сплошною* или *непрерывающеюся*, если только между частями ея не будетъ разрыва. Въ противномъ случаѣ, кривая принимаетъ названіе *прерывающейся*. Смол. для свѣдѣній CONTINUE FONCTION.

CONTIGUES (FORMES). (Теор. Чис. СМЕЖНЫЕ ВИДЫ. Такъ называется Гауссу видъ второй степени

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \text{ и } a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$$

когда *опредѣлители* (*determinants*) обѣихъ видовъ, то есть количества $b^2 - ac$ и $b'^2 - a'c'$, равны между собою, и сверхъ того $c = a'$ и $b + b' = 0$ (mod. c). И такъ, виды

$$3x^2 + 8xy + 7y^2 \text{ и } 7x'^2 + 6x'y' + 2y'^2$$

смежны между собою, ибо $4^2 - 3 \cdot 7 = 5^2 - 2 \cdot 7$, и сверхъ того коэффициенты предъ x^2 и x'^2 равны, а $b + b'$, то есть $4 + 5$ дѣлится на $c = 7$.

Что касается до свойств смежных видов, то описывая по сему предмету къ *платону отделе* известнаго сочинения Гюсса: *Recherches arithmétiques*. Смол. также въ этомъ Лексиконѣ статью FORMES (THEORIE DES).

CONTIGUITÉ. СМЕЖНОСТЬ, соприкосновенность, соприкосновенность.

CONTINENCE. Смол. CONTENU.

CONTINGENCE (ANGLE DE) или ANGLE DE SEGMENT. (Геом.) **УГОЛЬ СМЕЖНОСТИ**, уголь касанія. Такъ называли уголь, составленный круговою дугою съ касательною, проведенною къ этой дугѣ въ какой ни есть ея точкѣ. И такъ, уголь DAT , составленный круговою дугою DEA съ касательною AT (Черт. 9 Листъ V), въ этомъ смыслѣ, есть уголь смежности.

Въ XVI столѣтіи Французскій математикъ Яковъ Пеллетье (*Pelleier*) имѣлъ съ Клавіусомъ жаркое преніе объ углѣ смежности. Клавіусъ утверждалъ, пропихивъ живую Пеллетье, что уголь смежности и уголь приточнейный свойства совершенно различнаго, и не могутъ быть сравниваемы между собою, ничто такъ какъ линія съ площадью; онъ основывался на томъ, что уголь смежности менѣе всякаго приложнаго угла. Позже, многіе математики возбуждали пренія объ этомъ предметѣ, и даже извѣстный Валлисъ написал цѣлый трактатъ объ углѣ смежности.

Все эти недоразумѣнія относительно угла смежности произошли отъ того, что предварительно не согласился въ томъ, что должно разумѣть подъ словомъ уголь. Нынѣ вопросъ объ углѣ смежности ослабѣлъ безъ вниманія, потому что доказательство геометрическихъ свойствъ этого угла, въ которыхъ всѣ математики соглашались, несколько не занимаетъ неметафизическими несправками объ его сущности.

Нынѣ подъ *угломъ смежности* преимущественно разумѣютъ уголь $Tm'T'$ (черт. 10), составленный двумя смежными касательными mT и $m'T'$ къ какой ни есть кривой линіи. Въ дифференціальныхъ Исчисленіи доказываютъ, что уголь смежности равенъ элементу дуги кривой линіи, раздѣленному на соответствующій той дугѣ въ точкѣ касанія радіусъ кривизны.

Дѣйствительно, рассмотримъ на кривой, отнесенной къ прямоугольнымъ координатамъ x, y , двѣ точки m и m' , бесконечно близкія между собою, и соотвѣтственно опредѣляемые координатами x, y и $x+dx, y+dy$. Если означить чрезъ α уголь, составленный касательною въ точкѣ m кривой съ осью x -овъ, а чрезъ α' такой же уголь относительно точки m' , то уголь смежности будетъ равняться разности $\alpha - \alpha'$; изобразивъ его чрезъ δ , и наблюдая что $\tan. \alpha = \frac{dy}{dx}$, $\tan. \alpha' = \frac{d(y+dy)}{d(x+dx)} = \frac{dy+dy}{dx}$, ибо dx можно принять постояннымъ и следовательно $d^2x = 0$, получимъ

$$\tan(\alpha - \alpha') = \tan \delta = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{dy+dy}{dx}}{1 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy+dy}{dx}} = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \frac{d^2y}{dx^2}}$$

потому что количество $\frac{dy d^2y}{dx^3}$, какъ бесконечно малое, должно быть откинута. Но известно, что изобразивъ чрезъ ρ радіусъ кривизны, пишемъ (Смол. RAYON DE COURBURE)

$$\rho = - \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

откуда

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}}{\rho};$$

подставляя эту величину въ выраженіе для $\tan \delta$ получимъ

$$\tan \delta = \frac{dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}}{\rho};$$

но $dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$ изображаетъ элементъ дуги разсмагивающей кривой линіи, следовательно, означивъ чрезъ s эту дугу, найдемъ

$$\tan \delta = \frac{ds}{\rho},$$

и, по значенію δ бесконечно маломъ, будемъ $\tan \delta = \delta$, почему $\delta = \frac{ds}{\rho}$,

что и имѣетъ въ виду доказать.

CONTINGENCE (LIGNE DE). (Геом.) **ЛИНІЯ СМЕЖНОСТИ**. Линія, пересѣкающая *подгужа* тательную подъ прямыми углами. См. SOUSTY-LAIRE.

CONTINGENTE (LIGNE). Усп. вар. **КАСАТЕЛЬ-НАЯ.** См. **TANGENTE.**

CONTINU. (Мат.) **НЕПРЕРЫВНЫЙ.** *Quantité continue, непрерывное количество.* См. **DISCRÈTE.** — *Mouvement continu, непрерывное движение. Décrire une courbe par un mouvement continu, нарисовать кривую непрерывным движением.* См. примеры такого черчения в статьях: **DIRECTAISE, ELLIPSE, HYPERBOLE** и проч.

CONTINUE (PROPORTION). (Ариф.) **НЕПРЕРЫВНАЯ ПРОПОРЦИЯ.** Пропорция, в которой средние два члена равны между собою. Такова арифметическая $a - b : b - c$ и геометрическая $a : b :: b : c$. См. **PROPORTION.**

CONTINUE (FONCTION). (Анал.) **НЕПРЕРЫВНАЯ, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ.**

Функция переменной x называется *непрерывною между данными пределами*, когда бесконечно малому приращению переменной, заключающейся между двумя пределами, будетъ всегда соотвѣствующее и бесконечно малое вещественное приращение, того же или высшаго порядка, самой функции. И такъ, если функция $f(x)$ есть непрерывная между пределами a и b , то, изобразивъ чрезъ α бесконечно малое количество, отношение $\frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}$ будетъ всегда величина веще-

ственная, конечная или бесконечно малая для всякаго значенія x , заключающагося между a и b . Впрочемъ, къ приведенному сей-часъ опредѣленію, подобно прибавить условіе, что функция $f(x)$, для непрерывности, должна опредѣляться посредствомъ однихъ и тѣхъ же действий для всѣхъ значеній переменной x , заключенныхъ между пределами a и b . И такъ, надлежало бы принять за *прерывную* такую функцию $f(x)$, кою-рая, удовлетворяя требованію однозначнаго со-держанія $\frac{f(x-\alpha) - f(x)}{\alpha}$, опредѣляясь бы отъ $x = a$ до $x = c$ нѣкоторыхъ родовъ дѣйствій φ , а другими дѣйствіями, напримѣръ ψ , отъ $x = c$ до $x = b$, гдѣ подъ c разумѣемъ число, заключающееся между пределами a и b ; сказанное о функции $f(x)$ очевидно приводится къ тому, что она отъ $x = a$ до $x = c$, равнозначаща съ $\varphi(x)$, а отъ $x = c$ до $x = b$, съ функциею $\psi(x)$; для сличенія, См. **CONTIGUE (FONCTION).** Когда функция не удовлетворяетъ между данными пре-

дѣлами сказаннымъ условіямъ, то она называется *прерывною (discontinue)*.

Для примѣра непрерывныхъ функций приведемъ $x^5, \frac{1}{x-1}, \log x$; первая изъ нихъ непрерывна для всѣхъ возможныхъ значеній переменной x , то есть, отъ $x = -\infty$ до $x = +\infty$; вторая будетъ непрерывною отъ $x = 1$ до $x = \infty$, и отъ $x = -\infty$ до $x = 1$, а шрещя, только для положительныхъ значеній x , то есть, отъ $x = 0$ до $x = \infty$. Функция $\frac{1}{x-1}$ дѣляется прерывною для $x = 1$, ибо обращается въ ∞ . И такъ, для частнаго значенія $x = 1$, дробь $\frac{1}{x-1}$ влечетъ *разрывъ непрерывности (solution de continuité)*. Что касается до $\log x$, то очевидно, что для отрицательныхъ значеній переменной x , эта функция дѣляется мнимой.

Функция со многими переменными независимыми $f(x, y, z, \dots)$, очевидно удовлетворитъ условіямъ непрерывности, если $F(x) = f(x + \alpha p, y + \alpha q, z + \alpha r, \dots)$ будетъ непрерывна въко-нечно въ опредѣленности частнаго значенія $\alpha = 0$, каковы бы впрочемъ ни были количества $x, y, z, \dots, p, q, r, \dots$.

CONTINUE (FRACTION). (Анал.) **НЕПРЕРЫВНАЯ, ЦѢПНАЯ ДРОБЬ.**

§ 1. Такъ называется выраженіе вида

$$a + \frac{b}{c + \frac{d}{e + \frac{f}{g + \dots}}}$$

гдѣ $a, b, c, d, e, f, g, \dots$ изображаютъ числа цѣлыя, положительные или отрицательныя. Непрерывныя дроби, весьма примѣчательны по много-различіямъ своимъ applicatiens, открыты, какъ думаютъ, *Лордомъ Броуверомъ (Brouncker)* около середины XVII-го столѣтія. Извѣстный Англійскій математикъ *Валлисъ (Wallis)*, занимавшійся опредѣленіемъ приближеннаго отношенія окружности круга къ диаметру, нашелъ рядъ приближенныхъ значеній для этого отношенія, но былъ недоволенъ своимъ рѣшеніемъ^{*)}; онъ сооб-

*) Отношеніе, найденное *Валлисомъ*, определяется дробью $3.5.5 \text{ в } 7.7 \text{ в } 9.9 \dots$, которая будетъ болѣе и болѣе приближаться къ истинному отношенію, по мѣрѣ увеличенія числа множителей какъ въ числитель такъ и въ знаменатель.

щия его Лорду Брункеру, весьма искусному въ Геометріи, и просилъ его содѣйствіи для усовершенствованія найденнаго имъ рѣшенія. Брункеръ занялся этимъ предположеніемъ, который и привелъ его къ примѣчательному открытію непрерывныхъ дробей. Для рѣшенія вопроса, предложеннаго ему Валлисомъ, онъ нашелъ безконечное выраженіе

$$1 + \frac{1^2}{2 + \frac{1^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \frac{9^2}{2 + \dots}}}}}$$

которое изображаетъ четверть площади круга, принявъ за единицу площадь квадрата, вписаннаго на радіусъ. Такого рода выраженіе, по виду своему, и названо *цѣлою* или *непрерывною дробью*. Приведенная сей-часъ дробь, примѣчательная тѣмъ, что была первымъ открытіемъ въ этой теоріи, будетъ доказана въ § 10.

Послѣ Брункера Гугенсъ занимался съ успѣхомъ изслѣдованіями о непрерывныхъ дробяхъ. Но никто болѣе *Эйлера*, и въ особенности *Лагранжа*, не усовершенствовалъ этой теоріи; ихъ труды по сему предмету послужили теорію непрерывныхъ дробей на ряду съ важными примѣчательными. Отсылаемъ къ сочиненіямъ: *Introduction in analysis infinitorum* (Эйлера); *Mémoires de Pétersbourg* (Эйлера); *Mémoires de Berlin*, томъ XXIII и XXIV (Лагранжа); *Additions a la traduction française des élémens d'Algèbre de M. Euler* (Лагранжа); *Mémoires de l'Académie de Berlin*, томъ VII (Лагранжа); *Meditationes algebrae*, сочин. *Варинга*, заглавагося также теорію непрерывныхъ дробей.

Непрерывная дробь въ общемъ видѣ

$$a + \frac{b}{c + \frac{d}{e + \frac{f}{g + \dots}}}$$

употребляется не такъ часто. Мы предложимъ нѣкоторые изслѣдованія о ней въ §§ 10, 11, 12 и 13. Чѣмъ случается, что каждый изъ числителей b, d, f, \dots равенъ ± 1 , а знаменатели c, e, g, \dots числа цѣлыя положительныя. Въ такомъ предположеніи обозначимъ дробь $\frac{b}{c}, \frac{d}{e}, \frac{f}{g}, \dots$ бу-
дущи въ видѣ $\frac{1}{a'}, \frac{1}{a''}, \frac{1}{a'''}, \dots$ и слѣдовательно

самая непрерывная дробь обратится въ

$$a + \frac{1}{a' + \frac{1}{a'' + \frac{1}{a''' + \dots}}}$$

§ 2. Чтобы обративъ какую ни есть величину x , рациональную, иррациональную или трансцендентную въ непрерывную дробь приведемъ ее сей-часъ вида, сполнивъ нѣсколько предположеній послѣдовательно

$$x = a + \frac{1}{x'}, \quad x' = a' + \frac{1}{x''}, \quad x'' = a'' + \frac{1}{x'''}, \quad x''' = a''' + \frac{1}{x'''}, \dots$$

гдѣ a изображаетъ наибольшее цѣлое число, заключающееся въ x ; a' наибольшее цѣлое число, заключающееся въ x' ; a'' наибольшее цѣлое число, заключающееся въ x'' , и такъ далѣе. Подставляя вмѣсто x', x'', x''', \dots равныя имъ величины, получимъ выраженіе

$$x = a + \frac{1}{a' + \frac{1}{a'' + \frac{1}{a''' + \dots}}}$$

которое будетъ состоять изъ конечнаго числа членовъ, если x изображаетъ величину *раціональную*, а изъ безконечнаго въ противномъ случаѣ. Величины a, a', a'', a''', \dots именуются *частными знаменателями* или просто *знаменателями* (*quotiens*), а x, x', x'', x''', \dots *частными* или *полными дробями* (*quotiens complets*). Дробь $\frac{1}{a'}, \frac{1}{a''}, \frac{1}{a'''}, \dots$, какъ уже сказано выше, называются *составляющими дробями* (*fractions composantes*).

§ 3. Изъ сказаннаго, легко заключить, что составляющія дробь частныя величизны x, x', x'', x''', \dots будутъ

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{1} \\ a + \frac{1}{x'} &= \frac{aa' + 1}{a'} \\ a + \frac{1}{a' + \frac{1}{x''}} &= \frac{a'a'' + a' + a}{a'a' + 1} \\ a + \frac{1}{a' + \frac{1}{a'' + \frac{1}{x'''}}} &= \frac{aa'd' + a'd'' + a'a''' + a'' + a}{a'a'd' + a'a'' + a'a''' + a'' + a} \end{aligned}$$

Эти приближенные величины для x называются *главными, приближающимися или сходящимися дробями* (fractions principales или fractions convergentes). Закон их составления очень прост: действительно, если предположим, что n -ая из них изображена чрез $\frac{p_n}{q_n}$, $(n-1)$ -ая чрез $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, а $(n-2)$ -ая чрез $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$, и если, сверх того, изобразим чрез $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ *истинного знаменателя*, соответствующего дроби $\frac{p_n}{q_n}$, то получим

$$p_n = p_{n-1} \alpha^{(n-1)} + p_{n-2} \text{ и } q_n = q_{n-1} \alpha^{(n-1)} + q_{n-2},$$

и следовательно

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1} \alpha^{(n-1)} + p_{n-2}}{q_{n-1} \alpha^{(n-1)} + q_{n-2}}.$$

Очевидно, что когда истинно знаменатель $\alpha^{(n-1)}$ подставим *полную дробь* $1^{(n-1)}$, то первая часть этого уравнения обратится в самую величину x ; и так, получим

$$x = \frac{p_{n-1} x^{(n-1)} + p_{n-2}}{q_{n-1} x^{(n-1)} + q_{n-2}}.$$

Заметим, что главные дроби

$$\frac{a}{1}, \frac{a\alpha'+1}{\alpha'}, \frac{a\alpha'\alpha''+a^2+\alpha}{\alpha'\alpha'+1}, \dots$$

будут попеременно то меньше, то больше величин x , то есть

$$\frac{a}{1} < x, \frac{a\alpha'+1}{\alpha'} > x, \frac{a\alpha'\alpha''+a^2+\alpha}{\alpha'\alpha'+1} < x, \dots$$

§ 4. Другое, весьма примечательное свойство главных дробей, состоит в том, что каждая из них приближается к истинной величине x больше, нежели всякая другая дробь, коей члены (т. е. числитель и знаменатель) меньше членов разлагаемой главной дроби. Легко удостовериться в этом, заметив, что разность между двумя ближайшими главными дробями, выражается единицею, положительною или отрицательною, разделенною на произведение знаменателей этих самых главных дробей. И так, если предположим

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{a}{1}$$

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{a\alpha'+1}{\alpha'}$$

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{a\alpha'\alpha''+a^2+\alpha}{\alpha'\alpha'+1}$$

$$\dots$$

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_{n-2} \alpha^{(n-2)} + p_{n-3}}{q_{n-2} \alpha^{(n-2)} + q_{n-3}}$$

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1} \alpha^{(n-1)} + p_{n-2}}{q_{n-1} \alpha^{(n-1)} + q_{n-2}},$$

то получим

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = -\frac{1}{q_1 q_2}$$

$$\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_3}{q_3} = +\frac{1}{q_2 q_3}$$

$$\dots$$

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{q_{n-1} q_n}$$

или

$$p_1 q_2 - p_2 q_1 = -1$$

$$p_2 q_3 - p_3 q_2 = +1$$

$$\dots$$

$$p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Последняя формула доставляет весьма простой способ для решения неопределенных уравнений первой степени, как показано будет в § 8.

§ 5. Возьмем теперь ряд приближающихся дробей

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \frac{p_4}{q_4}, \frac{p_5}{q_5}, \frac{p_6}{q_6}, \dots$$

и разложим его на два другие

$$(1) \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_3}{q_3}, \frac{p_5}{q_5}, \dots \quad (2) \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_4}{q_4}, \frac{p_6}{q_6}, \dots$$

из которых первый заключает в себя дроби, меньшие величин x , а второй, большие. Составим теперь разности

$$\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_3 q_1 - p_1 q_3}{q_1 q_3} = \frac{a''}{q_1 q_3}$$

$$\frac{p_5}{q_5} - \frac{p_3}{q_3} = \frac{p_5 q_3 - p_3 q_5}{q_3 q_5} = \frac{a'''}{q_3 q_5}$$

$$\dots$$

$$\frac{p_4}{q_4} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_4 q_2 - p_2 q_4}{q_2 q_4} = \frac{a'''}{q_2 q_4}$$

$$\frac{p_6}{q_6} - \frac{p_4}{q_4} = \frac{p_6 q_4 - p_4 q_6}{q_4 q_6} = \frac{a'''}{q_4 q_6}$$

$$\dots$$

Если каждая из величин a'' , a''' , \dots , a'''' , a''''' , \dots равна единице, то между двумя последовательными дробями ряда (1), а равно и ряда (2), невозможно будет включить ни одной дроби, коей бы знаменатель был меньше знаменателей этих двух дробей. Но когда количества a'' , a''' , \dots , a'''' , a''''' , \dots будут больше единицы, то всегда можно будет включить между упомянутыми дробями столько других дробей, сколько содержится единиц в разностях $a''-1$, $a'''-1$, \dots , $a''''-1$, $a'''''-1$, \dots . Например, для включения дробей между $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_3}{q_3}$ надобно будет в выражениях $p_3 = p_2 a'' + p_1$ и $q_3 = q_2 a'' + q_1$ подставлять поочередно вместо

α'' числа $1, 2, 3, \dots (\alpha''-1)$, чрез что произойдут следующие дроби:

$$(5) \frac{p_0+p_1}{q_0+q_1}, \frac{2p_0+p_1}{2q_0+q_1}, \frac{3p_0+p_1}{3q_0+q_1}, \dots, \frac{(\alpha''-1)p_0+p_1}{(\alpha''-1)q_0+q_1}.$$

И такъ, еслибы $\alpha''=5$, то получились бы четыре дроби, а именно:

$$\frac{p_0+p_1}{q_0+q_1}, \frac{2p_0+p_1}{2q_0+q_1}, \frac{3p_0+p_1}{3q_0+q_1}, \frac{4p_0+p_1}{4q_0+q_1}.$$

Включаемы такимъ образомъ дроби называются *промежуточными* или *посредствующими* (*fractions intermédiaires* или *fractions secondaires*). Должно замѣнить, что въ ряду (5) невозможно включить ни одной дроби, заключающейся между двумя смежными промежуточными дробями, и для которой бы знаменатель также заключался между знаменателями сихъ смежныхъ дробей.

§ 6. Предположимъ что дробь $\frac{p}{q}$, меньшая единицы, обращена въ непрерывную, такъ что

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{a + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \dots + \frac{1}{\mu}}}}.$$

Пишемъ рядъ знаменателей и главныхъ дробей, имъ соответствующихъ:

Знаменатели: $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu, \lambda, \mu$
Главные дроби: $\frac{0}{1}, \frac{1}{a}, \frac{\beta}{a\beta+1}, \dots, \frac{p_{000}}{q_{000}}, \frac{p_{00}}{q_{00}}, \frac{p_0}{q_0}, \frac{p}{q}.$

Первая главная дробь $\frac{0}{1}$ написана для того, чтобы для составленія протей $\frac{\beta}{a\beta+1}$ имѣть двѣ предшесивущія; по закону составленія главныхъ дробей получимъ

$$\begin{aligned} q &= \mu q_0 + q_{00}, & \text{откуда } \frac{q_0}{q} &= \frac{1}{\mu + \frac{q_{00}}{q_0}} \\ q_0 &= \lambda q_{00} + q_{000}, & \frac{q_{00}}{q_0} &= \frac{1}{\lambda + \frac{q_{000}}{q_{00}}} \\ q_{00} &= \kappa q_{000} + q_{0000}, & \frac{q_{000}}{q_{00}} &= \frac{1}{\kappa + \frac{q_{0000}}{q_{000}}} \\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Изъ этихъ равенствъ выводимъ

$$\frac{q_0}{q} = \frac{1}{\mu + \frac{1}{\lambda + \frac{1}{\kappa + \dots + \frac{1}{\beta + \frac{1}{a}}}}}.$$

Слѣдовательно, разложение дроби $\frac{p}{q}$ въ непрерывную доставитъ тѣхъ же знаменателей $\mu, \lambda, \dots, \beta, \alpha$, какъ и для дроби $\frac{p}{q}$, но только въ обратномъ порядкѣ. Поэтому, если случится, что рядъ знаменателей $\mu, \lambda, \gamma, \dots, \gamma, \beta, \alpha$ будетъ симметрической, то есть такого вида: $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \gamma, \beta, \alpha$, то очевидно получимъ $\frac{p_0}{q_0} = \frac{p}{q}$, или $q_0 = p$. И на-оборотъ, если $q_0 = p$, то можно будетъ заключить, что рядъ знаменателей есть *симметрический*. Такого рода непрерывная дробь, то есть выраженіе

$$\frac{1}{a + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \dots + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\beta + \frac{1}{a}}}}},$$

называется *непрерывною симметрическою дробью* (*fraction continue symétrique*); мы увидимъ въ § 9, что при разложеніи въ непрерывную дробь корня квадратнаго изъ какого нѣ есть цѣлаго числа, получимъ непрерывную дробь симметрическую.

§ 7. *Периодическою непрерывною дробью* (*fraction continue périodique*) называется такая непрерывная дробь, въ которой знаменатели соседствующихъ дробей, начиная или съ перваго члена a , или съ котораго нибудь изъ нихъ, составляютъ рядъ повторяющихся чиселъ, то есть, *периодъ*; таковы напримѣръ дроби

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{2} &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{5} &= 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \dots}}}}} \end{aligned}$$

Въ первой дроби періодъ начинается съ перваго члена, и состоитъ изъ одного числа, именно 2. Во второй, періодъ начинается только съ третьей члена, именно съ 2, и состоитъ изъ двухъ член-

сеза 2 и 1. Периодическая непрерывная дробь, состоящая из бесконечного числа членов, всегда выражает иррациональный корень уравнения второй степени. Въ § 9 будетъ доказано, что корень квадратный изъ цѣлага числа, не квадратнаго, доставляетъ при разложеніи *периодическую* непрерывную дробь, коей періодъ начинается со второго члена.

Доказательства приведенныхъ здѣсь различныхъ предложеній о непрерывныхъ дробяхъ, читатели найдутъ почти во всѣхъ курсахъ Алгебры, почему мы и не будемъ останавливаться на этомъ предметѣ, а перейдемъ къ некоторымъ примѣчательнѣйшимъ приложениямъ теоріи непрерывныхъ дробей къ различнымъ задачамъ изъ Анализа.

§ 8. Рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій 1-й степени съ двумя неизвѣстными посредствомъ непрерывныхъ дробей.

а) Пусть будетъ предложено рѣшить уравненіе

$$ax - by = c,$$

въ которомъ a, b и c изображаютъ данныя цѣлыя числа, всѣ три положительныя, а x и y неизвѣстныя величины, но также цѣлыя. Замѣтимъ, что числа a и b предполагаются простыми между собою; дѣйствиительно, еслибы они имѣли общаго дѣлителя, то и c имѣло бы того же самаго дѣлителя, и слѣдовательно все уравненіе дѣлилось бы на него. Напримѣръ, если бы $a = \lambda a_1, b = \lambda b_1$, то необходимо имѣли бы и $c = \lambda c_1$, почему данное уравненіе могло бы имѣть

$$\lambda a_1 x - \lambda b_1 y = \lambda c_1 \quad \text{или} \quad a_1 x - b_1 y = c_1,$$

гдѣ уже числа a_1 и b_1 простыя между собою. И такъ, мы предполагаемъ что дробь $\frac{a}{b}$ *несократима*.

Изобразимъ чрезъ x_1 и y_1 два числа, удовлетворяющія уравненію

$$(1) \quad ax_1 - by_1 = 1;$$

умноживъ сіе послѣднее на c , получимъ

$$acx_1 - bcy_1 = c$$

Сравненіе этого уравненія съ предложеннымъ приводитъ къ слѣдующимъ величинамъ для x и y :

$$(2) \quad x = c_1, \quad y = cy_1.$$

И такъ, опредѣленіе величинъ x и y зависитъ отъ рѣшенія уравненія (1), чего достигаемъ слѣдующимъ образомъ:

Разлагаемъ отношеніе $\frac{a}{b}$ въ *непрерывную дробь*; пусть будетъ

$$\frac{a}{b} = a + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\delta + \frac{1}{\epsilon + \dots}}}}$$

это разложеніе; отбрасываемъ послѣднюю дробь $\frac{1}{\mu}$, и обращаемъ

$$a + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\delta + \frac{1}{\epsilon + \dots}}}}$$

въ обыкновенную дробь; изобразимъ ее чрезъ $\frac{p}{q}$; и такъ, $\frac{p}{q}$ и $\frac{a}{b}$ будутъ двѣ смежныя *главныя дроби*; слѣдовательно (въ силу § 4) получимъ

$$aq - bp = \pm 1;$$

знакъ $+$ относится къ тому случаю, когда число частныхъ $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ будетъ *нечетное*, а знакъ $-$, когда это число *четное*. И такъ, когда удовлетворяется уравненіе

$$aq - bp = 1,$$

то находимъ одно рѣшеніе уравненія (1) положивъ $x_1 = q, y_1 = p$, если же

$$aq - bp = -1,$$

то очевидно будетъ $x_1 = b - q, y_1 = a - p$, ибо

$$a(b - q) - b(a - p) = -(aq - bp) = +1.$$

Изъ сказаннаго должно заключить, что во всякомъ случаѣ способъ непрерывныхъ дробей приводитъ къ одному рѣшенію уравненія (1). Пусть будутъ a_1 и b_1 найденныя такимъ образомъ числа, которые очевидно будутъ соответственно менше b и a . Слѣдовательно

$$aa_1 - bb_1 = 1;$$

если вычтемъ это уравненіе изъ

$$ax_1 - by_1 = 1$$

то получимъ $a(x_1 - a_1) - b(y_1 - b_1) = 0$, или

$$\frac{x_1 - a_1}{b} = \frac{y_1 - b_1}{a};$$

такъ какъ дробь $\frac{a}{b}$ будетъ, по предположенію, несократима, то можемъ какъ числителя такъ и знаменателя на произвольное цѣлое число k , можно будетъ положить

$$ak = y - b_1, \quad bk = x_1 - a_1,$$

опуска

$$(3) \quad x_1 = a_1 + bk_1, \quad y_1 = b_1 + ak_1.$$

В этих формулах заключается общее решение уравнения (1); a_1 и b_1 означают наименьшее его решение, а k какое угодно целое число, положительное или отрицательное. Что касается до решения уравнения $ax - by = c$, то споймъ только обратиться къ формуламъ (2), въ слѣдствіе которыхъ получимъ частное решение $x = a_1c, y = b_1c$; слѣдовательно

$$\begin{aligned} ax - by &= c \\ a_1c - b_1c &= c; \end{aligned}$$

изъ сихъ двухъ уравненій выводимъ

$$\frac{a}{b} = \frac{y - b_1c}{x - a_1c},$$

откуда, по предыдущему,

$$(4) \quad x = a_1c + bk_1, \quad y = b_1c + ak_1,$$

разумя подъ k , какъ и выше, произвольное целое число.

Легко видѣть, что по причинѣ неопредѣленности k , можно всегда найти такое решение уравненія $ax - by = c$, что величина x не будетъ превышать $\pm \frac{1}{2}b$, или другое, при кошоромъ число y не превышаетъ $\pm \frac{1}{2}a$. Действительно, если желаемъ чтобы число x заключалось между предѣлами $\pm \frac{1}{2}b$, то споймъ только положить k равнымъ отрицательному целому числу, заключающемуся въ дробь $\frac{a_1c}{b}$, или, если остатокъ дѣленія a_1c на b будетъ болѣе $\frac{1}{2}b$, то принять k равнымъ частному отъ $\frac{a_1c}{b}$, увеличенному единицею, и съ отрицательнымъ знакомъ. То же самое должно разумѣть и о величинѣ y .

Для приложенія изложеннаго сей-часъ способа, положимъ, что дано уравненіе

$$95x - 56y = 11;$$

здѣсь $a = 95, b = 56, c = 11$. Обращая отношеніе $\frac{95}{56}$ въ непрерывную дробь, получимъ

$$\frac{95}{56} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}}}$$

опускавая послѣднюю дробь $\frac{1}{3}$, находимъ

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}} = \frac{59}{28}$$

Такъ какъ число знаменателей 1, 1, 2, 3, 2 нечетное, то величины p и q удомстворяютъ уравненію

$$95q - 56p = 1;$$

слѣдовательно $a_1 = 23, b_1 = 39$, и наконецъ

$$x = 23.11 + 56k, \quad y = 39.11 + 95k.$$

Вотъ общее решение предложеннаго уравненія.

Чтобы найти частное решение, для котораго численная величина x не превосходила бы $\frac{1}{2}b = 28$, раздѣлимъ 23.11 на 56; найдемъ частное 4 и остатокъ 29; въ слѣдствіе сказаннаго выше увеличимъ 4 единицею, и беремъ для k это число съ отрицательнымъ знакомъ; и такъ $k = -5$, откуда

$$x = 23.11 - 56.5 = -27, \quad y = 39.11 - 95.5 = -46,$$

и мы видимъ, что действительно численная величина x не больше $\frac{1}{2}b$, но есть не больше 28.

б) Для решения уравненія

$$ax + by = c,$$

гдѣ всѣ буквы имѣютъ прежнія значенія, полагаемъ $y = -Y$, и получаемъ

$$ax - bY = c;$$

но, въ силу формулы (4), общее решение этого уравненія будетъ

$$x = a_1c + bk_1, \quad Y = b_1c + ak_1,$$

разумя подъ a_1 и b_1 наименьшія числа, удомстворяющія уравненію

$$aa_1 - bb_1 = 1.$$

Если въ общихъ выраженіяхъ для x и Y написать $-k$ вместо k , и замѣнимъ Y величиною $-y$, то получимъ

$$(5) \quad x = a_1c - bk_1, \quad y = ak_1 - b_1c.$$

Иногда уравненіе $ax + by = c$ допускаетъ решения положительныя; въ такомъ случаѣ, для ихъ опредѣленія, споймъ только взять целое число k такимъ, чтобы въ одно время имѣли

$$a_1c - bk > 0 \quad \text{и} \quad ak - b_1c > 0,$$

что приводимъ къ условіямъ

$$k < \frac{a_1c}{b} \quad \text{и} \quad k > \frac{b_1c}{a}.$$

И такъ, чтобы уравненіе $ax + by = c$ допускало положительныхъ решенийъ, то для этого необходимо, чтобы между предѣлами $\frac{b_1c}{a}$ и $\frac{a_1c}{b}$ заключалось хотя одно целое число; если ихъ нѣсколько, то каждому изъ нихъ будетъ соотвѣстствовать одно положительное решение.

Для примѣра возьмемъ уравненіе

$$7x + 11y = 179,$$

въ которомъ $a = 7$, $b = 11$, $c = 179$. Рѣшая вспомогательное уравненіе

$$7a_1 - 11b_1 = 1,$$

получимъ $a_1 = 8$, $b_1 = 5$, и въ силу формулы (5) найдемъ

$$x = 6.179 - 11k, \quad y = 7k - 5.179.$$

Чтобы найти положительныя рѣшенія, слѣдуетъ положить

$$6.179 - 11k > 0 \quad \text{и} \quad 7k - 5.179 > 0,$$

откуда $k < 130 \frac{1}{11}$ $k > 127 \frac{1}{11}$.

Слѣдовательно k , въ разсматриваемомъ случаѣ, имѣетъ три значенія, именно: $k = 128, 129$ и 130 .

И такъ, предложенное уравненіе допускаетъ три рѣшенія положительныя, именно:

$$1^\circ. \text{ Для } k = 128, \quad x = 21, \quad y = 1$$

$$2^\circ. \text{ Для } k = 129, \quad x = 15, \quad y = 8$$

$$3^\circ. \text{ Для } k = 130, \quad x = 2, \quad y = 15.$$

Числа эти найдутъ въ истории историческія подробности о рѣшеніи неопредѣленныхъ уравненій первой степени въ числахъ: NOMBRES (THÉORIE DES).

§ 5. РѢШЕНІЕ НЕОПРЕДѢЛЕННОГО УРАВНЕНІЯ 2-й СТЕПЕНИ $Ay^2 + 1 = x^2$ въ ЦѢЛЫХЪ ЧИСЛАХЪ ПОСРЕДСТВОМЪ НЕПРЕРЫВНЫХЪ ДРОБЕЙ.

Такъ какъ это уравненіе служитъ основаніемъ при рѣшеніи общихъ неопредѣленныхъ уравненій второй степени, и поэтому весьма важно въ Теоріи Чиселъ, то мы наложимъ здѣсь его рѣшеніе съ надлежащими подробностями. Лагранжъ, основываясь на свойствѣ непрерывныхъ дробей, первый доказалъ, что уравненіе $Ay^2 + 1 = x^2$ допускаетъ всегда безконечное число рѣшеній въ цѣлыхъ числахъ; очевидно въпротивѣ, что должно исключить тотъ случай, когда цѣлое число A будетъ квадратное; въ этомъ предположеніи получается только одно рѣшеніе $y = 0$, $x = 1$.

Для рѣшенія неопредѣленного уравненія $Ay^2 + 1 = x^2$ въ цѣлыхъ числахъ, обращаемъ \sqrt{A} въ непрерывную дробь. Пусть будетъ a^2 наибольшій квадратъ, заключающійся въ A , а b остатокъ; и такъ $A = a^2 + b$; слѣдовательно

$$\sqrt{A} = a + \frac{1}{d}$$

откуда

$$x' = \frac{1}{\sqrt{A} - a} = \frac{\sqrt{A} + a}{(\sqrt{A} - a)(\sqrt{A} + a)} = \frac{\sqrt{A} + a}{A - a^2} = \frac{\sqrt{A} + a}{b}.$$

Пусть будетъ α ближайшее цѣлое число, заключающееся въ $\frac{\sqrt{A} + a}{b}$; получимъ

$$x' = \frac{\sqrt{A} + a}{b} = \alpha + \frac{1}{x''};$$

слѣдовательно

$$x'' = \frac{b}{\sqrt{A} + a - ba} = \frac{b(\sqrt{A} + ba - a)}{A - (a - ba)^2} = \frac{\sqrt{A} + b + a - a}{1 + 2aa - ba^2} = \beta + \frac{1}{x'''};$$

разуня подъ β ближайшее цѣлое число, заключающееся въ $\frac{\sqrt{A} + ba - a}{1 + 2aa - ba^2}$. Легко усмотрѣть, что n вообще будетъ

$$x^{(m)} = \frac{\sqrt{A} + I}{D} = \mu + \frac{1}{x^{(m+1)}},$$

откуда

$$x^{(m+1)} = \frac{1}{\sqrt{A} + I - \mu D}.$$

Но, съ другой стороны, $x^{(m+1)}$ должно быть такого же вида какъ и $x^{(m)}$: слѣдовательно

$$x^{(m+1)} = \frac{\sqrt{A} + I'}{D'} = \frac{D}{\sqrt{A} + I - \mu D}.$$

Освобождаясь отъ знаменателей, и уравнивая рациональную часть рациональной, а иррациональную иррациональной, получимъ

$$I' = \mu D - I$$

$$D' = \frac{A - I'^2}{D}.$$

Докажемъ теперь, что величины I' и D' будутъ всегда цѣлыя. Подставляя въ выраженіе для D' величину $\mu D - I$ вмѣсто I' , найдемъ

$$D' = \frac{A - (\mu D - I)^2}{D} = \frac{A - I^2}{D} + 2\mu I - \mu^2 D;$$

полагая же

$$x^{(m-1)} = \frac{\sqrt{A} + I_0}{D_0},$$

очевидно получимъ

$$D = \frac{A - I_0^2}{D_0} \quad \text{или} \quad D_0 = \frac{A - I_0^2}{D};$$

слѣдовательно

$$D' = D_0 + 2\mu I - \mu^2 D.$$

Такъ какъ D и I въ двухъ смежныхъ дробяхъ $\frac{\sqrt{A} + a}{b}$, $\frac{\sqrt{A} + ba - a}{1 + 2aa - ba^2}$ равны числамъ цѣлымъ, то, въ слѣдствіе выведеннаго сей-часъ выраженія для D' , должно заключить, что и для всѣхъ послѣдующихъ дробей D и I будутъ также цѣлыя.

Представляя величину D' въ видѣ $D' = D_0 + \mu(I - I')$, окажется, что изъ двухъ послѣдовательныхъ дробей

$$\frac{\sqrt{A} + I_0}{D_0} = \mu_0 + \frac{1}{x^{(m)}}$$

$$\frac{\sqrt{A} + I}{D} = \mu + \frac{1}{x^{(m+1)}},$$

получится величина непосредственно следующей за ними дробь $\frac{\sqrt{A}+I'}{D}$, употребляя на этот конец весьма простые формулы

$$I' = nD - I \\ D = D_0 + n(I - I').$$

Изобразим теперь через $\frac{p_0}{q}$ и $\frac{p}{q}$ две последовательные сходящиеся дроби, получаемые чрез разложение \sqrt{A} в непрерывную дробь. Пусть будет $\frac{\sqrt{A}+I}{D}$ полная дробь, соответствующая $\frac{p}{q}$; по известному правилу (§ 3) найдем

$$\sqrt{A} = \frac{p \left(\frac{\sqrt{A}+I}{D} \right) + p_0}{q \left(\frac{\sqrt{A}+I}{D} \right) + q_0} = \frac{p\sqrt{A} + pI + p_0D}{q\sqrt{A} + qI + q_0D},$$

откуда получаем два уравнения

$$pI + p_0D = qA \\ qI + q_0D = p,$$

которые приводим самым простым образом к следующим равенствам.

$$(pq_0 - p_0q)I = qq_0A - p^2 \\ (pq_0 - p_0q)D = p^2 - Aq^2.$$

Но мы знаем, что $p_0q - p_0q = +1$ если $\frac{p}{q} > \sqrt{A}$,

а $p_0q - p_0q = -1$, когда $\frac{p}{q} < \sqrt{A}$; следовательно

$p_0q - p_0q$ и $p^2 - Aq^2$ будут всегда иметь одинаковые знаки, откуда заключаем, что D во всяком случае будет количество положительное.

Можно также заметить и вывести, что предыдущие формулы прямо доказывают, что I и D числа целые, ибо коэффициенты перед каждым из них равен $1/q_0 - p_0q = \pm 1$. Сверх того, легко усмотреть, что величина I будет также положительная, действительно, из уравнения

$$qI + q_0D = p \text{ выводим } \frac{q_0}{q} = \frac{(p-I)}{D}; \text{ но так как } q_0 < q, \text{ то должно быть } D > \frac{p}{q} - I;$$

с другой же стороны, $\frac{\sqrt{A}+I}{D} > 1$, следовательно $D < \sqrt{A} + I$.

Изобразим разность между \sqrt{A} и $\frac{p}{q}$ чрез ε ; эта разность очевидно будет правильной дробью, положительная или отрицательная; таким образом получим $\frac{p}{q} = \sqrt{A} - \varepsilon$, почему

$$D > \sqrt{A} - I - \varepsilon \text{ и } D < \sqrt{A} + I;$$

но эти два неравенства являются несовместными, когда положим I отрицательным; следовательно, должно заключить из этого, что число I всегда положительное.

Теперь легко будем найти пределы для величин I и D ; действительно, из уравнения $A - I^2 = D_0D$ выводим $I < \sqrt{A}$; следовательно I не может быть больше целого числа a , содержащегося в \sqrt{A} . Что касается до числа D , то из уравнения $I' + I = nD$ заключаем, что наибольшая величина D , а вместе и знаменателя μ , будет $2a$, ибо сумма $I' + I$, как мы сейчас видели, не может превышать $2a$.

Но так как непрерывная дробь, изображающая иррациональную величину \sqrt{A} , будет расширяться в бесконечность, и как сверх того I и D допускают только ограниченное число различных значений, то очевидно, что определенной величины для I будет соответствовать бесконечное число раз определенная же величина для D . Следовательно, коль скоро найдем полную дробь $\frac{\sqrt{A}+I}{D}$, которая уже прежде находилась в разложении, то ясно, что все следующие знаменатели составляющих дробей будут одинаковы с теми, которые найдены прежде, и возвращаясь в том же самом порядке. И так, непрерывная дробь, выражающая \sqrt{A} , будет состоять из постоянного периода, повторяющегося бесконечное число раз. Теперь надлежит определить с точностью тот член, на котором начинается период.

Пусть будут μ, μ', μ'', \dots знаменатели этого периода; $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, знаменатели непрерывной дроби, выражающей \sqrt{A} , и предшествующие периоды. Порядок сих знаменателей и соответствующих им главных дробей будет следующий:

Знаменатели непрерывной дроби для \sqrt{A} :

$$\alpha, \alpha, \beta_2, \dots, \lambda; \mu, \mu', \mu'', \dots, \omega; \mu, \mu', \mu'', \dots, \omega; \text{ и проч.}$$

Главные дроби:

$$\frac{1}{\alpha}, \frac{a}{1}, \dots, \frac{p_0}{q_0}, \frac{p}{q}, \dots, \frac{p_0}{q_0}, \frac{p}{q}, \dots, \frac{p_0}{q_0}, \frac{p}{q}, \dots$$

Первая дробь $\frac{1}{\alpha}$ поставлена только для того, чтобы обнаружить известный закон составлений приближающихся дробей, начиная с третьей.

Пусть полные дроби, соответствующие главным дробям $\frac{1}{0}, \frac{a}{1}, \dots, \frac{p_0}{q_0}, \dots$ будут по порядку $\frac{\sqrt{A}}{1}, \frac{\sqrt{A}+a}{b}, \dots, \frac{\sqrt{A}+I_0}{D_0}, \frac{\sqrt{A}+I}{D}, \dots, \frac{\sqrt{A}+I'_0}{D'_0}, \frac{\sqrt{A}+I'}{D'}, \dots$

Вследствие доказанного выше, имеем $A - I^2 = D_0 D$ и $A - I'^2 = D'_0 D'$, откуда $D_0 = D'_0$; сверх того $I = \lambda D_0 - I_0$ и $I' = \omega D'_0 - I'_0$; следовательно $\frac{I_0 - I'_0}{D_0} = \lambda - \omega$. Но, с другой стороны, из уравнения $qI + q_0 D = p$ выводим $I = \frac{p}{q} - \frac{q_0 D}{q}$, и как $\frac{p}{q}$ есть приближенная величина \sqrt{A} , то должно быть $\frac{p}{q} = a + \frac{r}{q}$, разложив под $\frac{r}{q}$ правильную дробь; следовательно

$$a - I = \frac{q_0 D - r}{q}.$$

Но $q_0 < q$, почему $a - I < D$; точно таким образом найдем $a - I_0 < D_0$, $a - I'_0 < D'_0$; следовательно и $I_0 - I'_0 < D_0$. Но сейчас найдем было $\frac{I_0 - I'_0}{D_0} = \text{целому числу } \lambda - \omega$; и так должно быть $\lambda - \omega = 0$, то есть $I_0 = I'_0$ и $\lambda = \omega$. Тот же таким образом докажем, что знаменатель, предшествующий числу λ , равен знаменателю, предшествующему числу ω , и так далее до a включительно; из этого должно будет заключить, что период начинается с числа a . И так, совокупность знаменателей и главных дробей может быть изображена следующим образом:

Знаменатели:

$a, \beta, \dots, \lambda, \mu; a, \beta, \dots, \lambda, \mu; a, \beta, \dots, \lambda, \mu$; и пр.

Главные дроби:

$\frac{1}{0}, \frac{a}{1}, \dots, \frac{p_0}{q_0}, \frac{p'_0}{q'_0}, \dots, \frac{I'_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p'_1}{q'_1}, \dots$
полные дроби, из соответствующих, будут:
 $\frac{\sqrt{A}}{1}, \frac{\sqrt{A}+a}{b}, \dots, \frac{\sqrt{A}+I_0}{D_0}, \frac{\sqrt{A}+I}{D}, \frac{\sqrt{A}+a}{b}, \dots$

Здесь $\frac{p}{q}$ изображает главную дробь, соответствующую последнему знаменателю μ первого периода $a, \beta, \dots, \lambda, \mu$; пусть будет z полная дробь, соответствующая главной $\frac{p}{q}$; так как $z = u + \frac{1}{z'}$, а $z' = \frac{\sqrt{A}+a}{b}$, то получим $z = u + \frac{b}{\sqrt{A}+a} = \mu + \frac{b(\sqrt{A}-a)}{A-a^2} = u + \sqrt{A} - a$. Следовательно (§ 3)

$$\sqrt{A} = \frac{p+P_0}{q+q_0} = \frac{p\sqrt{A} + p(a-a) + P_0}{q\sqrt{A} + q(a-a) + q_0},$$

откуда выводим следующие два уравнения:

$$p(\mu-a) + P_0 = Aq$$

$$q(\mu-a) + q_0 = p$$

Из второго уравнения находим $\mu - a + \frac{q_0}{q} = \frac{p}{q}$; но $q_0 < q$, следовательно $\mu - a$ изображает большее число, заключающееся в $\frac{p}{q}$, то есть a ; и так $\mu - a = a$, откуда $\mu = 2a$. Но, с другой стороны, $q_0 = p - a$; следовательно (§ 6) ряд знаменателей $a, \beta, \dots, \lambda, \mu$, предшествующих μ , будет симметричный, ибо $\frac{p-aq}{q}$ изображает одну из приближающихся дробей к разности $\sqrt{A} - a$ главной $\frac{1}{a+1}$, а этой

дробь предшествует дробь $\frac{p_0 - aq_0}{q_0}$. Следовательно, по причине что $q_0 = p - a$, выводим, что следующие, что период $a, \beta, \dots, \lambda, \mu$ тождествен с обратным ему $\lambda, \mu, \dots, \beta, a$. Из всего сказанного следует заключить, что знаменатели непрерывной дроби, изображающей разложение \sqrt{A} , будут составлены следующим ряд: $a, \beta, \beta, \dots, \beta, \beta, a, 2a; a, \beta, \beta, \dots, \beta, \beta, a, 2a$; и проч.

Этот закон был бы еще правильнее, если бы первый член, то есть a , обратился в $2a$ или в нуль, что случилось бы, если бы разлагали в непрерывную дробь выражения $\sqrt{A} \pm a$.

Теперь заметим, что каждая главная дробь $\frac{p}{q}$, соответствующая знаменателю $2a$, в каком-ли есть период, пользуется тем же свойством, что $p^2 - Aq^2 = \pm 1$. Действительно, когда $\mu = 2a$, то из уравнения $I_0 + I = \mu D$, в котором каждое из чисел I_0 и I не может превышать числа a , выводим $I_0 = I = a$, и $D = 1$; следовательно, уравнение $(p q_0 - p_0 q) D = p^2 - A q^2$ обращается в $p^2 - A q^2 = \pm 1$, или в $p^2 - A q^2 = -1$, смотря по тому, будет ли $\frac{p}{q} > \sqrt{A}$ или $\frac{p}{q} < \sqrt{A}$. Так как знаменатель $2a$ необходимо находится в разложении \sqrt{A} , то отсюда заключаем, что уравнение $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ во всяком случае может быть решено (по крайней мере со знаком $+$), каково бы ни было целое число A , лишь бы только оно не равнялось точному квадрату; вместе с тем усматриваем, что уравнение $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ допускает бесконечное

Равенство между двумя смежными дробями будетъ

$$\frac{N}{N_1} - \frac{M}{M_1} = \frac{nM + vL}{nM_1 + vL_1} - \frac{M}{M_1} = \frac{v(LM_1 - ML_1)}{M_1(nM_1 + vL_1)}.$$

Слѣдовательно, на основаніи этой формулы, найдется:

$$\begin{aligned} \frac{A}{A_1} &= + \frac{a}{A_1} \\ \frac{B}{B_1} - \frac{A}{A_1} &= - \frac{a\beta}{A_1 B_1} \\ \frac{C}{C_1} - \frac{B}{B_1} &= + \frac{a\beta\gamma}{B_1 C_1} \\ \frac{D}{D_1} - \frac{C}{C_1} &= - \frac{a\beta\gamma\delta}{C_1 D_1} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Сложивъ первыя два уравненія, получимъ въ первой части приближающуюся дробь $\frac{B}{B_1}$; сумма трехъ первыхъ уравненій дастъ намъ дробь $\frac{C}{C_1}$, четырехъ, $\frac{D}{D_1}$, и такъ далѣе. Слѣдовательно, сумма всѣхъ уравненій, до послѣдней разности, изобразитъ разложение $\frac{a}{a+\beta}$, то есть, величину x .

И такъ

$$x = \frac{a}{a+\beta} = \frac{a}{A_1} - \frac{a\beta}{A_1 B_1} + \frac{a\beta\gamma}{B_1 C_1} - \frac{a\beta\gamma\delta}{C_1 D_1} + \text{и пр.}$$

Для дроби вида $\frac{1}{a+1}$, получимъ

$$\frac{1}{a+1} = \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_1 B_1} + \frac{1}{B_1 C_1} - \frac{1}{C_1 D_1} + \text{и пр.}$$

Напримѣръ, изъ непрерывной дроби

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

выяснится

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 12} - \frac{1}{20 \cdot 70} + \text{и пр.}$$

Такъ же легко будетъ решить и обратную задачу, то есть, данный рядъ

$$\frac{P}{P_1} - \frac{Q}{Q_1} + \frac{R}{R_1} - \frac{S}{S_1} + \text{и пр.}$$

образовать въ непрерывную дробь. Сравнивая этотъ рядъ почленно съ строкою

$$\frac{a}{A_1} - \frac{a\beta}{A_1 B_1} + \frac{a\beta\gamma}{B_1 C_1} - \frac{a\beta\gamma\delta}{C_1 D_1} + \text{и пр.}$$

получимъ

$$\frac{P}{P_1} = \frac{a}{A_1}, \quad \frac{Q}{Q_1} = \frac{a\beta}{A_1 B_1}, \quad \frac{R}{R_1} = \frac{a\beta\gamma}{B_1 C_1}, \quad \frac{S}{S_1} = \frac{a\beta\gamma\delta}{C_1 D_1}, \dots$$

откуда

$$\frac{P}{P_1} = \frac{a}{A_1}, \quad \frac{P_1 Q}{Q_1} = \frac{\beta}{B_1}, \quad \frac{Q_1 R}{R_1} = \frac{\gamma}{C_1}, \quad \frac{R_1 S}{S_1} = \frac{\delta}{D_1}, \dots$$

Изъ этихъ уравненій выводимъ

$$P = a, \quad P_1 = A_1 = a, \quad \text{откуда} \quad \frac{a}{a} = \frac{P}{P_1};$$

$$P_1 Q B_1 = P Q_1 \beta \quad \text{или} \quad P_1 Q (\beta A_1 + \beta) = P Q_1 \beta,$$

$$\text{откуда} \quad \frac{\beta}{\delta} = \frac{a P_1 Q}{P Q_1 - P_1 Q} = \frac{Q P_1^2}{P Q_1 - P_1 Q};$$

точно такимъ образомъ найдемъ

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\epsilon} &= \frac{P R Q_1^2}{Q R_1 - R Q_1} \\ \frac{\delta}{\delta} &= \frac{Q S R_1^2}{R S_1 - S R_1} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Слѣдовательно

$$\begin{aligned} \frac{P}{P_1} - \frac{Q}{Q_1} + \frac{R}{R_1} - \frac{S}{S_1} + \dots = \\ \frac{P}{P_1 + \frac{Q P_1^2}{P Q_1 - P_1 Q} + \frac{P R Q_1^2}{Q R_1 - R Q_1} + \frac{Q S R_1^2}{R S_1 - S R_1} + \text{и пр.}} \end{aligned}$$

Пусть будетъ, напримѣръ, рядъ

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{и пр.}$$

изображающій величину $\frac{\pi}{4}$, то есть, отношеніе полуокружности къ диаметру круга, раздѣленное на 4. Найдется

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{и пр.} =$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2 + \frac{1}{5}} + \frac{1}{3 + \frac{1}{7}} - \frac{1}{4 + \frac{1}{9}} + \text{и пр.} \end{aligned}$$

Основа́ние Неперовой системы логарифмов то есть, трансцендентное число

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots \text{и проч.} = e,$$

определяется следующей непрерывной дробью:

$$e = 2 + \frac{1}{2 - \frac{1}{4 - \frac{1}{5 - \frac{1}{6 - \frac{1}{7 - \frac{1}{8 - \frac{1}{9 - \dots}}}}}}}$$

а показательное выражение e^x , разлагается в дробь

$$e^x = 1 + \frac{x}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2}} + \frac{\frac{x^2}{2}}{1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{x}{2}} - \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{2}}{1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{x}{2}} + \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{x^4}{2}}{1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{x}{2}} - \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{x^5}{2}}{1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{x}{2}} + \dots \text{и проч.}$$

§ 12. ТЕОРЕМА. Если x — безконечной непрерывной дроби $x = \frac{a}{a+\beta} + \frac{\gamma}{b+\gamma} + \frac{\delta}{c+\delta} + \frac{\epsilon}{d+\epsilon} + \dots$ и проч.

в которой $a, \beta, b, \gamma, c, \dots$ изображают числа целые, положительные или отрицательные, каждая из составляющих дробей $\frac{a}{a+\beta}, \frac{\beta}{b+\gamma}, \frac{\gamma}{c+\delta}, \dots$ меньше единицы, то величина x будет числом не рациональным.

Доказательство. Докажем, что величина x вообще меньше единицы; во первых, по предположению будет $\frac{a}{a+\beta} < 1$; теперь, приняв в соображение две составляющие дроби, получим $\frac{a}{a+\beta} + \frac{\gamma}{b+\gamma} = \frac{ab+\beta\gamma}{ab+\beta^2+\gamma^2}$; если составляющая дробь $\frac{\beta}{b+\gamma} > 0$,

то очевидно, что $\frac{ab}{ab+\beta^2}$ будет меньше единицы, ибо $\alpha < a$. Если же $\frac{\beta}{b+\gamma} < 0$, то предположив β отрицательным, b будет число положительное, и предыдущая дробь примет вид $\frac{ab}{ab-\beta^2}$, а это отношение также меньше единицы, потому что $\beta > b$; и действительно, если бы в дроби

$\frac{ab}{ab-\beta^2}$ подставим вместо β , то увеличим бы дробь, и в этом предположении она обращалась бы в $\frac{a}{a-1}$, которая не может превышать единицы по той причине, что $\alpha < a$ и сверх того оба числа a и $a-1$ целые. Рассматривая при составляющих дроби $\frac{a}{a+\beta} + \frac{\gamma}{b+\gamma} + \frac{\delta}{c+\delta}$,

же; действительно, так как $\frac{\beta}{b+\gamma}$, в соответствии сказанного сейчас, меньше единицы, то предположив $\frac{\beta}{b+\gamma} = \frac{m}{n}$, получим $\frac{a}{a+\beta} + \frac{\gamma}{b+\gamma} = \frac{a}{a+m}$, а это выражение состоит из двух со-

ставляющих дробей, удовлетворяющих упомянутым выше условиям, и следовательно оно меньше единицы. Продолжая точно таким образом, докажем, что величина безконечной непрерывной дроби $\frac{a}{a+\beta} + \frac{\gamma}{b+\gamma} + \frac{\delta}{c+\delta} + \frac{\epsilon}{d+\epsilon} + \dots$ и проч.

при допущенных условиях, будет меньше единицы. Она могла бы обращаться в единицу только в одном случае, именно, если бы была такая $\frac{a}{a+\beta} + \frac{\gamma}{b+\gamma} + \frac{\delta}{c+\delta} + \frac{\epsilon}{d+\epsilon} + \dots$ и проч.

Докажем теперь, что величина непрерывной дроби $\frac{a}{a+\beta} + \frac{\gamma}{b+\gamma} + \frac{\delta}{c+\delta} + \frac{\epsilon}{d+\epsilon} + \dots$ не может быть рациональным числом. Если бы эта дробь могла быть величиною рациональною, то имела бы

$$\frac{A}{A_1} = \frac{a}{a+\beta} + \frac{\gamma}{b+\gamma} + \frac{\delta}{c+\delta} + \frac{\epsilon}{d+\epsilon} + \dots$$

где A и A_1 целые числа. Пусть будет

$$\frac{B}{A} = \frac{\beta}{b+\gamma} + \frac{C}{C} = \frac{\gamma}{c+\delta} + \frac{D}{D} = \frac{\delta}{d+\epsilon} + \dots \text{и проч.}$$

гда B, C, D, \dots изображаютъ неопредѣленныя величины, которыя, какъ мы сей-часъ увидимъ, суть цѣлыя числа. Очевидно получимъ

$$\frac{A}{A_1} = \frac{a}{a + \frac{1}{A}}, \text{ откуда } B = \alpha A_1 - \alpha A$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\beta}{b + \frac{1}{B}}, \text{ откуда } C = \beta A - \beta B$$

$$\frac{C}{B} = \frac{\gamma}{c + \frac{1}{C}}, \text{ откуда } D = \gamma B - \gamma C$$

.....

Такъ какъ A и A_1 , по предположенію, суть цѣлыя числа, то очевидно, что и B, C, D, \dots будутъ также цѣлыя. Съ другой стороны имѣемъ

$$A < A_1, B < A, C < B, D < C, \dots$$

сдѣлательно получаемъ рядъ A_1, A, B, C, D, \dots составленный изъ цѣлыхъ чиселъ, и въ которомъ численная величина членовъ послѣдовательно уменьшается. Такое сдѣлательство невозможно допустить, ибо, какъ бы первый членъ A_1 великъ не былъ, число слѣдующихъ членовъ, уменьшающихся послѣдовательно по крайней мѣрѣ на единицу, было бы конечный, противно тому что сей-часъ доказано. Изъ этого должно заключить о справедливости приведенной теоремы.

Лемма. Если въ безконечной непрерывной дроби

$$x = \frac{a}{n} + \frac{m'}{n'} + \dots + \frac{M}{N} + \frac{a}{n} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} + \dots \text{ и проч}$$

порядка составляющія дроби $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \dots, \frac{M}{N}$ не будутъ удовлетворять всѣмъ или некоторымъ изъ условий $\frac{m}{n} < 1, \frac{m'}{n'} < 1, \dots, \frac{M}{N} < 1$, между тѣмъ какъ слѣдующія $\frac{a}{n}, \frac{\beta}{b}, \frac{\gamma}{c}, \dots$ и до безконечности, удовлетворяютъ эти изъ требованій, то величина x непрерывной дроби не будетъ рациональна.

Дѣйствительно, въ слѣдствіе доказаннаго выше, величина $y = \frac{a}{n} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \dots$ и проч.

будетъ не рациональна; сдѣлательно и рядъ

$$x = \frac{a}{n} + \frac{m'}{n'} + \dots + \frac{M}{N} + y$$

состоящий изъ конечнаго числа членовъ, и заключающій въ себя несвязную величину y , по свойствамъ непрерывныхъ дробей, необходимо будетъ равенъ числу не рациональному.

Отсылаемъ читателя къ сочиненію *Лажан-дра: Éléments de Géométrie*, или къ Русскому переводу этой книги, изданному въ 1837 году; тамъ они найдутъ приложеніе приведенной сей-часъ теоремы къ доказательству того предложенія, что отношеніе окружности круга къ его диаметру, и квадратъ этого отношенія не могутъ быть выражены рациональными числами. Впрочемъ, основываясь на послѣдней леммѣ, и наблюдая что

$$\tan^2 \frac{m}{n} = \frac{m}{n} - \frac{m^2}{5n - m^2} - \frac{m^2}{7n - m^2} \text{ и проч.}$$

читатель безъ труда усмотритъ, въ чемъ состоитъ это доказательство.

§ 13. Непрерывныя дроби употребляются иногда съ пользою при рѣшеніи определенныхъ уравненій, алгебраическихъ и трансцендентныхъ. Въ статьѣ APPROCHE (VALEUR) предложена въ крайкомъ видѣ способъ Лагранжа для рѣшенія алгебраическихъ уравненій. Описываемъ также къ сочиненію *Лажан-дра: Traité du Calcul Differential et du Calcul Intégral*, во второй части котораго читатели найдутъ некоторыя подробности объ употребленіи непрерывныхъ дробей для интегрированія дифференціальныхъ уравненій по приближенію.

§ 14. Оканчивая статью о непрерывныхъ дробяхъ скажемъ, что можно бы ихъ разсматривать и въ слѣдующемъ видѣ:

$$1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots$$

Напротивъ, дробь $\frac{57}{46}$ разлагается въ рядъ

$$\frac{37}{48} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}.$$

Разсматривание такого рода дробей доставляет весьма простое средство для разложения обыкновенной дроби на сумму частных дробей, имеющих каждая числителем единицу. Действительно, пусть будетъ

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \dots + \frac{1}{m};$$

изобразивъ приближающіяся дроби къ отношенію $\frac{A}{B}$, чрезъ $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, и проч. получимъ

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \frac{1}{a} \\ \frac{p'}{q'} &= \frac{1 + \frac{1}{b}}{a} = \frac{b+1}{ab} = \frac{pb+1}{qb} \\ \frac{p''}{q''} &= 1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc+c+1}{abc} = \frac{p'c+1}{q'c} \end{aligned}$$

$$\frac{p'''}{q'''} = 1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{bcd+cd+d+1}{abcd} = \frac{p''d+1}{q'd}$$

$$\begin{aligned} \frac{p^{(m)}}{q^{(m)}} &= \frac{A}{B} = \frac{bcd \dots m + cd \dots m + d \dots m + \dots + m + 1}{abcd \dots m} \\ &= \frac{p^{(m-1)}m+1}{q^{(m-1)}m} \end{aligned}$$

следовательно

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} + \frac{1}{abcd} + \dots + \frac{1}{abcd \dots m}.$$

И такъ, дробь $\frac{37}{48}$, для которой $a=2$, $b=3$, $c=2$, $d=4$, разлагается на слѣдующія частныя дроби:

$$\frac{37}{48} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16}.$$

Можно также приложить этого рода выраженіе къ разложенію рациональной дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$ на сумму частныхъ дробей, коихъ числители будутъ постоянныя. И такъ, если положимъ

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{C_1}{X_1} + \frac{C_2}{X_2} + \frac{C_3}{X_3} + \dots + \frac{C_m}{X_m},$$

разукая подъ $X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$ цѣлыя функціи переменной x , которыя легко будутъ определены, а подъ $C_1, C_2, C_3, \dots, C_m$ постоянными величинами, то получимъ

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{C_1}{X_1} + \frac{C_2}{X_2} + \frac{C_3}{X_1 X_2 X_3} + \dots + \frac{C_m}{X_1 X_2 X_3 \dots X_m}.$$

Напримѣръ дробь $\frac{5x+1}{x^2+5}$ разлагается слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{5x+1}{x^2+5} = \frac{0}{x^2+5} + \frac{46}{5x-1},$$

$$\text{откуда} \quad \frac{5x+1}{x^2+5} = \frac{9}{5x-1} - \frac{46}{(5x-1)(x^2+5)}.$$

CONTINUELLEMENT PROPORTIONNEL. (Арно.)

НЕПРЕРЫВНО ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЙ. Когда говоримъ, что три количествъ a, b, c непрерывно пропорциональны, то разумемъ, что они составляютъ непрерывную пропорцію $a:b=b:c$. См. CONTINUE (PROPORTION).

CONTINUITÉ. (Анал.) НЕПРЕРЫВНОСТЬ, ПОСЛѢДОВАТЕЛЬНОСТЬ БЕЗПРЕРЫВНОСТИ.

Непрерывная связь между различными частями какого либо цѣлаго. *Continuité d'une fonction; непрерывность функции.* См. CONTINUE (FONCTION). *Continuité de mouvement; непрерывность движения.*

SOLUTION DE CONTINUITÉ. Разрывъ непрерывности. См. CONTINUE (FONCTION).

CONTOUR. (Геом.) ОБЪЕМЪРЪ, ПЕРИМЕТРЪ, ОБОДЪ. См. PERIMÈTRE.

CONTOURNÉES (COURBES). (Геом.) ПЕРЕГИБНЫЯ или ИЗГИБНЫЯ КРИВЫЯ. Такъ называлъ Варингтонъ кривыя линіи, имѣющія точку изгиба. См. INFLEXION (POINT D').

CONTRASTIVITÉ или CONTRASTILITÉ. (Физ.) СЖИМАЕМОСТЬ. Свойство тѣлъ, по которому они опы външняго давленія, или опы какой либо другой причины, уменьшаются въ своихъ объемахъ. CONTRACTION. СЖАТИЕ, СЖИМАНІЕ. См. ВЫШЕ.

CONTRACTION DE LA VEINE FLUIDE или CONTRACTION DU JET LIQUIDE. (Мех.) СЖАТИЕ СТРУИ. Когда несжимаемая жидкость вытекаетъ изъ сосуда чрезъ отверстіе какой нѣ есть фигуры, напримѣръ круглое, то струя не имѣетъ цилиндрическаго вида, а уменьшается

въ своемъ диаметрѣ до нѣкотораго разстоянія отъ отверстія, и принимаетъ видъ усѣченного конуса. Такое уменьшеніе диаметра называется *сжатіемъ струи*. Причину этого явленія полагаютъ въ томъ, что частицы жидкости, находясь еще въ сосудѣ, приближаются къ отверстию по направленіямъ сходящимся, въ видѣ воронки, и сохраняютъ отчасти эти направленія и по выходѣ изъ сосуда. Опыты доказали, что если снабдить отверстие насадкою или трубою, одинаковаго вида съ струею, и дадутъ этой насадкѣ длину, равную отстоянію самой узкой части струи отъ отверстія, то количество вытекающей воды, противъ получаемаго безъ насадки, нисколько не измѣнится. Опыты показали также, что площадь отверстія относится къ площади самаго узкаго сѣченія струи, почти какъ 1 къ 0,62.

CONTRADICTION. ПРОТИВОРѢЧІЕ. *Equations contradictoires; противорѣчивыя уравненія*, напримѣръ слѣдующія два: $3x - 5y = 6$ и $6x - 10y = 7$.

CONTRAIRE. ПРОТИВНЫЙ. *Valeurs de signes contraires; величины съ противными знаками*; то есть, одна положительная, а другая отрицательная. — *Forces agissant en sens contraires; силы, въ противныя стороны дѣйствующія*.

CONTRE-BALANCER или **EQUILIBRER.** (Мех.) **УРАВНОВѢСИТЬ**; привести въ равновѣсіе. *Les deux forces se contre-balaencent; сіи двѣ силы уравновѣшиваются между собою, уничтожаютъ одна другую*.

CONTRE-DIAMÈTRE. Смол. DIAMÈTRE.
CONTRE-HARMONIQUE (PROPORTION). (Ариф.) **ПРОТИВУ-ГАРМОНИЧЕСКАЯ ПРОПОРЦІЯ.**

Три числа a, b, c составляютъ *противу-гармоническую пропорцію*, когда разность между вторымъ и первымъ $b - a$ относится къ разности между третьимъ и вторымъ $c - a$, какъ прѣше число c , къ первому a . То есть, когда имѣемъ:

$$b - a : c = c : a.$$

Напримѣръ, числа 5, 5 и 6 составляютъ *противу-гармоническую пропорцію*, ибо

$$5 - 5 : 6 - 5 = 6 : 5.$$

Для опредѣленія *противу-гармонической средней пропорциональной* (moyenne proportionnelle contre-harmonique) между двумя данными числами, стоитъ только, изъ приведенной выше пропорціи вывести величину b , принимая a и c за данные два

числа. Найдется

$$b = \frac{a^2 + c^2}{a + c}.$$

Напримѣръ, если бы данные числа были: 9 и 18, то полагая $a = 9$, $c = 18$, получили бы $b = 15$; и дѣйствительно

$$15 - 9 : 18 - 15 = 18 : 9.$$

Смол. HARMONIQUE.

CONTRE-POIDS. (Мех.) ПЕРЕВѢСЪ.

CONTR'ERREURS (MÉTHODE DES). (Анал.) **СПОСОБЪ ВОЗНАГРАЖДЕНІЯ ПОГРѢШНОСТЕЙ, СПОСОБЪ ПРОТИВУОШИБОКЪ.**

Когда при вычисленіи по приближенію какой нибудь величины, замѣчаемъ, что ходъ выкладки представляетъ погрѣшности въ известную сторону, и для уничтоженія ихъ, или для воспрепятствованія дальнѣйшему ихъ распространенію, вводимъ новыя погрѣшности въ противную сторону, по такому рода дѣйствіямъ составляютъ такъ называемый способъ *вознагражденія погрѣшностей*. Отсылаемъ читателя къ некому таблицѣ догариемовъ, изданныхъ *Каллетомъ*; тамъ они найдутъ приложенія этого способа къ составленію таблицъ для тригонометрическихъ линій.

CONVENTION. УСЛОВІЕ. *Formule conventionnelle; условная формула*; формула, справедливая при нѣкоторыхъ условіяхъ.

CONVERGENCE. (Геом.) СХОДИМОСТЬ. *Convergence de deux droites; сходимостъ двухъ прямыхъ*. Свойство прямыхъ, пересѣкающихся вѣчно.

CONVERGENCE D'UNE SÉRIE. (Анал.) СХОДИМОСТЬ, ПРЕДѢЛЬНОСТЬ РЯДА. Если изъ безконечнаго числа членовъ

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, \dots$$

выводимыхъ одинъ изъ другаго посредствомъ опредѣленнаго закона, составимъ рядъ

$$(1) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m + \dots,$$

то эшотъ рядъ принимаетъ названіе *сходящагося или предѣльнаго (série convergente)*, если сумма m первыхъ его членовъ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m$ будетъ приближаться, по мѣрѣ увеличенія m , къ нѣкоторому предѣлу конечному, и совершенно опредѣленному. Напротивъ того, рядъ (1) называется *расходящимся (série divergente)*, когда сумма $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m$, для безконечнаго значенія числа m , обратится въ величину безконечную или неопредѣленную. Нѣкоторые максима-

тики называют *полу-сходящимися* (*séries demi-convergentes* или *semi-convergentes*) такие ряды, для которых сумма $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \dots + \varrho_m$, при $m \rightarrow \infty$, не делается бесконечною, но обращается в величину неопределенную; и такъ, рядъ $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$, для $x=1$, принадлежитъ къ этому роду. Ряды полу-сходящіяся дѣлаются сходящимися, когда ссавляющіе ихъ члены $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots$ будутъ соотвѣственно замѣнены произведеніями $\varrho_1\theta, \varrho_2\theta^2, \varrho_3\theta^3, \dots$ гдѣ θ разумѣетъ величину, менѣшую единицы. Поэтому говоримъ иногда, что рядъ $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \dots + \varrho_m + \dots$ равенъ предѣлу, къ которому стремится сумма $\varrho_1\theta + \varrho_2\theta^2 + \varrho_3\theta^3 + \dots + \varrho_m\theta^m + \dots$ по мѣрѣ приближенія числа θ къ единицѣ.

Весьма важно и вѣстѣ съ тѣмъ весьма трудно рѣшать вообще, будетъ ли какой нѣ рядъ $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \dots + \varrho_m + \dots$ сходящимся или нѣтъ. До сихъ поръ не найдено еще общихъ правилъ, легко прилагаемыхъ на практикѣ, для опредѣленія признаковъ, по которымъ бы можно было судить о сходимости данной строки. Чаше всего для достиженія этой цѣли должно прибѣгать къ особеннымъ приѣмамъ, основаннымъ на частностяхъ видѣ и свойствахъ предложеннаго ряда.

Первое общее правило выводится изъ самаго опредѣленія сходящагося ряда; оно состоитъ въ томъ, чтобы найти сумму $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \dots + \varrho_m$ въ функціи m , и положить пределъ $m \rightarrow \infty$. Но, чаще всего, нахожденіе этой суммы представляетъ большія затрудненія. Впрочемъ, аналиты съ успѣхомъ употребляютъ этотъ способъ для доказательства сходимости рядовъ, происходящихъ отъ разложенія произвольныхъ функцій, и составленныхъ изъ членовъ, которые заключаютъ въ себя синусы и косинусы кривыхъ дугъ отъ одной переменной. Этотъ способъ оказался такъ же удовлетворительнымъ для удостовѣренія въ сходимости ряда, выражающаго разложеніе функцій отъ двухъ переменныхъ угловъ, когда предложенный рядъ составленъ изъ цѣлыхъ рациональныхъ функцій синусовъ и косинусовъ этихъ двухъ угловъ. Весьма сомнительно, чтобы способъ, о которомъ говоримъ, могъ быть равно успѣшенъ въ другихъ случаяхъ.

Приложимъ этотъ способъ къ ряду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(a) da + \left(\int_0^{2\pi} f(a) \cos a da \right) \cos x \\ + \left(\int_0^{2\pi} f(a) \cos 2a da \right) \cos 2x + \dots \\ + \left(\int_0^{2\pi} f(a) \cos na da \right) \cos nx + \dots \\ + \left(\int_0^{2\pi} f(a) \sin a da \right) \sin x \\ + \left(\int_0^{2\pi} f(a) \sin 2a da \right) \sin 2x + \dots \\ + \left(\int_0^{2\pi} f(a) \sin na da \right) \sin nx + \dots \end{aligned}$$

въ которомъ $f(a)$ изображаетъ функцію, совершенно произвольную, даже прерывную, но только конечную между предѣлами $a=0$ и $a=2\pi$; переменная x заключается также между предѣлами 0 и 2π . Изобразимъ чрезъ s_n сумму

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(a) da + \left(\int_0^{2\pi} f(a) \cos a da \right) \cos x + \dots \\ + \left(\int_0^{2\pi} f(a) \cos na da \right) \cos nx \\ + \left(\int_0^{2\pi} f(a) \sin a da \right) \sin x + \dots \\ + \left(\int_0^{2\pi} f(a) \sin na da \right) \sin nx; \end{aligned}$$

вопросъ будетъ состоять въ томъ, чтобы опредѣлить s_n для $n \rightarrow \infty$. Но, замѣтимъ, что общій членъ предложеннаго ряда можетъ быть представлень въ видѣ

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(a) [\cos na \cdot \cos nx + \sin na \cdot \sin nx] da \\ = \int_0^{2\pi} f(a) \cos n(x-a) da; \end{aligned}$$

слѣдовательно найдемъ

$$s_n = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \cos(x-a) + \cos 2(x-a) + \dots + \cos n(x-a) \right] f(a) da.$$

Но извѣстно, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \cos(x-a) + \cos 2(x-a) + \dots + \cos n(x-a) \\ = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-a)}{2 \sin \frac{1}{2}(x-a)}, \end{aligned}$$

почему и получимъ

$$s_n = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-a)}{2 \sin \frac{1}{2}(x-a)} f(a) da.$$

Разложимъ этотъ интегралъ на три слѣдующіе:

$$\begin{aligned} s_n = \frac{1}{2} \int_0^{x-\omega} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-a)}{\sin \frac{1}{2}(x-a)} f(a) da \\ + \frac{1}{2} \int_{x-\omega}^{x+\omega} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-a)}{\sin \frac{1}{2}(x-a)} f(a) da \\ + \frac{1}{2} \int_{x+\omega}^{2\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-a)}{\sin \frac{1}{2}(x-a)} f(a) da. \end{aligned}$$

Теперь должно замѣтить, что перамы и прешій изъ снхъ интеграловъ равны нулю, какъ бы мала ил была величина ϵ , лишь бы только она не обращалась въ нуль. Для доказательства этого предположенія, разсмотримъ вообще интегралъ

$$\int_p^q \frac{\sin m(x-a)}{\sin \frac{1}{2}(x-a)} f(a) da,$$

въ которомъ m изображаетъ число безконечное, а p и q величины, заключающіяся между предѣлами 0 и 2π , и между которыми τ не заключается. Положивъ для краткости $\frac{f(a)}{\sin \frac{1}{2}(x-a)} = F(a)$; предыдущій интегралъ очевидно приметъ видъ

$$\int_p^q \sin m(x-a) F(a) da = \sin m\tau \int_p^q F(a) \cos ma \cdot da - \cos m\tau \int_p^q F(a) \sin ma \cdot da,$$

и мы докажемъ, что для $m = \infty$, будетъ

$$\int_p^q F(a) \cos ma \cdot da = 0 \text{ и } \int_p^q F(a) \sin ma \cdot da = 0.$$

Разсмотримъ послѣдній изъ снхъ интеграловъ, и разложимъ его на сумму

$$\int_p^q = \int_p^{p+\frac{2\tau}{m}} + \int_{p+\frac{2\tau}{m}}^{p+2\frac{2\tau}{m}} + \dots + \int_{p+(k-1)\frac{2\tau}{m}}^{p+\frac{2\tau}{m}},$$

предполагая $q = p + k \frac{2\tau}{m}$, и опуская, для сокращенія, подынтегральную функцию, которая одинакова для всѣхъ интеграловъ. Докажемъ теперь, что каждый изъ интеграловъ, входящихъ во вторую часть предыдущаго уравненія, равенъ нулю. Возьмемъ, напримѣръ, второй изъ нихъ

$$\int_{p+\frac{2\tau}{m}}^{p+2\frac{2\tau}{m}} F(a) \sin ma \cdot da.$$

Въ основаніяхъ Интегральнаго Исчисленія доказываютъ, что подобная сумма равна $\frac{1}{m}$ умноженной на интегралъ

$$\int_{p+\frac{2\tau}{m}}^{p+2\frac{2\tau}{m}} \sin ma \cdot da; \text{ следовательно}$$

$$\begin{aligned} & \int_{p+\frac{2\tau}{m}}^{p+2\frac{2\tau}{m}} F(a) \sin ma \cdot da \\ &= F\left(p + \theta \frac{2\tau}{m}\right) \int_{p+\frac{2\tau}{m}}^{p+2\frac{2\tau}{m}} \sin ma \cdot da, \end{aligned}$$

гдѣ $\theta > 1$ и < 2 . Но

$$\int_{p+\frac{2\tau}{m}}^{p+2\frac{2\tau}{m}} \sin ma \cdot da = 0,$$

откуда заключаемъ, что и интегралъ

$$\int_{p+\frac{2\tau}{m}}^{p+2\frac{2\tau}{m}} F(a) \sin ma \cdot da = 0,$$

а следовательно и

$$\int_p^q F(a) \sin ma \cdot da = 0.$$

Точно такимъ образомъ докажется, что

$$\int_p^q F(a) \cos ma \cdot da = 0,$$

откуда должно будетъ заключить, что каждый изъ двухъ интеграловъ

$$\begin{aligned} & \int_{x-\omega}^{x+\omega} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-a)}{\sin \frac{1}{2}(x-a)} f(a) da, \\ & \int_{x+\omega}^{x+2\omega} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-a)}{\sin \frac{1}{2}(x-a)} f(a) da \end{aligned}$$

обращается въ нуль. Что касается до интеграла

$$\int_{x-\omega}^{x+\omega} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-a)}{\sin \frac{1}{2}(x-a)} f(a) da,$$

то доказанное предѣлѣ снхъ не можемъ отнести къ нему, по той причинѣ, что подынтегральная функция $\frac{f(a)}{\sin \frac{1}{2}(x-a)}$ обращается въ безконечность между предѣлами интегрированія. Если, какъ выше, положимъ $n + \frac{1}{2} = m$, и сверхъ того возьмемъ $a = x + z$, то получимъ

$$s_n = \frac{1}{2} \int_{-\omega}^{+\omega} \frac{\sin mz}{\sin \frac{1}{2}z} f(x+z) dz =$$

$$= \frac{1}{2} f(x+\theta\omega) \int_{-\omega}^{+\omega} \frac{\sin mz}{\sin \frac{1}{2}z} dz = f(x+\theta\omega) \int_0^{\omega} \frac{\sin mz}{\sin \frac{1}{2}z} dz,$$

разуиъ подѣ θ числомъ, заключающаеся между -1 и $+1$. И такъ, останется только опредѣлить

величину интеграла $\int_0^{\omega} \frac{\sin mz}{\sin \frac{1}{2}z} dz$; но, замѣтивъ, что означивъ чрезъ λ число, заключающееся между предѣлами 0 и 1, получимъ послѣдовательно

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega} \frac{\sin mz}{\sin \frac{1}{2}z} dz &= \int_0^{\omega} \frac{\frac{1}{2}z}{\sin \frac{1}{2}z} \cdot \frac{\sin mz}{\frac{1}{2}z} dz \\ &= \frac{1}{2} \lambda \omega \int_0^{\omega} \frac{\sin mz}{\frac{1}{2}z} dz = 2 \int_0^{\omega} \frac{\sin mz}{z} dz, \end{aligned}$$

ибо ω изображает число, по произволению малое.

Но интеграл $\int_0^{\omega} \frac{\sin mz}{z} dz$, чрез предположение

$mz = x$, обращается въ $\int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy$, который, по Эйлеру, равенъ $\frac{\pi}{2}$. Слѣд. вѣрно

$$2 \int_0^{\omega} \frac{\sin mz}{z} dz = \pi, \text{ откуда } s_n = \pi f(x)$$

И такъ, по мѣрѣ увеличенія числа n сумма s_n приближается болѣе и болѣе къ предѣлу $\pi f(x)$; отсюда должно заключить, что предложенный рядъ есть *сходящійся*, и имѣетъ предѣломъ своимъ $\pi f(x)$. На этомъ основаніи получаемъ слѣдующую притязательную формулу:

$$\begin{aligned} \pi f(x) = & \frac{1}{2} \int_0^{\omega} f(a) da + \left(\int_0^{\omega} f(a) \cos a da \right) \cos x + \dots \\ & + \left(\int_0^{2\pi} f(a) \cos na da \right) \cos nx + \text{и проч.} \\ & + \left(\int_0^{2\pi} f(a) \sin a da \right) \sin x + \dots \\ & + \left(\int_0^{2\pi} f(a) \sin na da \right) \sin nx + \text{и проч.} \end{aligned}$$

которая можетъ быть приложена къ рѣшенію многихъ важныхъ вопросовъ изъ высшей Физики.

Другой способъ для различенія рядовъ сходящихся или расходящихся, давно уже извѣстный математикамъ, состоитъ въ слѣдующемъ: въ предложенномъ ряду

$$e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_m + e_{m+1} + \dots$$

составляемъ отношеніе $\frac{e_{m+1}}{e_m}$ двухъ послѣдовательныхъ членовъ, и ищемъ предѣлъ этого отношенія, то есть, величину его, соответствующую значенію $m = \infty$. Если пред. $\frac{e_{m+1}}{e_m} < 1$, то рядъ $e_1 + e_2 + e_3 + \dots$ и проч. будетъ *сходящійся*; если же пред. $\frac{e_{m+1}}{e_m} > 1$, то данный рядъ *расходящійся*. Это правило, часто удовлетворительное, имѣетъ однакожъ два недостатка: во первыхъ, оно приводитъ къ сомнительному случаю когда пред. $\frac{e_{m+1}}{e_m} = 1$, а во вторыхъ, должно замѣтить, что иногда бываетъ трудно о предѣлахъ предѣла отношенія $\frac{e_{m+1}}{e_m}$.

Вышею отношеніемъ $\frac{e_{m+1}}{e_m}$, можно разсмотрѣть выраженіе $(e_m)^{\frac{1}{m}}$, ибо $e_m^{\frac{1}{m+1}}$ и $(e_m)^{\frac{1}{m}}$ спре-

матся къ одному и тому же предѣлу при увеличивающихся величинахъ числа m *). И такъ, рядъ $e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_m + \dots$ будетъ *сходящійся*, если, для $m = \infty$, $(e_m)^{\frac{1}{m}} < 1$, а *расходящійся*, когда $(e_m)^{\frac{1}{m}} > 1$. Случай $(e_m)^{\frac{1}{m}} = 1$ сомнительный. Докажемъ эти предположенія.

Разсмотримъ сперва геометрическую прогрессию $1, z, z^2, z^3, \dots$

Сумма m первыхъ ея членовъ будетъ

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{m-1} = \frac{1 - z^m}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} - \frac{z^m}{1 - z}.$$

Замѣтимъ теперь, что для возрастающихъ значеній числа m , дробь $\frac{z^m}{1 - z}$ будетъ спрессовываться къ нулю или къ безконечности, смотря по тому, будетъ ли $z < 1$ или $z > 1$; отсюда заключаемъ, что безконечный рядъ

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots \text{ и проч.}$$

будетъ *сходящимся* для $z < 1$, а *расходящимся* для $z > 1$.

Теперь примемъ въ разсмотрѣніе какой нибудь безконечный рядъ

$$s = e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_m + e_{m+1} + e_{m+2} + e_{m+3} + \dots \text{ и проч.}$$

Мы предполагаемъ, что начиная отъ нѣкоторой конечной величины m , какъ бы она впрочемъ велика ни была, каждое изъ отношеній $\frac{e_{m+1}}{e_m}$, $\frac{e_{m+2}}{e_{m+1}}$, $\frac{e_{m+3}}{e_{m+2}}$, \dots равно числу, меньшему единицы; слѣдовательно

$$\frac{e_{m+1}}{e_m} = \theta_1 < 1$$

$$\frac{e_{m+2}}{e_{m+1}} = \theta_2 < 1$$

$$\frac{e_{m+3}}{e_{m+2}} = \theta_3 < 1$$

$$\dots$$

Изъ этихъ уравненій выводимъ

$$e_{m+1} = \theta_1 e_m$$

$$e_{m+2} = \theta_1 \theta_2 e_m$$

$$e_{m+3} = \theta_1 \theta_2 \theta_3 e_m$$

$$\dots$$

и изобразивъ чрезъ s_{m-1} конечную сумму $e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_{m-1}$, получимъ

$$s = s_{m-1} + e_m (1 + \theta_1 + \theta_1 \theta_2 + \theta_1 \theta_2 \theta_3 + \dots).$$

*). Доказательство этого предположенія читателю найдутъ въ сочиненіи Г. Коши: *Analyses algébriques*, гл. II.

Если между числами $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ выберем наибольшее, и изобразим его через z , то по признаку $\theta_1 < 1, \theta_2 < 1, \theta_3 < 1, \dots$ будет $z < 1$; следовательно бесконечный ряд $1 + z + z^2 + z^3 + \dots$ и проч., или что всё равно $1 + z + z^2 + z^3 + \dots$ и проч., из силу доказанного выше, будет сходиться, и сумма его выразится дробью $\frac{1}{1-z}$. Но так как z изображает наибольшую из величин $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ то очевидно

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots > \text{или, но большей стрѣ,} \\ = 1 + \theta_1 + \theta_1 \theta_2 + \theta_1 \theta_2 \theta_3 + \dots$$

Следовательно, в этомъ случаѣ, сумма s будетъ конечна, ибо она не больше конечной величины $s_{m-1} + \theta_m \cdot \frac{1}{1-z}$.

Легко видѣть, что если каждая изъ величинъ $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ больше единицы, то рассматриваемый рядъ будетъ расходиться; действительно, выбравъ въ этомъ предположеніи наименьшую изъ величинъ $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$, и изобразивъ ее черезъ z , получимъ очевидно $1 + z + z^2 + z^3 + \dots < 1 + \theta_1 + \theta_1 \theta_2 + \theta_1 \theta_2 \theta_3 + \dots$. Но такъ какъ $z > 1$, то сумма $1 + z + z^2 + z^3 + \dots$ будетъ бесконечна, а следовательно и сумма $1 + \theta_1 + \theta_1 \theta_2 + \theta_1 \theta_2 \theta_3 + \dots$; отсюда заключаемъ, что и $z = \infty$, то есть, что рядъ $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots$ и проч. въ этомъ случаѣ *расходится*.

Для примѣра возьмемъ бесконечную строку

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots + \frac{x^m}{1.2.3 \dots m} \\ + \frac{x^{m+1}}{1.2.3 \dots (m+1)} + \dots$$

Отношеніе двухъ смежныхъ членовъ $\frac{x^{m+1}}{1.2.3 \dots (m+1)}$ и $\frac{x^m}{1.2.3 \dots m}$ равно $\frac{x}{m+1}$, а это отношеніе, для $m = \infty$, и для какихъ нѣ есть значеній величины x , обращается въ нуль, следовательно, предложенный рядъ будетъ сходящимся при $x = -\infty$ до $x = +\infty$, то есть, для всѣхъ возможныхъ величинъ x .

Если бы расширяли рядъ

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^m}{m} + \frac{x^{m+1}}{m+1} + \dots,$$

то, по предложенному правилу, надлежало бы найти отношеніе двухъ смежныхъ членовъ $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ и $\frac{x^m}{m}$;

это отношеніе равно $\frac{m}{m+1} \cdot x = \frac{x}{1 + \frac{1}{m}}$; полагая въ

немъ $m = \infty$, найдемъ для предѣла величина x ;

следовательно, когда $x < 1$, то рядъ будетъ сходящимся, а при $x \geq 1$ получается рядъ *расходящийся*. Но при частномъ значеніи $x = 1$, предѣлъ, о которомъ говоримъ, обращается въ единицу, и следовательно предложенное правило оказывается недостовернымъ для ряда

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots$$

Впрочемъ, посредствомъ особеннаго приѣма, легко удостовериться въ расходности этого ряда; напомнимъ его въ видѣ

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \dots \\ + \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{m+1}\right) + \dots$$

и замѣтимъ, что каждая совокупность дробей, заключающаяся въ скобкахъ, даетъ сумму, большую $\frac{1}{2}$. Действительно, возьмемъ общій членъ

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{m+1},$$

въ которомъ предполагаемъ $m = 2^n$; вѣдомъ общій членъ примемъ видъ

$$\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \frac{1}{2^n+3} + \dots + \frac{1}{2^n+2^n} = \\ \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \frac{1}{2^n+3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Очевидно, что послѣдняя дробь $\frac{1}{2^{n+1}}$ не больше всѣхъ предшествующихъ ей, почему

$$\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \frac{1}{2^n+3} + \dots + \frac{1}{2^n+2^n} > \\ \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда видѣть, что каждая изъ суммъ $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right), \dots$ которыхъ число будетъ бесконечное, больше $\frac{1}{2}$; а это самое приводитъ къ тому заключенію, что $s = \infty$, и что следовательно рядъ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ и проч. будетъ *расходящимся*.

Другое правило, о которомъ мы упоминали, доказывается слѣдующимъ образомъ. мы предполагаемъ, что выраженіе $(\theta_m)^{\frac{1}{m}}$, начиная отъ опредѣленнаго значенія числа m , сохраняетъ величину, меньшую единицы; следовательно

$$(\theta_m)^{\frac{1}{m}} = \theta_1 < 1 \\ (\theta_{m+1})^{\frac{1}{m+1}} = \theta_2 < 1 \\ (\theta_{m+2})^{\frac{1}{m+2}} = \theta_3 < 1 \\ \dots \dots \dots$$

изъ этихъ уравненій выводимъ

$$\begin{aligned} \varrho_m &= \varrho_1^m, \\ \varrho_{m+1} &= \varrho_2^{m+1}, \\ \varrho_{m+2} &= \varrho_3^{m+2}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Если изобразить чрезъ s сумму бесконечнаго ряда $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \dots$ и проч., а чрезъ s_{m-1} конечную сумму первыхъ $(m-1)$ его членовъ, то получимъ

$$s = s_{m-1} + (\varrho_1^m + \varrho_2^{m+1} + \varrho_3^{m+2} + \dots).$$

Пусть будетъ ε наибольшее изъ количествъ $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots$, которыхъ всѣ, по предположенію, менѣе единицы; следовательно и $\varepsilon < 1$, и сверхъ того

$$\varrho_1^m + \varrho_2^{m+1} + \varrho_3^{m+2} + \dots < \varepsilon^m + \varepsilon^{m+1} + \varepsilon^{m+2} + \dots = \varepsilon^m (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots);$$

но такъ какъ рядъ $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots$, а по этому и $\varepsilon^m (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots) = \varepsilon^m + \varepsilon^{m+1} + \varepsilon^{m+2} + \dots$ есть сходящійся, а $(\varrho_1^m + \varrho_2^{m+1} + \varrho_3^{m+2} + \dots < \varepsilon^m + \varepsilon^{m+1} + \varepsilon^{m+2} + \dots)$, то очевидно, что и сумма $s = s_{m-1} + (\varrho_1^m + \varrho_2^{m+1} + \varrho_3^{m+2} + \dots)$ будетъ конечна; и такъ, если пред. $(\varrho_m)^{\frac{1}{m}} < 1$, то рядъ $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \dots$ и проч. будетъ сходящійся. Если же числа $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \dots$ будутъ больше единицы, то докажемъ, какъ и выше, что рядъ $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \dots$ расходливъ. Для прѣмъра пусть будетъ строка

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{m^m} + \text{и проч.}$$

выраженіе $(\frac{1}{m^m})^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}$, для $m = \infty$, обращается въ 0; следовательно предложенный рядъ есть сходящійся.

Сверхъ предложенныхъ общихъ способовъ, есть еще нѣкоторые частные прѣемы, по которымъ можно иногда удостовѣриться въ сходимости или расходливости рядовъ. Описывая по сему предмету къ сочиненію Г. Коши: *Analyse algébrique*, 1821 г. и къ рассужденіямъ: *Réflexions sur les suites divergentes ou convergentes* въ *Opuscules mathématiques par d'Alembert*, T. V. (1768 г.). *Sur la convergence des series, par Cauchy* въ *Exercices de Mathématique*, T. II. (1827 г.). Смол. также въ XIII томѣ періодическаго изданія *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, von A. L. Crelle, разсужденіе Понселе (Poncelet) объ этомъ предметѣ и известное сочиненіе Лежандра: *Exercices de Calcul Intégral*.

Есть бесконечные ряды, которые всегда бываютъ сходящимися: таковы напримѣръ ряды, коихъ члены, начиная съ перваго или съ дальнѣйшаго изъ нихъ, бываютъ попеременно то положительными то отрицательными, и составляютъ рядъ убывающій. Любимый извѣстный намъ, что такого рода строки всегда сходящійся. Примѣчательно по обстоятельству, что Лейбницъ Бернулли не могъ доказать этого предложенія, вслѣдствіе простаго.

Пусть будетъ бесконечный рядъ

$$s = \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_4 + \varrho_5 - \varrho_6 + \varrho_7 - \text{и проч.}$$

въ которомъ предполагаемъ $\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 > \varrho_4 > \dots$

Легко видѣть, что сумма s будетъ менѣе перваго члена ϱ_1 ; дѣйствительно, предыдущій рядъ можетъ быть написанъ въ видѣ

$$\varrho_1 - (\varrho_2 - \varrho_3) - (\varrho_4 - \varrho_5) - (\varrho_6 - \varrho_7) - \text{и проч.}$$

гдѣ всѣ разности $\varrho_2 - \varrho_3, \varrho_4 - \varrho_5, \varrho_6 - \varrho_7, \dots$, вычитаемыя изъ ϱ_1 , суть количества положительныя. Съ другой стороны, сумма s больше разности $\varrho_1 - \varrho_2$, ибо

$$s = \varrho_1 - \varrho_2 + (\varrho_3 - \varrho_4) + (\varrho_5 - \varrho_6) + \text{и проч.}$$

а разности $\varrho_3 - \varrho_4, \varrho_5 - \varrho_6, \dots$ всѣ положительныя.

Впрочемъ, нѣтъ надобности, чтобы члены ряда

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \varrho_5, \varrho_6, \varrho_7, \dots$$

были попеременно положительными и отрицательными; они могутъ переключать знаки черезъ два, три, четыре.... члена; такъ напримѣръ рядъ

$s = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_4 - \varrho_5 - \varrho_6 + \varrho_7 + \varrho_8 + \varrho_9 - \text{и проч.}$ будетъ сходящійся, если только онъ убывающій; и дѣйствительно, положивъ

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = u_1$$

$$\varrho_4 + \varrho_5 + \varrho_6 = u_2$$

$$\varrho_7 + \varrho_8 + \varrho_9 = u_3$$

$$\dots\dots\dots$$

гдѣ $\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 > \varrho_4 > \dots$, очевидно будетъ $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$; следовательно получимъ рядъ $s = u_1 - u_2 + u_3 - \text{и проч.}$, который относится къ разсмотрѣнному сей-часъ случаю. —

Минный рядъ

$$(\lambda_1 + \mu_1 \sqrt{-1}) + (\lambda_2 + \mu_2 \sqrt{-1}) + (\lambda_3 + \mu_3 \sqrt{-1}) + \dots + (\lambda_m + \mu_m \sqrt{-1}) + \text{и проч.}$$

принимаетъ названіе сходящагося, когда вещественныя ряды

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_m + \text{и проч.}$
 $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_m + \text{и проч.}$

будутъ оба сходящіеся; въ противномъ случаѣ данный рядъ называется *расходящимся*.

Для сличенія описываемъ къ слѣдѣ: **SÉRIE. CONVERGENTES (DROITES)** или **CONCOURANTES**. (Геом.) **СХОДЯЩІЯСЯ, ПЕРЕСѢКАЮЩІЯСЯ ПРЯМЫЯ ЛИНІИ**.

НУРБВОЛЕ CONVERGENTE. Сходящаяся нурбвола. Такъ называется нурбвола третьего порядка, коей две вѣтви, простираясь въ одну сторону, приближаются постепенно одна къ другой, и имѣютъ общую асимптоту, проходящую между ними.

CONVERGENTE (FRACTION). Смол. CONTINUE (FRACTION).

SÉRIE CONVERGENTE. Сходящийся, предѣльный рядъ. **SÉRIE DEMI-CONVERGENTE**, полусходящийся рядъ. Смол. CONVERGENCE.

CONVERGER. (Геом. и Анал.) **СХОДЯТЬСЯ, ПРИВЛІКАТЬСЯ, СТРЕМИТЬСЯ**. Deux droites qui convergent; deux s'approchantes l'une de l'autre. — Cette valeur converge vers la limite zéro; эта величина приближается, стремится къ предѣлу нулю.

CONVERSE (PROPOSITION), или, употребительнѣе, **PROPOSITION INVERSE**. **ОБРАТНОЕ ПРЕДЛОЖЕНІЕ**. Смол. INVERSE (PROPOSITION). En raison converse, par conversion de raison, или convertendo. См. COMPOSITION DE RAISON.

CONVERSION. (Ариф.) Par conversion de raison. Черезъ вычитаніе предыдущаго изъ послѣдующаго. Когда геометрическую пропорцію $a:b = c:d$ пишемъ въ видѣ $b:a = d:c$ или $a:c = b:d$, то говоримъ, что послѣднія пропорція выведены изъ первой чрезъ вычитаніе предыдущаго изъ послѣдующаго. Смол. COMPOSITION DE RAISON.

CONVERSION DES ÉQUATIONS. Не упот. (Алг.) Уничтоженіе знаменателей въ уравненіяхъ; освобожденіе уравненій отъ знаменателей. Напримѣръ, изъ уравненія $\frac{x^2}{a} - \frac{bx}{c} = \frac{e}{f}$ выводимъ, чрезъ уничтоженіе знаменателей, $bx^2 - 2abx = 3ac$. Преимущественно въ этомъ смыслѣ говорятъ: faire disparaître или éliminer les fractions.

CONVERSION. (Геом. Анал. и Астр.) **ПРЕВРАЩЕНІЕ, ОБРАЩЕНІЕ**. Conversion d'un carré en un

triangle. Превращеніе квадрата въ треугольникъ, то есть, составленіе треугольника, имѣющаго одинаковую площадь съ квадратомъ. Conversion d'une fraction ordinaire en fraction continue. Превращеніе обыкновенной дроби въ непрерывную. — Conversion des degrés en temps, et du temps en degrés. Превращеніе градусовъ во время, и времени въ градусы; conversion des mesures anciennes en mesures nouvelles; превращеніе старыхъ мѣръ въ новыя.

CONVERSION (CENTRE DE). (Мех.) **ЦЕНТРЪ ОБРАЩЕНІЯ**. Смол. CENTRE.

CONVERSIONS. Слово, бывшее въ употребленіи у прежнихъ астрономовъ, и подъ которымъ они разумѣли обращенія всѣхъ небесныхъ тѣлъ.

CONVERTIBLE. Formule facilement convertible en nombres; Формула, легко приводимая въ числа. Формула, удобная для численныхъ выкладокъ.

CONVERTIR. ПРЕВРАТИТЬ, ОБРАТИТЬ, ПРИВЕСТИ. Convertir une figure en une autre. Превратить одну фигуру въ другую. — Convertir une fraction ordinaire en fraction décimale, continue. Превратить обыкновенную дробь въ десятичную, въ непрерывную. — Convertir le temps en degrés. Превратить время въ градусы.

CONVEXE. (Геом.) **ВЫПУКЛЫЙ**. Говорится о вѣншей поверхности тѣла, или о вѣншей части кривой линіи, въ противоположность вогнутой, именуемой *вогнутую*. См. CONCAVE, CONCAVITÉ.

SURFACE CONVEXE D'UN CÔNE, D'UN CYLINDRE. Выпуклая поверхность конуса, цилиндра. Смол. CONE, CYLINDRE.

POLYGOUES CONVEXES. Выпуклые многоугольники, то есть такіе, у которыхъ всѣ углы исходящіе. Свойство выпуклаго многоугольника состоятъ въ томъ, что всякая прямая, проведенная въ его плоскости, можетъ встрѣпить его периметръ только въ двухъ точкахъ. — Вогнутымъ многоугольникомъ (polygone concave) можно назвать такую, у котораго одинъ или нѣсколько угловъ вогнуты. И такъ фигура $abcdefgh$ (черт. 11 Листъ V) изображаетъ вогнутый многоугольникъ съ двумя входящими углами d и f . Прямая KL , проведенная въ его плоскости, встрѣчаетъ периметръ этого многоугольника въ шести точкахъ i, j, k, l, m, n .

MIROIRS, VERRES CONVEXES. Выпуклая зеркала, стекла. Смол. **MIROIR, VERRE.**

CONVEXITÉ. (Геом.) **ВЫПУКЛОСТЬ.** Выпуклая сторона кривой поверхности или кривой линии. Смол. **CONCAVITÉ.**

COORDONNÉES. (Геом.) **КООРДИНАТЫ, СО-ПРИЛОЖЕННЫЯ.** Положение точки, принадлежащей поверхности или кривой линии обыкновенно определяется: для поверхностей и для кривых двойкой кривизны, разстояния той точки от трех неподвижных плоскостей, а для плоских кривых, от двух поспоянных перескающихся осей, в плоскости кривой проведенных. Эти разстояния называются *координатами* рассматриваемой точки.

Неподвижные плоскости, о которых мы сейчас упоминали, предполагаются перпендикулярными между собою; они называются *координатными плоскостями* (*plans coordonnés*), а прямые их пересечения — *координатными осями* (*axes des coordonnées*). Пусть будут $X'OX, Y'OY, Z'OZ$ (черт. 12 лист V) эти пересечения. Неопределенные прямые OX, OY, OZ , называемые *положительными*, а OX', OY', OZ' *отрицательными полу-осями* x -овъ, y -овъ, z -овъ; плоскости YOZ, ZOY и ZOX именуются соответственно *плоскостями* yz, zx и xy , а общее их пересечение, то есть точка O , *началом координат* (*origine des coordonnées*).

Если из рассматриваемой точки M опустимъ на плоскость xy перпендикуляр MN , а из основания N , на ось x -овъ перпендикуляр NP , то координаты точки M будутъ прямые $OP = x$, $PN = y$, $NM = z$. Линия x называется *абсциссою* (*abscisse*) точки M , а y и z ее *ординатами* (*ordonnées*), у обыкновенно горизонтальною, а z , *вертикальною*. Когда определяется положение точки на плоскости, то достаточно двухъ координатъ. И такъ, точка N на плоскости xy определяется абсциссою $OP = x$ и ординатою $PN = y$.

Разсмотрѣнная нами система координатъ называется *прямоугольною* (*coordonnées rectangles*). Когда неподвижныя плоскости перескаются не подъ прямыми углами, то координаты точки, соответственно параллельныя тремъ координатнымъ осямъ, принимаютъ названіе *косугольных* (*coordonnées obliques*).

Сверхъ системы прямоугольныхъ и косугольныхъ координатъ употребляются еще другія, и между прочими, довольно часто, *системы полярныхъ координатъ*. Смол. **POLAIRES (COORDONNÉES).** Описываетъ также читателю къ сматъ: **TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.**

COORDONNÉES VARIABLES или **COORDONNÉES COURANTES.** Переменныя, текуція, бѣгущія координаты. Такъ называются координаты кривой линии или поверхности, когда имъ не приписываютъ никакого численнаго значенія; и такъ, переменныя координаты принадлежатъ произвольной точкѣ кривой линии или поверхности.

COORDONNER, РАСПОЛОЖИТЬ. Привести въ известный порядокъ. En coordonnant l'expression $5a^2b^2 - 7a^2b + 9a^4 + 6b^4 - ab^3$ par rapport à la lettre a , on trouve $9a^4 - 7ba^2 + 5b^2a^2 - b^2a + 6b^4$; *расположилъ выраженіе* $5a^2b^2 - 7a^2b + 9a^4 + 6b^4 - ab^3$ *по степенямъ буквы* a , *найдѣмъ* $9a^4 - 7ba^2 + 5b^2a^2 - b^2a + 6b^4$.

COPERNIC (SYSTÈME DE). (Астр.) **КОПЕРНИКОВА СИСТЕМА.**

Истинная система міра, по которой земля и всѣ планеты съ спутниками своими обращаются около солнца въ порядкѣ, означенномъ на чертѣ 17 (Листъ V). Буква S изображаетъ солнце, знаки: \S, \P, \S, \S, \P, \S по порядку Меркурія, Венеры, Луны, Марса, Юпитера и Сатурна. Буква T означаетъ землю, а малыя круги около планетъ, пути ихъ спутниковъ. Послѣдній кругъ, опмѣченный звѣздочками, принадлежитъ неподвижнымъ звѣздамъ, имѣющимъ, по Копернику, только вращательное движеніе около своихъ осей, и находящихся на неизмѣрномъ разстояніи отъ нашей солнечной системы.

Знаменитый Коперникъ родился въ Горни, въ Королевской Пруссіи 19 Февраля 1473 года. Получивъ въ Краковѣ достоинство Доктора Медицины, онъ отправился въ Италію; тамъ изучилъ Астрономію подъ руководствомъ Доминика Марія Новарра въ Болоньи, и попомъ у Реіамон-тана (Іоанна Мюллера) въ Римѣ, гдѣ самъ, въ которое время, занималъ катедру Математики. Въ началѣ XVI вѣка Коперникъ возвратился въ свое отечество, гдѣ дядя его, Эпископъ Эрменскій, далъ ему мѣсто Каноника, которое привело его въ состояніе послать себя совершенно

любимому своему земляку — Астроному. Убѣжденный въ чрезвычайной запутанности и недоскональности Птолемеевой системы при объясненіи движеній планет посредствомъ эпицикловъ, также въ слабости доказательствъ, на которыхъ основывалась эта система, онъ искалъ у древнихъ болѣе основательныхъ мнѣній. Съ радостнымъ изумленіемъ Коперникъ нашелъ, что Пизагорейцы приписывали землѣ суточное вращеніе около своей оси, и годовое движеніе около солнца, и что образеніе Меркурія и Венеры около солнца принимали уже Египтяне. Пораженный простотою порядка и легкостью объясненій небесныхъ движеній, основанныхъ на этихъ мнѣніяхъ, онъ не усумнился въ правдоподобности своихъ смысловъ, но обосновалъ ихъ не прежде, какъ когда традиціонными наблюденіями убѣдился, что всѣ движенія, до малѣйшихъ ихъ обстоятельствъ, объясняются самымъ легкимъ и удовлетворительнымъ образомъ, допустивъ, что солнце находится въ центръ міра, и что около него обращаются одна за другою Меркурій, Венера, Земля, Марсъ, Юпитеръ и Сатурнъ. Луна обращается около земли, и увлекается вѣхнѣй съ нею въ годовое ея движеніе около солнца. Коперникъ принялъ также, что земля имѣетъ вращательное движеніе отъ запада къ востоку около своей оси; что ось ея всегда параллельна самой себѣ, и наклонена къ эклиптикѣ на 23½ градуса.

Знаменитое твореніе Коперника *De revolutionibus orbium coelestium*, въ которомъ изложена его система съ возможными подробностями, напечатана въ первый разъ въ Нюрнбергѣ въ 1543 г. Коперникъ, передъ самою кончиною, получилъ изъ Нюрнберга вѣстимляръ своего сочиненія. Онъ умеръ 24 Мая 1543 года.

КОПЕРНИКЪ, ПОСЛѢДОВАТЕЛЬ КОПЕРНИКА. Тотъ, кто послѣдуетъ ученію Коперника о солнечной системѣ. См. выше.

КОРДА или **SOUS-TENDANTE.** (Геом.) **ХОРДА, СТИГВАЮЩАЯ.** Прямая, соединяющая концы круговой дуги, или, вообще, какой ни есть кривой линіи.

Въ кругѣ (черт. 15 листъ V) хорда *AB* перпендикулярна къ линіи *CD*, проведенной изъ центра *C* къ серединѣ *D* дуги *AB*. Линія *ED* называется *стрѣлою* (*la flèche*) дуги *AB*. Эти два наименованія *хорда* (ж. е. тѣлѣва) и *стрѣла* приняты

древними геометрами по причинѣ сходства фигуры *ABDE* съ *лукомъ* (*arc*) и *стрѣлою* на *тетивѣ*.

Когда радиусъ *CD* принимается за единицу, то стрѣлку *ED*, въ Тригонометріи, называютъ *обращеннымъ синусомъ* (*sinus verse*).

Для дальнѣйшихъ подробностей о хордахъ, См. ANGULAIRES (SECTIONS), TRIGONOMETRIE.

LIGNE DES CORDES. Линія, масштабъ хордъ. Одна изъ линій, начертанныхъ на геометрической шкалѣ. См. COMPAS DE PROPORTION.

CORDES SUPPLÉMENTAIRES. Дополнительныя хорды. Когда изъ концовъ діаметра кривой линіи проведемъ прямыхъ къ какой ни есть точкѣ кривой, то одна изъ этихъ двухъ прямыхъ называется *дополнительною хордою* другой. И такъ, въ эллипсѣ *ABDE* (черт. 14 листъ V), прямая *KM* и *LM*, проведенныя черезъ концы *K* и *L* діаметра *KL* къ точкѣ *M*, будутъ *дополнительными хордами* одна въ отношеніи къ другой.

Пусть будетъ *a* большая полу-ось *OE*, а *b* малая полу-ось *OD* эллипса; $x = OP$, $y = PM$ координаты точки *M*. Уравненіе эллипса (См. ELLIPSE), отнесеннаго къ центру, будетъ $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Очевидно, что если изобразимъ черезъ x' и y' координаты *Ol* и *lL* точки *L*, то для точки *K* будетъ $Ok = -x'$; $kK = -y'$. Означимъ черезъ α и β углы *MOX* и *MXL*, составляемые дополнительными хордами *MK* и *ML* съ положительною осью *OX*; такъ какъ прямая *MK* проходитъ черезъ точку *M*, то изобразимъ черезъ *X* и *Y* перпендикулярныя ея координаты, получимъ

$$Y - y = \tan \alpha (X - x);$$

но эта прямая проходитъ также и черезъ точку *K*, коей координаты суть $-x'$ и $-y'$; слѣдовательно

$$-y' - y = -\tan \alpha (x' + x) \text{ откуда } \tan \alpha = \frac{y + y'}{x + x'}.$$

Точно такимъ образомъ найдемъ

$$\tan \beta = \frac{y - y'}{x - x'};$$

перемноживъ между собою величины для $\tan \alpha$ и $\tan \beta$, получимъ равенство

$$\tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{y^2 - y'^2}{x^2 - x'^2},$$

которое, въ слѣдствіе уравненій

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \text{ и } y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2),$$

примеры вида

$$\log \alpha \cdot \log \beta = -\frac{b^2}{a^2}.$$

И такъ, произведение тангенсовъ угловъ, составленныхъ дополнительными хордами съ большою осью эллипса, зависить только отъ отношенія осей сего послѣдняго. Когда положимъ $b = a$, то получимъ кругъ, для котораго $\log \alpha \cdot \log \beta = -1$, а это уравненіе показываетъ, что уголъ при окружности, опирающійся на діаметръ, есть прямой.

Легко также доказать, что два діаметра эллипса, соотвѣстственно параллельныя двумъ дополнительнымъ хордамъ, будутъ между собою сопряженными (См. DIAMÈTRES CONJUGUÉS), а также и на оборотъ: два какіе ни есть сопряженные діаметра соотвѣстственно параллельны двумъ дополнительнымъ хордамъ.

Дополнительныя хорды доставляютъ весьма простое средство для проведенія касательныхъ. Положимъ, что дана на эллипсѣ точка M (черт. 15 листъ V). Проводимъ діаметръ MN , и чрезъ точку A большой оси прямую Am , параллельную этому діаметру; потомъ соединимъ m съ B . Линія TmT' , параллельная хордѣ mB , будетъ касательною къ эллипсу въ точкѣ M . Если бы требовалось провести касательную параллельно данной прямой QR (черт. 15), то слѣдовало бы изъ точки B провести хорду Bm параллельно этой прямой QR ; потомъ соединивъ точку m съ A , и чрезъ центръ O эллипса провести діаметръ MN , параллельный линіи mA . Точки M и N будутъ точками касанія на эллипсѣ.

Если, подобно предыдущему, рассмотримъ дополнительные хорды BM и MA (черт. 16 листъ V) въ гиперболѣ, то увидимъ, что означить чрезъ α и β углы MBX и MAX , а чрезъ a и b полу-оси этой кривой, получится уравненіе $\log \alpha \cdot \log \beta = -\frac{b^2}{a^2}$.

Основываясь на этомъ отношеніи, легко будетъ къ данной точкѣ гиперболы провести касательную. Пустьъ будетъ t данная точка; проводимъ чрезъ t и центръ O діаметръ tn ; потомъ, изъ B явлю Bm , параллельную діаметру tn , и соединимъ точку m съ A . Линія TmT' , параллельная дополнительной хордѣ mA , будетъ иско-

мымъ касательная.

Предложенное здѣсь построеніе касательныхъ посредствомъ дополнительныхъ хордъ очень легко

доказывалась на томъ основаніи, что тангенсовъ угла, составленнаго касательною съ осью x есть $\log \alpha$, а для гиперболы $-\frac{b^2}{a^2}$; а для гиперболы $-\frac{b^2}{a^2}$, гдѣ x и y изображаютъ координаты точки касанія.

CORDE. (Mex.) **SEPERERA.** Résistance des cordes, co-
proportionnée aux cordes; raideur des cordes, raideurs
des cordes; tension d'une corde, натяженіе веревки.
Смолт. TENSION, FUNICULAIRE (POLYGOUE).

CORDEAU или **CORDON.** НИТЬ. Малого діаме-
тра веревка.

CORDES (VIBRATION DES). (Mex.) **СОТРАСЯЕНІЕ**
СТРУНЫ. Математическое опредѣленіе законовъ
колебаній натянутой струны было предметомъ
ислѣдованій первоначальныхъ математиковъ про-
медшаго столѣтія, и на одинъ вопросъ, болѣе
этого, не способствовалъ къ объясненію теоріи
частотныхъ дифференціальнхъ уравненій. Мы по-
спрашиваемъ въ этой страницѣ изложить рѣшеніе
задачи о сотрашеніи струны въ самомъ простомъ
ея видѣ.

Положимъ, что однородная струна, прикре-
пленная однимъ концомъ въ точкѣ O (черт. 18,
Листъ V), проходитъ чрезъ жолобъ блока A , и
напятивается грузомъ Q ; въ этомъ состояніи,
утвердимъ точку A ; очевидно, что точка OA бу-
детъ находиться въ равновѣсіи, и что напряже-
ніе струны во всѣхъ ея точкахъ, будетъ рав-
нымъ Q . Для болѣе ясности, означимъ ко-
мечъ AQ струны; тогда получимся только часть
 OA (черт. 19). Вообразимъ теперь, что какою
либо средствомъ (напримѣръ, помощью цилиндра,
подкладываемого подъ струну, и поднимаемаго по-
томъ съ нѣкоторымъ усиленіемъ), отведемъ струну
весьма мало отъ равновѣснаго ея положенія OA .
Пусть OMA будетъ новое равновѣсное положеніе
струны, которое она приметъ, влѣ отъ того,
что поддерживается цилиндромъ, или отъ дѣй-
ствія на нее какихъ либо другихъ силъ. Поло-
жимъ теперь, что вдругъ прекращающіе дѣйствіе
этихъ силъ, или внезапно отнимающіе изъ нодъ
струны цилиндрическую поверхность; струна
придетъ въ сотрашеніе, и опредѣленіе обстоя-
тельствъ этого движенія составляетъ задачу о
сотрашеніи струны (problème des cordes vibrantes).

Приступимъ теперь къ разсужденію дифферен-
ціальнаго уравненія движенія струны. Пустьъ
будетъ OmA (черт. 19) ея положеніе по истеченіи

времени t , считаемого отъ того мгновенія, когда она начала двигаться, то есть, когда оппала изъ подъ нея цилиндрическую поверхность. Разсмотримъ движеніе элемента струны mm' , соответствующаго прямоугольнымъ координатамъ $OP = x$ и $Pm = y$. Мы предположимъ, какъ уже выше о томъ упоминали, что струна смещена весьма мало отъ естественнаго ея положенія OA , въ слѣдствіе чего будемъ опкидывать степени уменьшенія Pm , превышающія первую. Очевидно, что въ этомъ предположеніи, точка струны, находившаяся первоначально въ M , будетъ двигаться по дугѣ ординаты MP , и, по истеченіи времени t , придетъ въ положеніе m . Изобразимъ чрезъ p напряженіе струны въ точкѣ m ; величина p будетъ почти постоянная; такъ какъ p весьма мало разнится отъ вѣса Q , но и можно положить $p = Q + z$, развѣтъ подъ z весьма малое количество первого порядка. И такъ, элементъ mm' будетъ побуждаемъ по направленію касательной mT силою p , а по направленію mP , силою $-P \frac{dy}{ds}$, развѣтъ подъ s дугу Om . Напряженіе струны въ точкѣ m' на частяхъ $m'A$, параллельно оси OY , выразится чрезъ $-P \frac{dy}{ds} - d\left(p \frac{dy}{ds}\right)$; слѣдовательно, элементъ mm' , въ точкѣ m' , въ силовую $m'm$ и параллельно оси OY , будетъ испытывать силу $p \frac{dy}{ds} + d\left(p \frac{dy}{ds}\right)$. И такъ, равнодѣйствующая сила на элементъ mm' изобразится просто чрезъ $d\left(p \frac{dy}{ds}\right)$. Но, съ другой стороны, если означить чрезъ ρ массу единичной длины струны, то движущая сила, параллельная оси OY , будетъ $\rho ds \frac{d^2y}{dt^2}$; слѣдовательно

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\left(p \frac{dy}{ds}\right)}{ds}.$$

Вотъ дифференціальное уравненіе движенія струны, въ которомъ еще должно опкинуть величины второго и высшихъ порядковъ. Что касается до силъ параллельныхъ оси OX , то легко доказать, что опкидывая количества второго и высшихъ порядковъ, получимъ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

и дѣйствительно, почти такимъ образомъ, какъ было выведено уравненіе (1), найдемъ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\left(p \frac{dx}{ds}\right)}{ds};$$

но разность между уменьшеніемъ дуги $mm' = ds$ и элементомъ абсциссы $PP' = dx$ есть бесконечно малая величина второго порядка, або

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = dx + \frac{1}{2} dx \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \dots;$$

слѣдовательно должно принять $ds = dx$, и предыдущее уравненіе обратится въ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dx} = 0,$$

потому что напряженіе, какъ мы замѣтили выше, почти постоянно. Въ слѣдствіе этого замѣчанія, уравненіе (1) приметъ видъ

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{p}{\rho} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Но $p = Q + z$, гдѣ z весьма малая величина первого порядка; слѣдовательно, можно поспавить Q вмѣсто p въ последнее уравненіе. Полагая для краткости $\frac{Q}{\rho} = a^2$, получимъ

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Кромѣ этого уравненія имѣемъ еще четыре другія, необходимыя для полнаго рѣшенія занимающей насъ задачи, и которыя выводятся изъ соображеній, не относящихся уже къ Механикѣ. Во первыхъ ясно, что когда положимъ $t = 0$, то должны получить $y = PM$, а PM изображаетъ линію, данную въ функціи $OP = x$. Пусть будетъ $f(x)$ эта функція, весьма малая, но впрочемъ совершенно произвольная. Съ другой стороны, такъ какъ $\frac{dy}{dt}$ изображаетъ скорость элемента mm' по оси y -овъ, то при $t = 0$, эта скорость должна также обратиться въ нуль. И такъ, $\frac{dy}{dt} = 0$ при $t = 0$. Далеѣ, очевидно, что при какомъ нѣ есть времени t , должно быть $y = 0$ для $x = 0$ и для $x = l$, развѣтъ подъ l длину OA струны. И такъ, получаемъ слѣдующія пять уравненій, которыми должно удовлетворить въ совокупности.

$$(2) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = a^2 \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$(3) \quad \left. \begin{array}{l} y = f(x) \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{array} \right\} \text{ когда } t = 0$$

$$(4) \quad \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{array} \right\} \text{ когда } x = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{array} \right\} \text{ когда } x = l.$$

Мы начнемъ съ интегрированія уравн. (2); для этого положимъ $x + at = u$, $x - at = v$, и перемѣнимъ дифференціалы, относящіеся къ x и t въ

другие, относящиеся к переменным u и v , такими образом получим:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dt} + \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dt} = a \left(\frac{dy}{du} - \frac{dy}{dv} \right) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dx} = \frac{dy}{du} + \frac{dy}{dv} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= a \left(\frac{d^2y}{du^2} - \frac{d^2y}{dv^2} \right) \frac{du}{dt} + a \left(\frac{d^2y}{du dv} - \frac{d^2y}{dv du} \right) \frac{dv}{dt} \\ &= a^2 \left(\frac{d^2y}{du^2} + \frac{d^2y}{dv^2} - 2 \frac{d^2y}{du dv} \right) \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \left(\frac{d^2y}{du^2} + \frac{d^2y}{dv^2} \right) \frac{du}{dx} + \left(\frac{d^2y}{du dv} + \frac{d^2y}{dv du} \right) \frac{dv}{dx} \\ &= \frac{d^2y}{du^2} + \frac{d^2y}{dv^2} + 2 \frac{d^2y}{du dv}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравн. (2), найдем $4a^2 \frac{d^2y}{du dv} = 0$, или

$$\frac{d^2y}{du dv} = 0,$$

а интеграл этого уравнения будет $y = \varphi(u) + \psi(v)$, разумея под φ и ψ произвольные функции; подставляя на место u и v их величины, получим

$$(5) \quad y = \varphi(x+at) + \psi(x-at).$$

Что касается до вида произвольных функций φ и ψ , то они должны быть определены посредством уравнений (3) и (4).

Полагая в уравн. (5) $t = 0$, найдем

$$(6) \quad f(x) = \varphi(x) + \psi(x);$$

дифференцируя то же уравн. (5) относительно времени t , и сделав попом $t = 0$, получим

$$0 = \varphi'(x) - \psi'(x),$$

откуда, чрез интегрирование,

$$\varphi(x) - \psi(x) = C,$$

разумея под C постоянную величину. Сопоставление последнего уравнения с (6) даст

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} [f(x) + C]$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} [f(x) - C],$$

и следовательно

$$\varphi(x+at) = \frac{1}{2} [f(x+at) + C]$$

$$\psi(x-at) = \frac{1}{2} [f(x-at) - C],$$

откуда, в силу уравн. (5), получим

$$(7) \quad y = \frac{1}{2} [f(x+at) + f(x-at)].$$

Положим теперь в этой формуле $x = 0$ и $x = l$; в последние уравнения (4), для какого ни есть времени t , будем

$$0 = f(at) + f(-at)$$

$$0 = f(l+at) + f(l-at).$$

Если заменить буквою x произведение at , то очевидно x будет количество положительное,

и последние две формулы примут вид

$$0 = f(x) + f(-x)$$

$$0 = f(l+x) + f(l-x).$$

Первое из сих двух уравнений доставляет величину функции $f(-x)$ посредством $f(x)$; следовательно, достаточно знать величины функции $f(x)$ для положительных значений переменной x . Из второго уравнения, доставляющего $f(l+x) = -f(l-x)$, выводим непосредственно величину функции f от $x = l$ до $x = 2l$, переимав в предыдущем уравнении x в $l+x$, найдем $f(2l+x) = -f(-x) = f(x)$, а это уравнение уже доставит величину функции f для всех положительных значений переменной x .

Приведем это решение к геометрическому построению. Пусть будет OMA (черт. 20 лист V) данный вид струны в начале движения. Кривая OMA доставляет величину функции $f(x)$ от $x = 0$ до $x = l$, а уравнение

$$f(l+x) = -f(l-x)$$

показывает, что $f(x)$, от $x = l$ до $x = 2l$, изображена кривою $AM'A'$, одинаковою с OMA , но имеющею обратное положение, так что ординаты PM и $P'M'$, равно-удаленны от точки A , равны между собою, но направлены в противоположные стороны. И так, мы теперь в состоянии построить функцию $f(x)$ от $x = 0$ до $x = 2l$. Далее, уравнение

$$f(2l+x) = f(x)$$

показывает, что функция f , от $x = 2l$, то есть от точки A' , выражается кривою, изображенною на чертеже, где части $AM'A'$, $M''M''A''$ и проч. совершенно одинаковы с частью OMA , а части $A'M''M''A''$, $A''M''A''$ и проч. с $AM'A'$. Таким образом величина функции $f(x)$, для всех положительных значений переменной x , будет известна, а уравнение $f(-x) = -f(x)$ доставляет непосредственно ее величину для отрицательных значений x . Кривая ONB выводится из кривой OMA , ибо ординаты QN и PM , равно удаленны от точки O , равны между собою и противоположны. Часть $BN'B'$ кривой выводится точно таким образом из части $AM'A'$, и так далее.

Легко привести это построение к простому механическому действию. Берем кривую OMA , и накладываем ее, от O к X , точно так, как если бы мы взяли длину посредством какой

либо линейной единицы, то есть, принимаем точку A за неподвижную, и переносим O до совпадения съ A' ; потомъ оборачиваемъ кривую ASA' , и получаемъ часть $AM'A'$; продолжаемъ точно такимъ образомъ, какъ будто имѣемъ цѣлю измѣривъ линію OX , и не забывая при этомъ, что при каждомъ прѣисъ должно оборачивать фигуру. Для отрицательныхъ x -овъ производимъ совершенно тѣ же дѣйствія, но только въ противоположную сторону, то есть, отъ O къ X' . Это построение предложено Эйлеромъ; оно доставляетъ величину ординаты y , соотвѣствующую какой ни есть абсциссѣ x и какому ни есть времени t .

Положимъ, напримѣръ, что $t=1$, $a=1$, и опредѣлимъ величину y посредствомъ формулы

$$y = \frac{1}{2} [f(x+a) + f(x-a)]$$

$$\text{для } x = \frac{1}{2} \text{ и } t = 10. \text{ Получимъ}$$

$$y = \frac{1}{2} [f(10\frac{1}{2}) + f(-9\frac{1}{2})] = \frac{1}{2} [f(10\frac{1}{2}) - f(9\frac{1}{2})]$$

$$= \frac{1}{2} [f(\frac{1}{2}) - f(1\frac{1}{2})];$$

но, по прѣисъ

$$f(1+x) = -f(1-x),$$

$$\text{имѣемъ}$$

$$f(1\frac{1}{2}) = -f(\frac{1}{2}),$$

и следовательно

$$y = f(\frac{1}{2}).$$

Теперь легко будетъ вывести время колебанія струны, то есть промежутокъ времени, въ продолженіи котораго струна, изъ первоначальнаго своего положенія OMA , переходитъ въ обратное ANO (черт. 19). Если въ уравненіи (7) примемъ $t = \frac{k^2}{a}$, разумѣя подъ k какое ни есть цѣлое положительное число, то получимъ

$$y = \frac{1}{2} [f(x+kt) + f(x-kt)];$$

но, въ слѣдствіе выведенныхъ выше уравненій $f(x)+f(-x)=0$, $f(l+x)+f(l-x)=0$, имѣемъ

$$f(x+l) = f(x+l) \quad f(x-l) = f(x+l)$$

$$f(x+2l) = f(x) \quad f(x-2l) = f(x)$$

$$f(x+3l) = f(x+l) \quad f(x-3l) = f(x+l)$$

$$f(x+4l) = f(x) \quad f(x-4l) = f(x)$$

$$\dots\dots\dots$$

Слѣдовательно, для k вѣснаго получимъ $y = f(x)$, а для k неѣснаго, $y = f(x+l) = -f(l-x)$. Изъ этого должно заключить, что кривая принимаетъ начальную свою фигуру для k вѣснаго, а обратную, для k неѣснаго. Время, въ которое совершается этотъ переходъ, то есть время колебанія, определяется очевидно отношеніемъ $\frac{l}{a}$. И такъ, во истеченіи промежуточкѣ времени,

равныхъ $2\frac{l}{a}$, струна будетъ принимать прежнія положенія. Несмотря на это, не должно заключить, чтобы во всѣхъ случаяхъ струна, въ продолженіе времени $2\frac{l}{a}$, совершала только два колебанія. Если кривая OMA (черт. 19) имѣетъ только одну изгибъ, то дѣйствительно время колебанія будетъ $\frac{l}{a}$; но если бы струна, въ начальномъ состояніи, имѣла нѣсколько изгибовъ, напримѣръ два равныхъ OMA и $AM'A'$ (черт. 20), то она совершила бы 4 колебанія въ промежутокъ времени $2\frac{l}{a}$. Вообще, при большемъ числѣ изгибовъ разныхъ, число качаній изобразится удвоеннымъ числомъ изгибовъ, и слѣдовательно будетъ всегда чѣтнымъ.

Положимъ, что струна имѣетъ только одинъ изгибъ OMA между неподвижными точками O и A (черт. 19). Время колебанія, которое изобразитъ чрезъ T , будетъ $\frac{l}{a}$; но такъ какъ $a = \sqrt{\frac{Q}{\rho}}$ (См. выше), то и получимъ $T = \sqrt{\frac{\rho l^2}{Q}}$. Чтобы получить число колебаній струны въ одну секунду времени, спомниъ только сослаться пропорцію $T:1 = t'':\frac{1}{T}$; и такъ $\sqrt{\frac{Q}{\rho l^2}} = \frac{1}{T} \sqrt{\frac{Q}{\rho}}$ изобразитъ нѣкое число колебаній, которое принимается за мѣру напряженія звука. Слѣдовательно, при равномъ напряженіи и толщинѣ, звукъ, издаваемый струною, обратно пропорционаленъ ея длине.

Нѣкоторые геометры, и въ особенности д'Аламбертъ, оспаривали справедливость, или по крайней мѣрѣ всеобщность строенія, предложеннаго Эйлеромъ. Д'Аламбертъ утверждалъ, что это строеніе справедливо только въ томъ случаѣ, когда функція $f(x)$ такого свойства, что, для всякаго x , она получаетъ величину, одинаковую съ тою, которую представляетъ предыдущее строеніе. Это возраженіе до такой степени противорѣчитъ настоящимъ понятіямъ математиковъ объ этихъ предметахъ, что трудно понять, какъ оно могло представиться уму, одаренному безспорно великими способностями. Мы считаемъ даже излишнимъ объяснять, въ чемъ собственно состоитъ возраженіе д'Аламберта. Функція $f(x)$ изображаетъ нѣкоторый рядъ дѣйствій, который должно произвести надъ переменною x ; эти дѣйствія могутъ быть различны

для различных значений x ; при таком общем определении функции $f(x)$, возражение Д'Аламберта становится вовсе исполнимым. И действительно, Д'Аламберт исключал этот случай; он предполагал, что функция $f(x)$ получается посредством одних и тех же действий при $x=0$ до $x=1$; в противном случае, по его утверждению, строение Эйлера было ошибочно. Но даже, предполагая, что $f(x)$ изображает функцию, получающую посредством одного и того же ряда действий, Д'Аламберт утверждал, что строение, о котором говорится, справедливо только в тех случаях, когда, провозводя над величинами x , превосходящими 1 или отрицающимися, мы же действия, какие совершаем над положительными значениями x , неперезышающими 1, получаем одни результаты с теми, которые доставляет Эйлерово строение.

Мы не можем привести здесь доводов, которыми каждый из двух знаменитых геометров защищал свое мнение; мы только отсылаем читателей к *Запискам Берлинской и Петербургской Академий*, а также к сочинению *Opusculs mathématiques de d'Alembert*. Скажем только, что возражение Д'Аламберта признаю ныне совершенно неосновательным.

Сверх упомянутого сей-час спора между Эйлером и Д'Аламбертом, первый из сих геометров имел, по моему же преданию, учёный спор с *Даниэлем Бернулли*. Знаменитость наша побуждала нас войти в подробности спорной статьи. Для этого мы должны возвратиться к уравнениям (2), (3) и (4), и интегрировать их посредством способа, описанного выше, который был изложен выше. Прежде всего, постараемся удовлетворить уравнениям (2) и (4) посредством частных решений. На сей конец положим

$$y = T \sin \theta x + U \cos \theta x,$$

разумя под T и U некоторые неизвестные функции переменной t , а под θ величину постоянную. Так как для $x=0$ должно быть $y=0$, то отсюда заключаем, что $U=0$. И так

$$y = T \sin \theta x.$$

Положим $x=1$, должны также получить $y=0$, то есть, $T \sin \theta = 0$; но так как нельзя положить $T=0$, ибо отсюда вывели бы $y=0$ для всякого x , то и следовать должно

$$(8) \quad \sin \theta t = 0.$$

Подставим теперь в урав. (2) предыдущую величину y ; получим

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \theta^2 T = 0,$$

откуда, чрез интегрирование,

$$T = A \cos \theta t + B \sin \theta t,$$

где A и B изображают постоянные величины. Следовательно

$$y = (A \cos \theta t + B \sin \theta t) \sin \theta x.$$

Но урав. (8) доставляет бесчисленное множество различных значений для θ , именно: $\theta = 0, \frac{\pi}{t}, \frac{2\pi}{t}, \frac{3\pi}{t}, \dots, \frac{n\pi}{t}, \dots$ и вообще $\theta = \frac{n\pi}{t}$, где n изображает число или, положительное или отрицательное, включая сюда и нуль. Каждая величина θ определяет величину для y , и, по причине линейного вида уравнения в y -ах, можно будет взять для сего последнего сумму всех частных его решений. И так

$$y = \sum \left(A_n \cos \frac{n\pi t}{t} + B_n \sin \frac{n\pi t}{t} \right) \sin \frac{n\pi x}{t},$$

где знак \sum относится ко всем значениям числа n , положительным и отрицательным. Значение $n=0$ может быть исключено, потому что частная величина для y , соответствующая этому предположению, сама обращается в нуль. Предыдущая формула очевидно может быть также написана в виде

$$y = \sum \left[(A_n - A_{-n}) \cos \frac{n\pi t}{t} + (B_n + B_{-n}) \sin \frac{n\pi t}{t} \right] \sin \frac{n\pi x}{t},$$

или, заменив разность $A_n - A_{-n}$ величиною A_n , а сумму $B_n + B_{-n}$ величиною B_n ,

$$y = \sum \left(A_n \cos \frac{n\pi t}{t} + B_n \sin \frac{n\pi t}{t} \right) \sin \frac{n\pi x}{t}.$$

Вот примерные задачи о сотрясеніи струны, которое Даниэль Бернулли выдал за общее. Но так как оказывалось еще неудовлетворить уравнениям (5), то Эйлер и утверждал, что это невозможно, между тем как Даниэль Бернулли защищал противоположное, основывая свое утверждение на том, что в величину y входит бесчисленное множество произвольных констант. Спор между знаменитыми противниками остался нерешенным, ибо ни тот ни другой не предложил строгого доказательства в защиту своего мнения.

Мы не должны умолчать объ одномъ возраженіи Эйлеръ, которое, по его мнѣнію, рѣшительно опровергаетъ теорію Данила Бернулли. Эйлеру казалось очевиднымъ, что невозможно удовлетворишь уравненію

$$f(x) = \sum_1^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{l},$$

когда функція $f(x)$ имѣетъ дѣйствительныя величины только для некоторой части x -овъ, заключающихся между предѣлами 0 и l , какъ напримеръ, если бы функція $f(x)$ допускала извѣстные значенія между 0 и $\frac{1}{2}l$, а отъ $\frac{1}{2}l$ до l постоянно равнялась нулю. Понимая, почему Эйлеръ исключалъ этотъ случай скорѣе нежели другіе; но еще удивительнѣе, что послѣ того какъ Лагранжъ разъяснилъ этотъ въ возраженіи, сдѣлалъ принявъ теорію Данила Бернулли, напикъ математики, возобновилъ ихъ. Нынѣ въ недоразумѣніи по сему предмету уничтожены. Лагранжъ и Фурье доказали, что во всѣхъ случаяхъ можно удовлетворить уравненіямъ (5), которыми, по подстановленіи въ нихъ величины y , придется взять

$$f(x) = \sum_1^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$0 = \sum_1^{\infty} n B_n \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Впрочемъ, очевидно, что сполнить только удовлетворить первому изъ сихъ уравненій, ибо второе есть частный случай перваго; чтобы удовлетворить упомянутому уравненію, надлежитъ взять

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Если вѣрно функція $f(x)$ поставимъ 0, то получимъ $n B_n = 0$, откуда $B_n = 0$; следовательно

$$y = \sum_1^{\infty} A_n \cos \frac{\pi n t}{l} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Если случится, что функція $f(x)$ имѣетъ дѣйствительныя величины только между некоторыми предѣлами, напримеръ, отъ $x = 0$ до $x = \frac{1}{2}l$, то въ такомъ случаѣ надобно будетъ положить

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^{\frac{1}{2}l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Чтобы освободить анализъ Данила Бернулли отъ главнаго, имъ, лучше, отъ единственнаго возраженія Эйлеръ, достаточно показать справедливость уравненія

$$f(x) = \sum_1^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{l},$$

а эта формула доказана строгимъ образомъ въ статьѣ: CONVERGENCE D'UNE SÉRIE.

Въ заключеніе покажемъ, что рѣшеніе Данила Бернулли совершенно согласуется съ рѣшеніемъ, предложеннымъ Эйлеромъ. Возьмемъ два уравненія

$$f(x) = \sum_1^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$y = \sum_1^{\infty} A_n \cos \frac{\pi n t}{l} \sin \frac{\pi n x}{l};$$

послѣднее, по причинѣ

$$\cos \frac{\pi n t}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} = \frac{1}{2} [\sin \pi n (x+at) + \sin \pi n (x-at)]$$

примемъ видъ

$$y = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} A_n \sin \pi n (x+at) + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} A_n \sin \pi n (x-at).$$

Если теперь въ первомъ изъ двухъ разсматриваемыхъ уравненій замѣнимъ x сперва суммой $x+at$, а потомъ разностью $x-at$, то получимъ

$$f(x+at) = \sum_1^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n (x+at)}{l}$$

$$f(x-at) = \sum_1^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n (x-at)}{l},$$

и следовательно

$$y = \frac{1}{2} [f(x+at) + f(x-at)],$$

а это уравненіе не различно отъ уравн. (7).

Сверхъ того очевидно, что

$$f(-x) = - \sum_1^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{l} = -f(x),$$

почему $f(x) + f(-x) = 0$, откуда заключаемъ

$$f(l+x) + f(l-x) =$$

$$\sum_1^{\infty} A_n \left[\sin \frac{\pi n (l+x)}{l} + \sin \frac{\pi n (l-x)}{l} \right] = 0,$$

что также сообразно съ результатомъ, полученнымъ Эйлеромъ.

Читатели, желающіе ближе ознакомиться съ мнѣніемъ Эйлеръ, д'Аламбера, Кондорсеа, Лагранжа и Лапласа по предмету, изложенному въ этой статьѣ, могутъ обратиться къ Разсужденію Арбогаста, изданному въ 1790 году С. Петербургскою Академіею Наукъ. Это Разсужденіе издано подъ заглавіемъ: *Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles.* St.-Petersbourg, 1791.

CORNET ACOUSTIQUE. (Акуст.) **АКУСТИЧЕСКИЙ, СЛУХОВОЙ РОЖОКЪ.** Инструментъ, употребленный глухими. Онъ состоитъ изъ медной трубки съ широкимъ отверстиемъ, которому даютъ обыкновенно видъ параболический, чтобы звукъ, отражаясь въ одну точку, имевшую *фокусомъ*, производилъ сильнѣйшее впечатлѣніе на органъ слуха. См. **PORTE-VOIX.**

CORNU (ANGLE). Не упот. **ДУГОВОЙ УГОЛЬ.**

Такъ называли прежде некоторые геометры уголъ, составленный прямою линією, касательною или секущею, съ окружностію круга. См. **CONTINGENCE (ANGLE DE).**

COROLLAIRE или CONSÉQUENCE. (Мат.) **СЛѢДСТВІЕ.** Заключение, выводимое изъ одного или нѣсколькихъ предположеній, доказанныхъ, или только допускаемыхъ. Такъ напримѣръ, изъ предположенія: „*площадь параллелограмма равняется произведенію основанія его на высоту*“ — выводимъ слѣдующее: *площади параллелограммовъ, имеющихъ равныя основанія, относятся между собою какъ ихъ высоты.*

CORPS или SOLIDE. (Геом.) **ТѢЛО** (геометрическое). См. **SOLIDE, POLYÈDRE.**

CORPS ROUNDS. КРУГОВЫЯ, КРУГЛЫЯ ТѢЛА. Такъ называются въ начальной Геометріи три тѣла: *цилиндръ, конусъ и шаръ.* См. **CYLINDRE, CONE, SPHÈRE.**

CORPS D'ARCHIMÈDE или POLYÈDRES SEMI-RÉGULIERS. (Геом.) **ТѢЛА АРХИМЕДОВЫ или ПОЛУ-ПРАВИЛЬНЫЯ МНОГОГРАННИКИ.** Такъ называются многогранники, концы грани суть обыкновенные правильные многоугольники (равносторонній треугольникъ, квадратъ и правильный пятиугольникъ), но не всѣ одного рода, какъ въ известнѣхъ правильныхъ многогранникахъ. Совокупленіе равностороннихъ треугольниковъ, квадратовъ и пятиугольниковъ, приводить къ *тринадцати полу-правильнымъ многогранникамъ*, которые могутъ быть вписаны въ шаръ и описаны около него. Разсматриваніе этого рода тѣлъ полезно въ Кристаллографіи; они описаны Г. *Лидономъ* (*Lidonne*) въ концѣ его книги *Tables de tous les diviseurs des nombres* и проч. изданной въ 1808 году.

CORPS (PROBLÈME DES TROIS). (Мех.) **ЗАДАЧА**

О ДВІЖЕНІИ ТРѢХЪ ТѢЛЪ. Такъ называется задача, состоящая въ опредѣленіи обходительствъ движенія трехъ тѣлъ, принимаемыхъ за материальныхъ точекъ, подверженныхъ взаимному притяженію по Ньютонову закону. См. **ATTRACTION NEWTONIENNE.** Легко вывести дифференціальныя уравненія этого движенія; но интегрированіе сихъ уравненій представляется такія затрудненія, что до сихъ поръ успѣли первостепенныхъ геометровъ задача рѣшена только по приближенію, и то въ частныхъ случаяхъ, нѣдѣ которыхъ, къ частію, подходятъ движеніе небесныхъ тѣлъ.

Приведемъ здѣсь дифференціальныя уравненія задачи о трехъ тѣлахъ. Пусть будутъ M, m и m' массы разсматриваемыхъ тѣлъ, я, для утвержденія положій, положимъ, что M изображаетъ массу солнца, а m и m' массы двухъ планетъ. Означимъ чрезъ k притяженіе двухъ единичныхъ массъ на единичномъ разстояніи; чрезъ r, r' разстоянія: отъ солнца до планеты m и отъ солнца до планеты m' , и наконецъ чрезъ ρ взаимное разстояніе двухъ планетъ. Притягательныя силы, побуждающія солнце, будутъ $\frac{kMm}{r^2}$, $\frac{kMm'}{r'^2}$; а $\frac{kmm'}{\rho^2}$ — изображатъ силы, дѣйствующія на планету m , а $\frac{kMm'}{r'^2}$ и $\frac{kmm'}{\rho^2}$ — на планету m' . И такъ, если назовемъ X, Y, Z прямоугольныя координаты солнца относительно какой нибудь неподвижной точки въ пространствѣ, $X+x, Y+y, Z+z$ координаты планеты m , а $X+x', Y+y', Z+z'$ координаты планеты m' относительно тѣхъ же осей, то, изобразивъ чрезъ t время, получимъ по известнымъ правиламъ Динамики [См. **CURVILINE (MOUVEMENT)**] слѣдующія девять уравненій:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} &= -\frac{kMm}{r^2} - \frac{kMm'}{r'^2} \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} &= -\frac{kMy}{r^2} - \frac{kMy'}{r'^2} \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} &= -\frac{kMz}{r^2} - \frac{kMz'}{r'^2} \\ \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d^2 x'}{dt^2} &= -\frac{kMm}{r^3} + \frac{kM'(m'-m)}{\rho^3} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{d^2 y'}{dt^2} &= -\frac{kMy}{r^3} + \frac{kM'(y'-y)}{\rho^3} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{d^2 z'}{dt^2} &= -\frac{kMz}{r^3} + \frac{kM'(z'-z)}{\rho^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{d^2 x'}{dt'^2} &= -\frac{kMx'}{r'^3} - \frac{km(x'-x)}{r^3} \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} + \frac{d^2 y'}{dt'^2} &= -\frac{kMy'}{r'^3} - \frac{km(y'-y)}{r^3} \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} + \frac{d^2 z'}{dt'^2} &= -\frac{kMz'}{r'^3} - \frac{km(z'-z)}{r^3}.\end{aligned}$$

Если из этих формул исключим координаты X, Y, Z , то получим новую систему уравнений, определяющих относительное движение планет в разсуждениях солнца. Чтобы произвести исключение, в котором-то говорить, спомогать только подставить величины $\frac{d^2 X}{dt^2}, \frac{d^2 Y}{dt^2}, \frac{d^2 Z}{dt^2}$, доставляемые первыми тремя уравнениями, в остальные шесть; таким образом получим:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k(M+m)x}{r^3} &= km' \left(\frac{x'-x}{r'^3} - \frac{x'}{r'^3} \right) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k(M+m)y}{r^3} &= km' \left(\frac{y'-y}{r'^3} - \frac{y'}{r'^3} \right) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k(M+m)z}{r^3} &= km' \left(\frac{z'-z}{r'^3} - \frac{z'}{r'^3} \right) \\ \frac{d^2 x'}{dt'^2} + \frac{k(M+m')x'}{r'^3} &= km \left(\frac{x-x'}{r^3} - \frac{x}{r^3} \right) \\ \frac{d^2 y'}{dt'^2} + \frac{k(M+m')y'}{r'^3} &= km \left(\frac{y-y'}{r^3} - \frac{y'}{r^3} \right) \\ \frac{d^2 z'}{dt'^2} + \frac{k(M+m')z'}{r'^3} &= km \left(\frac{z-z'}{r^3} - \frac{z'}{r^3} \right).\end{aligned}$$

Зависим теперь, что

$$\frac{x'-x}{r^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{r} \right), \quad \frac{y'-y}{r^3} = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{r} \right), \quad \frac{z'-z}{r^3} = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{r} \right),$$

а также

$$\begin{aligned}\frac{x'}{r'^3} &= \frac{d \left(\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right)}{dx}, \quad \frac{y'}{r'^3} = \frac{d \left(\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right)}{dy}, \\ \frac{z'}{r'^3} &= \frac{d \left(\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right)}{dz};\end{aligned}$$

следовательно, вторые части первых трех из приведенных шести уравнений будут не иное что, как частные производные по x, y и z функций $km' \left(\frac{1}{r} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right)$; изобразив сию последнюю через R , получим

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k(M+m)x}{r^3} = \frac{dR}{dx} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k(M+m)y}{r^3} = \frac{dR}{dy} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k(M+m)z}{r^3} = \frac{dR}{dz} \end{cases}$$

Означив через R' функцию $km \left(\frac{1}{r} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right)$, найдем точно таким образом

$$(B) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x'}{dt'^2} + \frac{k(M+m')x'}{r'^3} = \frac{dR'}{dx'} \\ \frac{d^2 y'}{dt'^2} + \frac{k(M+m')y'}{r'^3} = \frac{dR'}{dy'} \\ \frac{d^2 z'}{dt'^2} + \frac{k(M+m')z'}{r'^3} = \frac{dR'}{dz'} \end{cases}$$

В настоящем состоянии Анализа интегрирование шести совокупных уравнений (А) и (В) невозможно. Но если примем в соображение то обстоятельство, что массы планет несравненно менее массы солнца, то можно будет отбросить величины r и r' , помноженные на массы планет, в сравнении с членами, заключающими множителей суммы $M+m$ и $M+m'$. В таком предположении, первое приближение доставит

$$\begin{aligned}(1) \quad & \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k(M+m)x}{r^3} = 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k(M+m)y}{r^3} = 0 \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k(M+m)z}{r^3} = 0 \end{cases} \\ (2) \quad & \begin{cases} \frac{d^2 x'}{dt'^2} + \frac{k(M+m')x'}{r'^3} = 0 \\ \frac{d^2 y'}{dt'^2} + \frac{k(M+m')y'}{r'^3} = 0 \\ \frac{d^2 z'}{dt'^2} + \frac{k(M+m')z'}{r'^3} = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Уравнения (1) и (2) составляют две системы, независимая одна от другой; каждая система интегрируется без затруднения, и приводит к известным свойствам эллиптического движения. Выразив координаты x, y, z, x', y', z' в функции времени, обращаемся опять к уравнениям (А) и (В), и подставляем в заключающиеся в них функции R и R' найденные величины для x, y, z, x', y', z' . Таким образом получаем две новые системы дифференциальных уравнений; интегрирование их приведет к второму приближению, которое будет верно до квадратов возмущительных масс m и m' . —

Пределы нашего Лексикона не позволяют нам даже коснуться способов, придуманных для этого интегрирования. Теория, о которой говорим, была предметом обширных практических, и, несмотря на то, ожидает еще новых изобретателей. Окончить статью краткими историческими указаниями на труды геометров в разсуждении задачи о трех телах.

Нютон, рѣшившій исполнѣ задачу объ эллиптическомъ движеніи планетъ, сообщаемаго имъ приращивательнымъ дѣйствіемъ солнца, оставилъ, такъ сказать, только нѣкоторые предположенія относительно теоріи ихъ возмущеній. Онъ думалъ, и весьма справедливо, что эллиптическое движеніе Юпитера и Сатурна подвергается весьма чувствительному измѣненію отъ взаимнаго дѣйствія сихъ двухъ планетъ, имѣющихъ значительныя массы. Несовершенство только-что возникающаго Интегральнаго Ичисленія не позволяло ему углубиться въ эту теорію, весьма трудную; Смолт. SATELLITE.

Знаменитые математикѣ, современники Ньютона, *Лейбницъ* и два брата *Яковъ* и *Иоанъ Бернулли* не послѣдовали ученію о всеобщемъ шоготвѣи, и не занимались изслѣдованіями о движеніи планетъ. Но они усовершенствовались Высшій Анализъ, и этими самыми доспавили возможности своимъ преимкнкамъ приступивши къ рѣшенію труднаго вопроса о возмущеніяхъ планетъ. *Эйлеръ* является первымъ на этомъ поприщѣ; способъ, который наука одолжена ему великому геометру, безъ сомнѣнія изыскѣннѣйшій и простѣйшій изъ всѣхъ предложенныхъ донынѣ, можетъ быть легко распространенъ на случай сколькихъ угодно тѣлъ. *Эйлеръ* выражаетъ координаты возмущенной планеты рядами, проспиранирующимися по синусамъ и косинусамъ крапныхъ угловъ отъ средней аномаліи; а какъ эта самая аномалія входитъ и въ знаковь синусовъ и косинусовъ, отчего выраженія радіуса вектора и долготы по прошествіи значительнаго времени оказались бы вѣточными, то *Эйлеръ*, посредствомъ особенно остроумнаго способа, замѣняетъ члены, содержащіе среднюю аномалію вѣт знаковь синуса и косинуса другими, заключающими ее только подъ сими знаками. На этомъ основаніи, онъ опредѣляетъ вѣковыя неравенства, экцентрициметы, положенія перигеліа и отступленіе узловъ.

Клеро и *д'Алаибертъ* также занимались задачей о прехъ шѣлахъ; но они мало прибавили къ теоріи *Эйлера*.

Лагранжъ, которому труды *Эйлера* не были извѣстны, запечаталъ Разсужденіе о возмущеніяхъ Юпитера и Сатурна; результаты этихъ изслѣдованій не согласовались съ выводами *Эйлера*, что и побудило *Лапласа* заняться снова рѣшеніемъ

того же вопроса. *Лапласъ*, трудясь надъ этою теоріею, былъ приведенъ къ важному открытію неизмѣненности большихъ осей планетныхъ орбитъ и среднего движенія планетъ, а также къ объясненію причинъ большаго неравенства въ движеніи Юпитера и Сатурна. Въ позднѣйшихъ Разсужденіяхъ *Лагранжъ* распростираетъ теорему о неизмѣненности большихъ осей, и доказалъ ее несравненно спрже, нежели *Лапласъ*. Небесная Механика обязана также *Лагранжу* доказательствомъ неизмѣненности солнечной системы; позже, это доказательство было предложено *Лапласомъ* въ болѣе общемъ видѣ.

Въ этомъ крапномъ очеркѣ трудовъ, предпринятыхъ геометрами для рѣшенія задачи о прехъ шѣлахъ, мы не должны умолчать о теоретѣ *Г. Пуассона (Poisson)* относительно неизмѣненности большихъ планетныхъ орбитъ въ нмѣхъ случаѣ, когда приближаются въ соображеніе втораго степеня возмущительныя массы, ибо, въ доказательствѣ *Лагранжа*, удерживаются только первыя степенны.

Здѣсь также мѣсто упомянуть объ общей теоріи *измѣненія постоянныхъ произвольныхъ величинъ*, предложенной *Лагранжемъ*, и которую онъ приложилъ къ рѣшенію задачи о прехъ шѣлахъ. Смолт. VARIATIONS DES CONSTANTES ARBITRAIRES. Но справедливость пребыиъ замѣнить, что *Лапласъ*, въ одно время съ *Лагранжемъ*, вывелъ подобныя формулы; но онъ опирался только къ частному случаю задачи о прехъ шѣлахъ, между тѣмъ какъ теорія *Лагранжа* прихидется ко всѣмъ вопросамъ о движеніи, и, какъ недавно замѣтилъ Англійскій математикъ *Гаиллтонъ*, много облегчаетъ метрирование дифференціальныя уравненій Динамики.

Читатели найдутъ самыя обширнѣйшыя подробности о задачѣ прехъ шѣлъ, а также ссылки на сочиненія объ этомъ предметѣ, въ знаменитомъ сочиненіи *Лапласа: Mécanique Céleste, Tome 5^{me} Livre XV.*

CORPS D'UNE MACHINE. (Прикл. Мех.) **КОРПУСЪ, ОСТАВЪ МАШИНЫ.** Вообще, главная часть машины. *Corps de pompe; труба, стволъ насоса.*

CORPS. (Физ.) **ТѢЛО.** Часть вещества, со всѣхъ сторонъ ограниченна. Но что такое вещество, на этотъ вопросъ, кажется, невозможно отвѣ-

чать удовлетворительнымъ образомъ. Обыкновенное опредѣленіе вещества — *всѣ то, что можетъ дѣйствовать на наши чувства*, — не выдержитъ строгатаго разбора, и всѣхъ извѣстныхъ возраженій опиривающихся пропущивъ показаній нашихъ чувствъ.

Для объясненія явленій, представляемыхъ вообще тѣлами, физики допускаютъ, что вещество состоитъ изъ весьма малыхъ частей, называемыхъ *частичками* (*molecules, corpuscles*), которыя находятся одинъ оный другія на нѣкоторыхъ разстояніяхъ; эти частички удерживаются въ связи между собою силами притягательными, а не приходящъ въ соприкосновеніе въ слѣдствие силъ отталкивающихъ, которыя, какъ увидимъ ниже, дѣйствуютъ на частички въ одно время съ притягательными.

Частички, хотя и чрезвычайно малы, но сами составлены еще изъ другихъ частичекъ, несравненно меньшихъ, называемыхъ *атомами* (*atoms*). Частички всѣхъ тѣлъ представляются въ состояніи твердыхъ. Состояніе тѣлъ жидкихъ, жидкихъ и воздухообразныхъ зависитъ отъ силъ притягательныхъ и отталкивающихъ, которыя извѣщаютъ свое дѣйствіе на частички, а не зависитъ отъ свойства сихъ тѣлъ. Опытъ подтверждаетъ эту истину; дѣйствительно, посредствомъ сильнаго давленія или значительнаго пониженія температуры можно привести въ твердое состояніе тѣла жидкія и газы, а напотивъ того, посредствомъ усиленной теплоты, превративъ тѣла твердыя и жидкія въ воздухообразныя. Чтобы составить себѣ ясное понятіе о трехъ состояніяхъ, въ которыхъ представляются тѣла, надобно прибавить къ разсмотрѣнію притягательныхъ и отталкивающихъ силъ, дѣйствующихъ на частички тѣла. Каждый атомъ, частичка есть центръ силъ притягательныхъ, дѣйствующихъ во все стороны. И такъ, атомы одной и той же частички притягиваются взаимно, и вѣсятъ съ тѣмъ притягиваютъ атомы смежныхъ частичекъ. Законъ этого притяженія неизвѣстенъ. Изъ усматриваемыхъ нами явленій выводимъ только то заключеніе, что это притяженіе выражается суммою двухъ членовъ, изъ которыхъ одинъ обратно пропорціоналенъ квадрату взаимнаго разстоянія двухъ притягиваемыхъ атомовъ, а другой, изображаетъ неизвѣст-

ную функцію этого самаго разстоянія, подчиненную тому условію, что величина ея дѣлается нечувствительною, какъ скоро разстояніе сдѣлалось соизмѣрительнымъ. Законъ, о которомъ говоримъ, выражается формулою

$$\frac{k}{r^2} + \phi(r),$$

гдѣ k изображаетъ количество постоянное, r разстояніе между двумя притягивающимися атомами, а $\phi(r)$ такую функцію, которая, для чувствительныхъ величинъ r , дѣлается вовсе нечувствительною.

Объясненіе усматриваемыхъ нами въ тѣлахъ явленій пребудетъ, чтобы между атомами ихъ, сверхъ притягательныхъ дѣйствій, обнаруживались я взаимныя отталкиванія. Но такъ какъ противно здравому разуму допустить, чтобы атомъ былъ одаренъ въ одно время двумя свойствами, совершенно противоположными, именно, притягательною и вѣснѣю отталкивающею силами, то физики и предполагаютъ, что отталкиваніе происходитъ отъ атомовъ не разсматриваемого тѣла, но другаго вещества, несравненно рѣдчайшаго, наполняющаго все пространство, и называемаго *эфиромъ* (*ether*). Атомы эфира прилипаютъ къ атомамъ, составляющимъ частички тѣла; и такъ какъ первые отталкиваются взаимно, то между послѣдними и обнаруживаются отталкивающія силы.

Эфиръ есть вещество совершенно отличное отъ другихъ: оно не составлено изъ частичекъ какъ прочія тѣла, а состоитъ единственно изъ атомовъ. Эти атомы ли въ какомъ случаѣ не притягиваются между собою, но всегда отталкиваются взаимно.

Теперь мы въ состояніи опредѣлить взаимодѣйствіе двухъ атомовъ какого ни есть вещества; дѣйствіе, о которомъ говоримъ, можетъ быть, какъ и выше, выражено формулою $\frac{k}{r^2} + \phi(r)$; но функція $\phi(r)$ будетъ заключать въ себѣ не только часть, относящуюся къ взаимному притяженію атомовъ, но еще и дѣйствіе ихъ на атомы эфира, и взаимныя отталкиванія сихъ послѣднихъ. И такъ, $\phi(r)$ будетъ состоять: 1) изъ функціи $f(r)$, выражающей взаимное притяженіе двухъ атомовъ тѣла; 2) изъ функціи $t_1(r)$, изображающей дѣйствіе одного атома тѣла, на атомъ эфира, соприкосновенаго съ другимъ ато-

момъ тѣла; 5) изъ функций $f_2(r)$, изображающей дѣйствіе втораго атома тѣла на атомъ эвпра, прилпгаго къ первому атому тѣла, и 4), изъ функций $F(r)$, выражающей взаимное отталкиваніе атомовъ эвпра, соединившихся съ двумя атомами тѣла. И такъ, полное дѣйствіе между двумя атомами тѣла, выражается формулою

$$\frac{A}{r^2} + f(r) + f_1(r) + f_2(r) - F(r)$$

Если, для простоты, изобразимъ чрезъ $\psi(r)$ сумму всѣхъ положительныхъ членовъ, то получимъ разность

$$\psi(r) - F(r),$$

изображающую взаимное дѣйствіе двухъ атомовъ тѣла. Общѣ функции $\psi(r)$ и $F(r)$ убываютъ съ увеличеніемъ разстоянія r , и дѣйствіе атомовъ будетъ притягательное или отталкивающее, смотря по тому, будетъ ли разность $\psi(r) - F(r)$ положительная или отрицательная.

Каждый изъ атомовъ, составляющихъ одну частицу тѣла, побуждается спольными силами такого рода, сколько та частица заключаетъ въ себѣ составныхъ атомовъ, безъ одного; когда разсмапривается одна частица, то равнодѣйствующая всѣхъ этихъ силъ изобразится силою, побуждающею атомъ. Но если разсмаприваемъ нѣсколько частицъ тѣла, то каждый атомъ будетъ еще побуждаемъ силами, происходящими отъ дѣйствія атомовъ смежныхъ частицъ. Мы постараемся объяснить теперь различныя состоянія тѣлъ, подлежащихъ нашимъ чувствамъ, принимая въ соображеніе какъ взаимныя дѣйствія атомовъ, составляющихъ одну и ту же частицу, такъ и дѣйствія, происходящія отъ смежныхъ съ нею частицъ разсмаприваемаго тѣла.

Въ тѣлахъ твердыхъ, и въ особенности въ тѣлахъ окристаллованныхъ, взаимное дѣйствіе частицъ зависитъ отъ числа и отъ расположенія атомовъ внутри каждой частицы, почему эти послѣднія могутъ дѣйствовать одиъ на другіа сильнѣе или слабѣе, смотря на относителныя ихъ положенія. Они располагаются между собою такъ, что положенія ихъ свойственнымъ устойчивому равновѣсію, отъ чего и происходятъ правльный видъ тѣлъ окристаллованныхъ. Въ тѣлахъ неокристаллованныхъ вліяніе формъ частицъ на взаимныя ихъ дѣйствія менѣе ощутительно, но не ничтожно; и въ самомъ дѣлѣ,

можно сказать, что нѣтъ въ природѣ ни одного твердаго тѣла, которое бы совершенно было лишено свойства кристаллоизованія. Когда механическими обрамъ размыиваетъ твердое тѣло, то частицы въ томъ мѣстѣ, гдѣ произошло переломленіе, отдѣляются одиъ отъ другихъ, и, очень естественно полагать, что въ это время атомы ихъ приведены въ движеніе; но сей-то причинъ всегда замѣчаютъ при размыиваніи тѣла большее или меньшее освобожденіе теплоты, ибо, при быстромъ сотрясеніи частицъ, происходитъ звукъ (Смот. SON, ACOUSTIQUE), а движеніе атомовъ внутри частицъ приводитъ въ сотрясеніе эвпръ, движеніе котораго производитъ теплоту (Смот. CHALEUR). Но когда разрушаемъ тѣло химическими обрамъ, то есть чрезъ соединеніе его съ другимъ тѣломъ, то всѣ его частицы раздробляются, и атомы перваго тѣла соединяются съ атомами втораго, и составляютъ частицы, принадлежащія уже иному образованію тѣла. Вотъ почему всѣ химическія дѣйствія сопровождаются освобожденіемъ теплоты. Большее или меньшее средство двухъ веществъ въ освобожденіи зависить отъ вида ихъ частицъ, или, правльнѣе, отъ шой части химическаго дѣйствія, которая зависить отъ иного вида.

Отъ взаимныхъ ли разстояній частицъ, или отъ ихъ вида, но въ жидкихъ тѣлахъ притягательная сила мало ощутительна. Дѣйствіе между двумя жидкими частицами производится точно такъ, какъ если бы составляющіе ихъ атомы были сосредоточены въ центрахъ иерціи частицъ, а это значить, что вѣдъ ихъ послѣднихъ не нѣтъ почти никакого вліянія на ихъ взаимодѣйствія. Для раздробленія жидкости достаточно малаго усилія; но для уменьшенія ея объема пребудетъ значительное давленіе. Это происходитъ оттого, что притягательныя взаимодѣйствія частицъ весьма слабы, между тѣмъ какъ для сжатія жидкости надобно непременно приблизить всѣ частицы одиъ къ другимъ. Дѣйствительно, если бы жидка сжать только нѣмоторую часть какой либо жидкости, употребивъ на сей конецъ ничтожное давленіе, то частицы, подверженныя давленію, потчасъ устремлялись бы въ ту сторону, гдѣ давленіе меньше. И такъ, надлежитъ подвергнуть жидкость давленію, равному во всѣхъ

стороны, и этия средствомъ приближать всея часпачи, безъ исключенія, одна къ другимъ; СМОТ. FLUIDE. Напротивъ того, можно сжать какую угодно часпъ твердаго тѣла, и остальныя его части не подвергнутся чрезъ то какому измѣненію. По сей-то прѣчины твердыя тѣла, по видимому, одарены въ болѣеи степени свойствомъ сжимаемости, нежели тѣла жидкія.

Наконецъ, въ тѣлахъ упругихъ, какъ{то въ газахъ и парахъ [СМОТ. AÉRIFORME (FLUIDE)], видъ часпачи не имѣетъ никакого вліянія на ихъ взаимодействіи, и оппашивающая сила преобладаетъ надъ силою притягательною, въ слѣдствіе чего часпачи воздухообразныхъ тѣлъ спремаются къ взаимному удаленію. Воиъ почему тѣла упругія сжимаются отъ слабѣишаго усилія, а расширяются отъ малѣишаго уменьшенія давленія. Законы сгущенія и разширенія воздухообразныхъ жидкопей опкрыты *Мариоттомъ*; они легко могутъ бытъ доказаны и посредствомъ *вытѣсненія*. Описываютъ по сему преднеиу къ *измѣннѣ V тома Небесной Механики Лапласа*.

Если спанеиъ посщенно возвышати теппературу газа, подверженнаго определенному давленію, то объемъ его будетъ увеличиваться, и это увеличеніе объясняется самымъ естественнымъ образомъ, прѣвля въ соображеніе приращеніе количества теплорода и оппашивающее дѣйствіе между атомами этого вещества. Для аналитическаго доказательствна закона разширенія газовъ отъ теплоты, открышаго *Ге-Люссакомъ* и *Дальтономъ*, описываютъ къ 12 книгѣ V тома упоминаемой выше *Небесной Механики*. Въ статьѣ AÉRIFORME (FLUIDE) вѣшаго Лексикона, читатели найдутъ формулу, выражающую этоиъ законъ.

CORPUSCULAIRE. (Физ.) **ЧАСТИЧНЫЙ.** СМОТ. MOLECULAIRE.

CORPUSCULE. (Физ.) **ЧАСТИЦА.** СМОТ. MOLECULE, CORPS.

CORRECTION. (Анал.) **ПОПРАВКА.** Количество прибавляемое къ какой нибудь величинѣ для уточненія сей послѣдней. *Petite correction, малая поправка.* СМОТ. APPROCHÉE (VALEUR), CARRES (MÉTHODE DES MOINDRES), AVANTAGEUX (RÉSULTATS LES PLUS).

CORRELATION. СООТНОШЕНИЕ. Взаимное оппашеніе. *Corrélation des quantités, des figures; coотношеніе количествъ, фигуръ.*

CORRESPONDANCE. СООТВѢТСТВЕННОСТЕ.
CORRESPONDANT. СООТВѢТСТВЕННЫЙ, СООТВѢТСТВУЮЩИЙ, ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ. *Angles correspondants; соотвѣтственные углы.* СМОТ. ANGLE.

CORRESPONDANTES (MÉTHODE DES HAUTEURS). (Астр.) **СПОСОБЪ СООТВѢТСТВЕННЫХЪ ВЫСОТЪ.** СМОТ. HAUTEURS.

CORRIGER. (Анал.) **ИСПРАВИТЬ.—УТОЧНИТЬ.** СМОТ. CORRECTION.

COSA. (Алг.) Такъ называли Ишаланскіе Алгебристы неизвѣстную, искому величину въ алгебическомъ уравненіи. — Это самое слово употреблялось также иногда для означенія *коэффициента* у первой степени неизвѣстной въ алгебическомъ уравненіи; и такъ, число 7 въ уравненіи $x^3 + 7x - 5 = 0$, называлось *cosa* или еще *res*.

COSECANTE. (Триг.) **КОСЕКАНТЬ.** Косекансомъ какого нѣ есть угла называется секансъ дополненія того угла къ 90°. И такъ, косекансъ 50° есть не иное что, какъ секансъ 60°. СМОТ. SECANTE.

COSINUS. (Триг.) **КОСИНУСЪ.** Косинусъ угла есть синусъ дополненія того угла къ 90°. И такъ, косинусъ 50° равняется синусу 60°. СМОТ. SINUS, TRIGONOMETRIE.

COSINUS-VERSE. (Триг.) **КОСИНУСЪ-ВЕРСУСЪ** или **ОБРАЩЕННЫЙ КОСИНУСЪ.** Косинусъ-версусъ какого нибудь угла есть синусъ-версусъ дополненія того угла къ 90°. — Иногда обращенный косинусомъ называютъ разность между діаметромъ и обращеннымъ синусомъ. СМОТ. SINUS-VERSE.

COSMIQUE. (Астр.) **КОСМИЧЕСКИЙ.** Когда звѣзда восходитъ или заходитъ вѣднѣ съ солнцемъ, то восхожденіе или заходеніе той звѣзды называется *космическимъ*.

COSMOGONIE. КОСМОГОНІЯ. Наука имѣющая предметомъ изслѣдованія объ образованіи міра.

COSMOGRAPHIE. (Отъ Греч. *κοσμος, міръ* и *γραφω, пишу.*) **КОСМОГРАФІЯ, МИРООПИСАНІЕ.** Наука описывающая видъ міра, его величину,

взаимное положение и отношеніе составляющихъ его частей, и предлагающа способы для изображенія сихъ послѣднихъ на планѣ. Исследования Космографіи распространяются и на движенія небесныхъ тѣлъ: но преимущественно эта наука разсматриваетъ состояніе земнаго шара, его положеніе въ отношеніи къ другимъ небеснымъ тѣламъ, общее его раздѣленіе и измѣреніе, причину увеличивающейся и уменьшающейся длины дня, перемены времёнъ года и атмосферы земли. Однимъ словомъ, Космографія есть часть Физики, разсуждающая о всеобщей системѣ міра, и въ особенности о землѣ; въ этомъ смыслѣ, она обнимаетъ Астрономію и Географію.

COSMOLOGIE. КОСМОЛОГІЯ. Астрономическій инструментъ, очень похожій на *астролябію*. Космологію употребляли прежде для наблюденія высотъ звѣздъ и для изображенія круговъ небесной сферы; она давно уже оставлена астрономами.

COSMOLOGIE. (Отъ Греч. *κόσμος*, *міръ* и *λόγος*, *слово*.) **КОСМОЛОГІЯ, МИРОСЛОВІЕ, МИРОЗНАНИЕ.** Наука, имѣющая предметомъ изученіе міра. Собственно говоря, Космологія есть общія, умозрительная Физика. Но она не ходитъ въ подробный разборъ фактовъ, а разсматриваетъ только выводимые изъ нихъ результаты со стороны метафизической, показывая аналогію и взаимную связь, существующую между ними, и помогая, посредствомъ сихъ данныхъ старается открыть общіе законы, управляющіе міромъ.

COSSIQUES (NOMBRES). Не упот. (Арие. и Алг.) Такъ назывались *численные корни уравненій* въ старыхъ сочиненіяхъ объ Алгебрѣ. Впослѣдствіи подъ симъ наименованіемъ стали разумѣть *ирраціональные числа*, потому, что корни алгебраическаго уравненія часто бываютъ *ирраціональными*. И въ этомъ смыслѣ слово *cosmique* совсѣмъ вышло изъ употребленія.

COTANGENTE. (Триг.) **КОТАНГЕНСЪ.** Котангенсъ какого нибудь угла, есть тангенсъ дополненія того угла къ 90°. И такъ, котангенсъ 30° равняется тангенсу 60°. Смол. **TANGENTE.**

COTE. (Нивел.) **ВЫСОТА.** Высота нивелируемой точки надъ горизонтальною плоскостію.

COTÉ. (Геом.) **СТОРОНА, БОКЪ.** Стороною фи-

гуры называется всякая прямая линія, составляющая часть очертанія вѣтви самой фигуры. *Côté d'un triangle, d'un pentagone; сторона треугольника, пятиугольника.* — Иногда подъ симъ словомъ разумѣютъ *грань* какого нибудь тѣла, напримеръ куба и проч.; но въ этомъ смыслѣ преимущественно употребляютъ слово **FACE** (Смол.).

CÔTÉ D'UN TRIANGLE SPHÉRIQUE. Бокъ, сторона, сферическаго треугольника. Смол. **TRIANGLE SPHERIQUE.**

COTÉ. (Арие. и Алг.) **СТОРОНА.** Стороною фигурнаго числа называется число членовъ арифметической прогрессіи, коей сумма изображаетъ данное фигурное число. И такъ, *сторона* треугольнаго числа 15 есть 5, ибо $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, и вообще n будетъ стороною треугольнаго числа $\frac{n(n+1)}{2}$. Квадратное число 49 имѣтъ

стороною число 7; пятиугольное 92, изображающее сумму арифметической прогрессіи $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22$, имѣтъ стороною 8, и такъ далѣе. Смол. **FIGURÉS (NOMBRES).** — Иногда сторонами предложеннаго числа называются множители, изъ которыхъ оно составлено; и такъ, стороны числа 30 суть 2, 3 и 5, или 2 и 15, или 3 и 10 или наконецъ 5 и 6.

COTES (THÉORÈME DE). (Геом. и Анал.) **ТЕОРЕМА КОТЕСА.** Теорема, удерживая имя своего изобрѣтателя Англійскаго математика *Котеса*, родившагося въ 1682 году, а умершаго въ 1716. Эта теорема состоящая въ слѣдующемъ свойствѣ круга: Положить, что радіусомъ $OA = r$ (черт. 1 Листъ VI) описали окружность круга, которую потомъ раздѣлили на чѣтное число $2n$ равныхъ частей (на чертѣхъ $2n = 10$). Пусть будутъ $A, a, B, b, C, c, D, d, E, e, \dots$ точки дѣленія. Возьмемъ на діаметрѣ Ac произвольную точку P , и положимъ $OP = a$. Соединимъ точку P съ точками дѣленія A, a, B, b, \dots окажется, что разность степеней

$$(1) \quad r^n - a^n = PA \times PB \times PC \times PD \times PE \times \dots$$

а сумма ихъ

$$(2) \quad r^n + a^n = PA \times Pa \times Pb \times Pc \times Pd \times Pe \times \dots$$

Уравненія (1) и (2) заключающъ въ себѣ аналитическое выраженіе *Котесовой теоремы*.

Если точка P будетъ находиться внѣ круга

на продолженіи діаметра CA , направлять въ P , то въ уравн. (1) надобно будетъ замѣнить равенствъ $r^n - a^n$ равенствіемъ $a^n - r^n$; второе же уравненіе не измѣнится въ своемъ видѣ.

Французскій математикъ *Моавръ* (*Möivre*) разработалъ эту теорему на томъ случай, когда вмѣсто двучленного выраженія $r^n \pm a^n$ разсмаатривается шрехчленное $r^{2n} - 2a^n r^n \cos \alpha + a^{2n}$. Возьмъ изъ чего состоятъ *теорема Моавра*: Радиусъ OA , описывающій кругъ ACB (черт. 2 Листъ VI); беремъ дугу $AM = \alpha$, и опираемъ ось точки A дугу $AB = \frac{\alpha}{n}$, разумя подъ α какое нъ есть цѣлое число (на чертѣ $n=5$).

Отъ точки B раздѣляемъ окружность на n равныхъ частей; пусть будутъ C, D, E, F, \dots точки дѣленія, такъ что дуги BC, CD, DE, EF, \dots равны между собою, и каждая изъ нихъ $= \frac{2\pi}{n}$. На радиусѣ OA (или на его продолженіи) беремъ произвольную точку P (или P'); пусть будетъ $PO = a$. Соединимъ точку P съ каждою изъ точекъ дѣленія B, C, D, E, F, \dots докажемъ, что шрехчленное количество

$$r^{2n} - 2a^n r^n \cos \alpha + a^{2n} = \overline{PB} \times \overline{PC} \times \overline{PD} \times \overline{PE} \times \overline{PF} \times \dots$$

Свойство круга, выражаемое этою формулою, составляетъ *теорему Моавра*, изъ которой легко вывести предложеніе Кошеса. Дѣйствиельно, принявъ $AM = \alpha = \pi$, получимъ $\cos \alpha = -1$, слѣдовательно

$$r^{2n} + 2a^n r^n + a^{2n} = (r^n + a^n)^2 = \overline{PB} \times \overline{PC} \times \overline{PD} \times \overline{PE} \times \overline{PF} \times \dots$$

или

$$(a) \quad r^n + a^n = \overline{PB} \times \overline{PC} \times \overline{PD} \times \overline{PE} \times \overline{PF} \times \dots$$

Пологая же $\alpha = 0$, будемъ $\cos \alpha = 1$, и точка B совпадетъ съ точкою A , которая слѣдовательно будетъ первою точкою дѣленія. И такъ, получимъ (черт. 1)

$$r^{2n} - 2a^n r^n + a^{2n} = (r^n - a^n)^2 = \overline{PA} \times \overline{PB} \times \overline{PC} \times \overline{PD} \times \overline{PE} \times \dots$$

или

$$(b) \quad r^n - a^n = \overline{PA} \times \overline{PB} \times \overline{PC} \times \overline{PD} \times \overline{PE} \times \dots$$

Сличеніе уравненій (a) и (b) съ уравненіями (2) и (1), выражающими теорему Кошеса, покажетъ намъ, что они однозначны между собою.

Для доказательства *теоремы Моавра*, выведемъ сперва слѣдующее предложеніе, которое, хотя несвойственно, но также называеиногда *теоремою Моавра*:

ТЕОРЕМА. Для возвышенія мнимого количества

$$\cos \varphi \pm \sin \varphi \cdot \sqrt{-1}$$

въ степень m , 'стоитъ только перемѣнить въ немъ φ на $m\varphi$; и такъ получимъ

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \cdot \sqrt{-1})^m = \cos m\varphi \pm \sin m\varphi \cdot \sqrt{-1}.$$

Доказательство. Изобразимъ чрезъ $\varphi, \varphi', \varphi'' \dots$ различныя дуги, и перемножимъ между собою выраженія

$$\cos \varphi \pm \sin \varphi \cdot \sqrt{-1}, \cos \varphi' \pm \sin \varphi' \cdot \sqrt{-1}, \cos \varphi'' \pm \sin \varphi'' \cdot \sqrt{-1} \dots$$

найдемъ послѣдовательно

$$\begin{aligned} & (\cos \varphi \pm \sin \varphi \cdot \sqrt{-1}) (\cos \varphi' \pm \sin \varphi' \cdot \sqrt{-1}) \\ &= \cos \varphi \cdot \cos \varphi' - \sin \varphi \cdot \sin \varphi' \pm (\sin \varphi \cdot \cos \varphi' + \cos \varphi \cdot \sin \varphi') \sqrt{-1} \\ &= \cos (\varphi + \varphi') \pm \sin (\varphi + \varphi') \cdot \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

$$[\cos (\varphi + \varphi') \pm \sin (\varphi + \varphi') \sqrt{-1}] [\cos \varphi'' \pm \sin \varphi'' \sqrt{-1}] = \cos (\varphi + \varphi') \cdot \cos \varphi'' - \sin (\varphi + \varphi') \cdot \sin \varphi''$$

$$\pm [\sin (\varphi + \varphi') \cdot \cos \varphi'' + \cos (\varphi + \varphi') \cdot \sin \varphi''] \sqrt{-1} = \cos (\varphi + \varphi' + \varphi'') \pm \sin (\varphi + \varphi' + \varphi'') \cdot \sqrt{-1}.$$

Отсюда заключаемъ, что при какомъ нъ есть числѣ m дуги $\varphi, \varphi', \varphi'', \dots$, будемъ

$$\begin{aligned} & (\cos \varphi \pm \sin \varphi \cdot \sqrt{-1}) (\cos \varphi' \pm \sin \varphi' \cdot \sqrt{-1}) \cos \varphi'' \pm \sin \varphi'' \cdot \sqrt{-1} \dots \\ &= \cos (\varphi + \varphi' + \varphi'' + \dots) \pm \sin (\varphi + \varphi' + \varphi'' + \dots) \sqrt{-1}; \end{aligned}$$

позволивъ $\varphi = \varphi' = \varphi'' = \dots$, найдемъ формулу

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \cdot \sqrt{-1})^m = \cos m\varphi \pm \sin m\varphi \cdot \sqrt{-1}.$$

Это самое предложеніе можно распространить и на случай отрицательнаго показателя m ; дѣйствиельно, такъ какъ

$$\begin{aligned} (\cos \varphi \pm \sin \varphi \cdot \sqrt{-1})^{-m} &= \frac{1}{(\cos \varphi \pm \sin \varphi \cdot \sqrt{-1})^m} \\ &= \frac{1}{\cos m\varphi \pm \sin m\varphi \cdot \sqrt{-1}}, \end{aligned}$$

то помноживъ на $\cos m\varphi \mp \sin m\varphi \cdot \sqrt{-1}$ числитель и знаменателя послѣдней дроби, и наблюдая что $\cos^2 m\varphi + \sin^2 m\varphi = 1$, получимъ

$$\begin{aligned} & (\cos \varphi \pm \sin \varphi \cdot \sqrt{-1})^{-m} = \cos m\varphi \mp \sin m\varphi \cdot \sqrt{-1}; \\ & \text{но } \cos (-m\varphi) = \cos m\varphi \text{ а } \sin (-m\varphi) = -\sin m\varphi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{слѣдовательно} \\ & (\cos \varphi \pm \sin \varphi \cdot \sqrt{-1})^{-m} = \cos (-m\varphi) \pm \sin (-m\varphi) \cdot \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

что и имѣемъ въ виду доказывать *).

*) Легко доказать предложеніе, о которомъ говоримъ для казого нъ есть показателя m . Пусть будетъ

$$y = \cos \varphi \pm \sin \varphi \cdot \sqrt{-1};$$

дифференцируя это выраженіе, получимъ

$$dy = -\sin \varphi \cdot d\varphi \pm \cos \varphi \cdot d\varphi \cdot \sqrt{-1}$$

$$= \pm d\varphi \sqrt{-1} (\cos \varphi \pm \sin \varphi \cdot \sqrt{-1}) = \pm y d\varphi \sqrt{-1};$$

Обратимся теперь къ теоремѣ Моавра; легко видѣть, что

$$r^{2n} - 2a^n r^n \cos \alpha + a^{2n} = [r^n - a^n (\cos \alpha + \sin \alpha \sqrt{-1})] [r^n - a^n (\cos \alpha - \sin \alpha \sqrt{-1})].$$

Если уравним каждую изъ двухъ множителей $r^n - a^n (\cos \alpha + \sin \alpha \sqrt{-1})$ и..... $r^n - a^n (\cos \alpha - \sin \alpha \sqrt{-1})$, то получимъ два уравненія; изъ перваго выведемъ

$$r = a (\cos \alpha + \sin \alpha \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} (1)^{\frac{1}{n}} = a (\cos \frac{\alpha}{n} + \sin \frac{\alpha}{n} \sqrt{-1}) (1)^{\frac{1}{n}}.$$

Но $(1)^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{2k\pi}{n} \pm \sin \frac{2k\pi}{n} \sqrt{-1}$ [Смол. VI-NOMES (ÉQUATIONS)], гдѣ k изображаетъ цѣлыя числа 1, 2, 3,.... до ближайшаго цѣлаго къ $\frac{n}{2}$. Слѣдовательно

$$r = a (\cos \frac{\alpha}{n} + \sin \frac{\alpha}{n} \sqrt{-1}) (\cos \frac{2k\pi}{n} + \sin \frac{2k\pi}{n} \sqrt{-1}) \\ = (\cos \frac{\alpha+2k\pi}{n} + \sin \frac{\alpha+2k\pi}{n} \sqrt{-1}).$$

Второй изъ двухъ множителей доопавляетъ

$$r = a (\cos \frac{\alpha}{n} - \sin \frac{\alpha}{n} \sqrt{-1}) (\cos \frac{2k\pi}{n} - \sin \frac{2k\pi}{n} \sqrt{-1}) \\ = a (\cos \frac{\alpha+2k\pi}{n} - \sin \frac{\alpha+2k\pi}{n} \sqrt{-1}),$$

и вообще будемъ

$$r = a (\cos \frac{\alpha+2k\pi}{n} \pm \sin \frac{\alpha+2k\pi}{n} \sqrt{-1}).$$

И такъ, прехрщенное выраженіе

$$r^{2n} - 2a^n r^n \cos \alpha + a^{2n}$$

будетъ разлагаться на множители вида

$$r - a \cos \frac{\alpha+2k\pi}{n} - a \sin \frac{\alpha+2k\pi}{n} \sqrt{-1}$$

$$\text{и } r - a \cos \frac{\alpha+2k\pi}{n} + a \sin \frac{\alpha+2k\pi}{n} \sqrt{-1}.$$

а слѣдовательно и на вещественные множители второй степени

слѣдовательно

$$\frac{dy}{y} = \pm dx \sqrt{-1};$$

интегрируя это выраженіе, и наблюдая, что для $x=0$ должно быть $y=1$, найдемъ

$$ky = \pm x \sqrt{-1}, \text{ откуда } y = e^{\pm x \sqrt{-1}}.$$

И такъ

$$e^{\pm x \sqrt{-1}} = \cos x \pm \sin x \sqrt{-1}.$$

Измѣнивъ въ этой формулѣ x въ mx , получимъ

$$e^{\pm mx \sqrt{-1}} = (e^{\pm x \sqrt{-1}})^m \\ = (\cos x \pm \sin x \sqrt{-1})^m = \cos mx \pm \sin mx \sqrt{-1},$$

гдѣ m изображаетъ какое угодно число

$$(r - a \cos \frac{\alpha+2k\pi}{n} - a \sin \frac{\alpha+2k\pi}{n} \sqrt{-1}) \times$$

$$(r - a \cos \frac{\alpha+2k\pi}{n} + a \sin \frac{\alpha+2k\pi}{n} \sqrt{-1})$$

$$= r^2 - 2ar \cos \frac{\alpha+2k\pi}{n} + a^2.$$

И такъ, въ слѣдствіе сказаннаго, получимъ:

$$r^{2n} - 2a^n r^n \cos \alpha + a^{2n} = (r^2 - 2ar \cos \frac{\alpha}{n} + a^2) \times$$

$$(r^2 - 2ar \cos \frac{\alpha+2\pi}{n} + a^2) \times$$

$$(r^2 - 2ar \cos \frac{\alpha+4\pi}{n} + a^2) \times$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(r^2 - 2ar \cos \frac{\alpha+(n-1)2\pi}{n} + a^2).$$

Но такъ какъ, по предположенію, дуга $AB = \frac{\alpha}{n}$,

а каждая изъ дугъ $BC, CD, DE, EF, FB, \dots$ равна $\frac{2\pi}{n}$, то изъ треугольниковъ $PBO, PCO, PDO, PEO, PFO, \dots$ выводимъ

$$PB^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \frac{\alpha}{n}$$

$$PC^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \frac{\alpha+2\pi}{n}$$

$$PD^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \frac{\alpha+4\pi}{n}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$PF^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \frac{\alpha+(n-1)2\pi}{n}.$$

Слѣдовательно, произведение квадратовъ линій PB, PC, PD, \dots, PF (черт. 2) будетъ равняться прехрщенному выраженію $r^{2n} - 2a^n r^n \cos \alpha + a^{2n}$, въ чемъ и состоятъ теорема Моавра.

COUCHANT, ОССИДЕНТ или ОУЗЕТ. (Астр.)

ЗАКАТЪ, Занадъ, Вестъ.

COUCHER d'un astre. (Астр.) ЗАХОЖДЕ-
НІЕ светила.

COUCHES DE NIVEAU. (Гидрост.) **УРОВЕННЫЕ СЛОИ**. Возьмемъ общее уравненіе равновѣсія жидкихъ тѣлъ (Смол. HYDROSTATIQUE)

$$dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz),$$

въ которомъ p изображаетъ давленіе на единичную площадь въ точкѣ, определяемой координатами x, y, z , ρ плотность жидкости, а X, Y, Z ускорительныя силы, параллельныя прямъ координатнымъ осямъ, и приложенныя къ рассматриваемой точкѣ. Выраженіе $Xdx + Ydy + Zdz$ для силъ притягательныхъ и отталкивающихъ направленныхъ къ неподвижнымъ центрамъ, и зависящихъ отъ разстояній къ этимъ центрамъ есть полный дифференціалъ. И такъ, въ этомъ

случае, къ которому относится большая часть изъятыхъ нами слоевъ въ природѣ, будемъ

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\varphi(x, y, z),$$

разуица подъ $\varphi(x, y, z)$ некоторую определенную функцию переѣнныхъ x, y, z .

Если примемъ теперь въ разсмотрѣніе всѣ системы величинъ x, y, z , для которыхъ функция $\varphi(x, y, z)$ сохраняетъ одну и ту же величину c , то очевидно, что эти системы определяютъ такую поверхность, для которой будемъ $d\varphi(x, y, z) = 0$. И такъ, если поверхность, определенная уравненіемъ $\varphi(x, y, z) = c$, проходить сквозь жидкость, то для всѣхъ точекъ этой поверхности, находящихся внутри разсматриваемой жидкой массы, будемъ $Xdx + Ydy + Zdz = 0$, а это уравненіе показываетъ, что равнодѣствующая силъ X, Y, Z дѣйствуетъ направленіе нормальное къ сей самой поверхности; вольт почему сія послѣдняя называется *уровенною*.

Легко видѣть, что существуетъ безчисленное множество *уровенныхъ* поверхностей, и всѣ онѣ определяются общими уравненіемъ $\varphi(x, y, z) = c$; одна поверхность отличается отъ другой только величиною постоянной количествъ c , которое для одной поверхности имѣетъ определенное значеніе, а при переходѣ къ другой, переѣнилось. Что касается до дифференціальнаго уравненія $Xdx + Ydy + Zdz = 0$ *уровенныхъ* поверхностей, то, по приятии его независимости отъ c , оно принадлежитъ всѣмъ имъ, и показываетъ, что равнодѣствующая силъ X, Y, Z въ какой нѣ есть точка, нормальна къ *уровенной* поверхности, проходящей чрезъ разсматриваемую точку. Двѣ смежныя *уровенныя* поверхности, то есть такія, которыя соотвѣствуютъ двумъ величинамъ c безконечно мало разнѣвающимъ между собою, ограничиваютъ безконечно тонкій слой, называемый *уровеннымъ*. Очевидно, что вся жидкая масса можетъ быть раздѣлена на безчисленное множество *уровенныхъ* слоевъ поверхностей, определяемыхъ уравненіемъ $\varphi(x, y, z) = c$, гдѣ количеству c приписываются всѣ значенія, для которыхъ упомянутыя поверхности встречаются жидкую массу. Легко видѣть, что въ жидкихъ жидкостяхъ *уровенныя* слоевъ *горизонтальныя*. Когда всѣ частицы жидкой массы подвержены дѣйствію притягательной силы, направленной къ неподвижной точкѣ, то *уровенныя*

слои будутъ *сферическіе*, и вмѣстѣ съ тѣмъ *одноцентренныя*; ихъ общій центръ совпадетъ съ центромъ притяженія.

Обратимся опять къ уравненію

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz),$$

положимъ въ немъ $Xdx + Ydy + Zdz = dq$, получимъ

$$dp = \rho dq.$$

Для интегрируемости этого уравненія, надобно чтобы плотность ρ была функциею величины q , въ слѣдствіе чего и давленіе p будетъ функциею той же величины q ; сверхъ того, такъ какъ для определенного *уровеннаго* слоя количествъ c есть постоянное, то отсюда заключаемъ, что плотность и давленіе жидкости, во всемъ протяженіи каждаго *уровеннаго* слоя, постоянны, въ чемъ и состоитъ отличительное свойство *уровенныхъ* слоевъ.

Некоторые авторы называютъ *уровенными* *поверхностями* тѣ, которыя определяются дифференціальнымъ уравненіемъ $dp = 0$. Конечное уравненіе ихъ будетъ $p = c$, гдѣ c сохраняетъ одну и ту же величину для всѣхъ точекъ определенной поверхности, а измѣняется при переходѣ отъ одной поверхности къ другой. Это опредѣленіе *уровенныхъ* поверхностей согласуется съ предложеннымъ выше только въ томъ случаѣ, когда выраженіе $Xdx + Ydy + Zdz$ есть полный дифференціалъ; и дѣйствительно, въ противномъ случаѣ, плотность ρ уже не будетъ постоянна для одного и того же *уровеннаго* слоя. Поверхности, выражаемыя уравненіемъ $p = c$ кажутся лучше назвать *поверхностями равнаго давленія* (*surfaces d'egale pression*); сія послѣдняя не будутъ отличаться отъ *уровенныхъ* въ томъ случаѣ, когда $Xdx + Ydy + Zdz$ изобразитъ полный дифференціалъ, а это справедливо для большей части вопросовъ изъ Естественной Философіи. Но когда выраженіе $Xdx + Ydy + Zdz$ не есть полный дифференціалъ, то поверхности равнаго давленія существенно отличны отъ *уровенныхъ*.

СОУДЕ. (Mex.) КОЛѢНО. — Колѣпчатая, согнутая труба. *Levier coude; рычагъ рычага.* Такъ называется рычагъ, состоящій изъ двухъ частей или плечъ, которыя составляютъ между собою уголъ, опирающійся отъ двухъ точекъ. За точку подпора обыкновенно принимаютъ ту точку, въ которой плечи рычага соединяются. См. (F. E. 1818)

COULEUR. (Физ.) **ЦВѢТЪ.** Цвѣтъ обыкновенно определяют *спектральными, производимыми на органъ зрѣнія дѣйствіемъ свѣта.* Смол. LUMIERE.

Нѣкоторые изъ главныхъ свойствъ свѣта, какъ то: отражаемость и преломляемость его лучей, шепшоша, обнаруживающаяся въ фокусѣ выпуклаго стекла, когда посредствомъ него собираются солнечные лучи и проч. были уже давно извѣстны. Но ни одинъ изъ древнихъ естественноиспытателей не оспавилъ истиннаго объясненія *цвѣтовъ*, основаннаго на опытахъ, хотя многіе философы, въ томъ числѣ *Эпикуръ, Эпидакль, Платонъ, Зенонъ, Аристотель*, и предлагали разныя учозрѣнія. Сія теорія находилась въ самомъ жакломъ состояніи до *Декарта*, который первый предложилъ ипотезу, хотя еще весьма несовершенную, но по справедливости заслужившую вниманіе современныхъ физиковъ. Декартъ полагалъ, что свѣтъ состоитъ изъ частицъ сферическаго вида, имѣющихъ два движенія, одно, вращательное около своихъ центровъ, а другое, поступательное; различіе цвѣта, по сего мнѣнію, происходитъ отъ взаимнаго отношенія сихъ двухъ движеній. Когда вращательное движеніе частицъ свѣта значительно превосходитъ поступательное, то видится *красный цвѣтъ*; съ уменьшеніемъ разности между скоростями двухъ движеній, красный цвѣтъ постепенно переходитъ въ *желтый*. Когда же скорость вращательнаго движенія будетъ нѣсколько менше скорости поступательнаго, то обнаруживается *зеленый цвѣтъ*, который, съ ускореніемъ поступательнаго движенія, переходитъ въ *синій*, и такъ далѣе.

Послѣ Декарта нѣкоторые другіе физики занимались теоріею цвѣтовъ: но попытки ихъ не имѣли никакого особеннаго успѣха.

Значенный *Ньютонъ* приписать лишь обдумывать теорію свѣта, и въ продолженіи этого времени производить многоочисленные опыты. Наконецъ, въ 1706 году, онъ издалъ свою Оптику; въ этойъ безсмертной твореніи онъ предложилъ теорію цвѣтовъ, которая, до нашего времени, была принята всѣми физиками. Мы приведемъ здѣсь вкратцѣ главные опыты Ньютона надъ разсѣяніемъ свѣта и главныя сдѣдованія, которыя онъ вывелъ изъ нихъ.

Въ шѣмной комнатѣ *ABCD* (черт. 3, Листъ VI), сквозь круглое отверстіе *O*, сдѣланное въ ставнѣ окна, Ньютонъ пропустилъ кисть солнечнаго свѣта, которую, въ нѣсколькихъ футлахъ отъ отверстія, пріямая на стеклянную треугольную призму *P*, установленную такъ, что одна грань ея была горизонтальна. Лучи свѣта, проходя сквозь призму, преломлялись два раза: въ первый разъ, при вхожденіи въ нее, а во второй разъ, при выходѣ изъ нея, и оба раза направленія ихъ поднимаются. При такомъ опытѣ Ньютонъ усомниръся, что кисть свѣта, при выходѣ изъ призмы, принимаетъ видъ опахала, какъ означено на чертѣжѣ *аbc*; принявъ преломленный призмой свѣтъ на бѣлую сѣтну или плѣтъ *QR* въ разстояніи около 15 футовъ отъ призмы, онъ увидѣлъ одно изъ пріятнѣйшихъ оптическихъ явленій — яркую радужную полосу *bc*, сверху и снизу окруженную, а съ боковъ прижатыми обрамощ ограниченную двумя параллельными линіями. Длина полосы была около пяти разъ болѣе поперечной ея ширины. Цвѣтное изображеніе, о которомъ говорится, называется *солнечнымъ призракомъ* (*spectre solaire*); на немъ усматриваются семь главныхъ или *первоначальныхъ цвѣтовъ* (*couleurs primaires*); *имъ* *цвѣта* идутъ одинъ за другимъ въ слѣдующемъ порядкѣ: *красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий и фіолетовый*, при чемъ красный цвѣтъ занимаетъ нижнюю часть изображенія, а фіолетовый верхнюю. Пространство, занимаемое каждымъ изъ сихъ цвѣтовъ, не могло быть определено совершенно точнымъ образомъ, потому что цвѣта переходили постепенно отъ одного къ другому чрезъ всѣ поспѣдовательные опіежки. Послѣ этого, Ньютонъ производилъ слѣдующій опытъ: сквозь небольшую скважину, сдѣланную въ плѣтъ *QR*, онъ пропустилъ только одинъ цвѣтной лучъ, наприкладъ красный, и принявъ его на другую стеклянную призму; этотъ лучъ, по преломленію, не разлагался на другіе, а оставался постоянно краснымъ; то же самое случилось и съ другими цвѣтными лучами: каждый изъ нихъ, по преломленію, сохранилъ свой цвѣтъ. Ньютонъ подвергалъ также каждый изъ лучей нѣсколькимъ преломленіямъ посредствомъ многихъ призмъ, и во всѣхъ случаяхъ цвѣтъ луча не переменялся.

Вотъ претѣи опытъ: на нѣкоторомъ разстояніи отъ призмы Р, Нютономъ собранъ посредствомъ выпуклаго стекла цвѣтншй свѣтъ, и въ фокусѣ стекла получилъ солнечный или бѣлый свѣтъ.

Наконецъ, Нютономъ взялъ стекляннѹю призму, лежащую основаніемъ прямоуглыиъ треугольника. Перпендикулярно къ одной изъ ея меньшихъ сторонъ онъ приналъ солнечный лучъ, пропущенный въ стекляннѹю ковшину сквозь небольшое отверстіе. Такимъ образомъ въ 5 или 6 футовъ отъ призмы онъ получилъ на бѣломъ щитѣ цвѣтное изображеніе, на которомъ цвѣта были расположены въ обыкновенномъ ихъ порядкѣ. Обращая потомъ призму около ея оси, онъ замѣтилъ, что когда направление солнечнаго луча составляетъ съ бѣлѣннею стороною призмы уголъ мало различающійся отъ 60 градусовъ, то въ цвѣтнкомъ изображеніи на щитѣ изчезаетъ фіолетовый цвѣтъ, который показывается въ другомъ мѣстѣ ковшины; продолжалъ поворачивать призму онъ усмотрѣлъ, что послѣ фіолетоваго цвѣта изчезаетъ синій, потомъ голубой, и такъ далѣе, и наконецъ красный.

Изъ сихъ главныхъ и многихъ другихъ второстепенныхъ опытовъ, Нютономъ вывелъ слѣдующія заключенія:

1°. Свѣтъ не есть простое однородное вещество, но разлагается на *семь* разнородныхъ цвѣтнхъ лучей съ безчисленными ихъ опытами.

2°. Первоначальныя цвѣта не разлагаются.

3°. Отъ соединенія первоначальныхъ семи цвѣтовъ происходитъ бѣлый.

4°. Ощущеніе такъ называемаго *тѣрнаго цвѣта* происходитъ отъ отсутствія всякаго цвѣта. И такъ, тѣло кажется намъ *тѣрнымъ*, когда оно не отражаетъ никакихъ лучей свѣта.

5°. Отраженіе одного первоначальнаго луча есть причина первоначальнаго цвѣта, замѣтаемаго нами въ тѣлахъ. И такъ если поверхность какого нибудь тѣла отражаетъ только *красные лучи*, то это тѣло покажется намъ совершенно краснымъ.

6°. Второстепенные или составные цвѣта (*secondaires* или *composees*) происходятъ отъ совокупленія первоначальныхъ по два, по три и проч. Такъ наприкладъ, если поверхность

тѣла отражаетъ лучи *желтые и голубые*, то она покажется намъ *зеленою*. Различіе между *составными* и *первоначальными зелеными* цвѣтами состоитъ въ томъ, что первый посредствомъ призмы разложился на первоначальные цвѣта: желтый и голубой, между тѣмъ какъ первоначальный зеленый цвѣтъ, подверженный сколькимъ угодно преломленіямъ, останется всегда зеленымъ.

7°. Бѣлый солнечный свѣтъ разлагается посредствомъ преломленія на разноцвѣтные лучи, и каждому цвѣтному лучу соответствуетъ особый показатель преломленія, который зависитъ отъ природы преломляющей среды. Наиболѣе преломляющійся лучъ есть *фіолетовый*, наименѣе — *красный*; *зеленый* лучъ, по преломляемости своей, занимаетъ середину между *фіолетовымъ* и *краснымъ*. Смол. REFRACTION (RAPPORT DE).

Вотъ самый краснѣйшій очеркъ теоріи разложенія свѣта, предложенной Нютономъ. При объявленіи сей теоріи, онъ допускалъ, что свѣтъ есть особенная жидкость, истекающая изъ свѣтящихся тѣлъ. Въ наше время почти всѣ физики соглашались въ томъ, что свѣтъ не есть особенная жидкость, но обнаруживается отъ сотрясенія атомовъ эфиръ. Объясненіе цвѣтовъ по *системѣ волненія* требуетъ подробнаго изложенія; желающіе ознакомиться съ этимъ предметомъ могутъ прибѣгнуть къ новѣйшимъ курсамъ Физики. Смол. также въ этомъ Лексиконѣ статьи: LUMIÈRE, ANNEAU X COLORÉS, ARC EN CIEL, и проч.

COULEURS ACCESSOIRES. Случайные цвѣта. Когда смотримъ пристально и довольно долго на какую либо окрашенную фигуру, наприкладъ на квадратикъ краснаго цвѣта, находящійся на бѣлой бумагѣ, то по провѣсствіи нѣкотораго времени увидимъ какъ около квадратика образуется родъ радуги, зеленого цвѣта. Если перестанемъ смотрѣть на красное изображеніе, а обратимъ зрѣніе на другое мѣсто бѣлой бумаги, то усмотримъ въ томъ мѣстѣ точно такой величины квадратикъ свѣтло-зеленаго цвѣта. Этотъ мнѣ зеленый цвѣтъ и называется *случайнымъ*. *Бюффонъ* произвелъ много опытовъ надъ случайными цвѣтами; онъ подвергнулъ

испытанію и другіе первоначальныя цвѣта, и напередъ слѣдующіе раздѣлы:

Красный цвѣтъ производить *Зеленый слухайный*.

Желтый *Голубой*.

Зеленый *Пурпуровый*.

Голубой *Красный*.

Черный *Бѣлый*.

Бѣлый *Черный*.

При послѣднемъ опытѣ предполагается, что бѣлый квадратикъ находится первоначально на черномъ полѣ.

Предложенныя физиками объясненія случайныхъ цвѣтовъ чинаштели найдутъ въ *Encyclopédie Méthodique, Mathématiques*, статьи: COULEURS ACCIDENTELLES и въ нѣкоторыхъ курсахъ Физики.

COULISSE или **RAINURE**. **ВЫЕМКА, ПАЗЪ, ДОЛЖЕЯ.**

COUP. (Мех.) **УДАРЪ.** Смощ. CHOC. Въ Исчисленіи Вѣроятностей *coup* значить *разъ, пріѣмъ, ударъ, бросаніе, игра*.—*Deux joueurs jouent à condition que celui qui gagne dix coups avant l'autre, gagne la partie; два игрока играютъ на условіи, что тотъ изъ нихъ, кто выиграетъ прежде десяти игръ, выигрываетъ и партію. On suppose qu'à chaque coup il puisse arriver deux événements etc.; предполагается, что при каждомъ пріѣмѣ, могутъ быть два случая и проч.*

COUP DE NIVEAU. **ПРІЕМЪ НИВЕЛИРОВКИ.**

Говорится о цѣломъ разстояніи между двумя нивелируемыми точками. Смощ. NIVELLER.

COUP FOUROYANT или **COMMOTION ÉLECTRIQUE.** **ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СОТРАСНЕНИЕ.**

COUP. (Геом.) **РАЗРѢЗЪ.** Слово преимущественно употребляемое въ Архитектурѣ, и вообще въ строительномъ искусствѣ. Въ Геометріи въ томъ же смыслѣ употребляютъ слово *сѣченіе*. Смощ. SECTION.

COUP DES PIERRES. **РАЗРѢЗКА КАМНЕЙ.**

Прикладная часть Начертательной Геометріи, предлагающая правила для разложенія свода (или другаго каменнаго сооруженія) на клинья (*coins*), также и способы, посредствомъ которыхъ каждому клину даютъ форму, определяемую чертежомъ.

Для историческихъ подробностей о состояніи искусства Разрѣзки Камней, отправляемъ къ предисловію книги: *Traité de Géométrie Descriptive*,

par M. Hachette, 1822. Въ немъ же сочиненіи чинаштели найдутъ и обстоятельное изложеніе правилъ сей науки. На Рускомъ языкѣ, руководствованъ по сему предмету помощъ слухайнаго кнѣга: *Начальныя основанія разрѣзки камней*, соч. *Потье*, переведенная *М. А. Савостьяновичемъ*, и изданная въспитъ съ Французскихъ текстовъ. Для подробнѣйшихъ же свѣдѣній въ этомъ искусствѣ, отправляемъ чинаштелѣ въ второй части сочиненія: *Cours élémentaire théorique et pratique de construction*, par Douliot.

COUPRE-CERCLE. **КРУЖАЛО;** циркуль для вырѣзыванія кружковъ; одна ножка его слабѣея по болѣешикъ разномъ, а другая, обыкновенная. — **ПЕРКА.**

COUPÉE. (Геом.) **АБСЦИССА, ОТСѢЧЕННАЯ.** Смощ. ABCISSE.

COUPER. (Геом.) **ПЕРЕСѢЧЬ, ОТСѢЧЬ.** *Ces deux lignes se coupent; эти два линіи пересѣкаются. Couper une portion de cône; отсѣчь часть конуса.*

COUPLE. (Мех.) **ПАРА СИЛЪ, ПАРА.** Такъ называется совокупность двухъ параллельныхъ силъ (P , — P) (черп. 4 Линіи VI) разныхъ между собою, дѣйствующихъ въ противоположныя стороны, и приложенныхъ къ неопредѣленной линіи AB .

Линія ab , изображающая перпендикулярное разстояніе между направленіями двухъ силъ P и P , называется *плечомъ пары* (*bras du couple*).

Для совершеннаго опредѣленія дѣйствія пары силъ, надобно знать 1° ея величину, то есть, моментъ пары; 2° ея направленіе, или, что все равно, положеніе ея плоскости, и 3° сторону вращательнаго движенія, которое она стремится произвѣсти.

Моментомъ пары или ея *усиліемъ* (*moment du couple* или *énergie du couple*) называется произведеніе силъ на плечо пары, то есть, $Px ab$.

Направленіе пары (*direction du couple*), или положеніе ея плоскости, опредѣляется перпендикулярно къ этой плоскости.

Для опредѣленія стороны вращательнаго движенія (*sens du mouvement de rotation*) предположимъ, что точка O , середина плеча ab , дѣлается неподвижною. Очевидно, что въ такомъ случаѣ пара (P , — P) будетъ стремиться сообщити плечу ab вращательное движеніе около точки O . Чтобы различити сторону вращательнаго движенія

изобразить из точки O перпендикуляр к плоскости пары, проведенный в ту сторону, где пришел, находящийся в надлежащем положении, увидеть бы вращательное движение происходящее отъ левой руки к правой. Все пары, для которых перпендикуляры имеют одинакия направления, называются *содействующими* (*couples de même sens*), а те, для которых перпендикуляры имеют противоположныя направления, именуются *противодействующими* (*couples de sens opposés*) въ отношеніи къ первымъ, и содействующими между собою.

Ося пары (*axe du couple*) называется линія, изображающая моментъ и направление пары, а иногда, одно только направление.

Равнодействующею парой (*couple résultant*) двухъ или нѣсколькихъ другихъ именуется такая пара, которая совершенно замѣняетъ дѣйствіе составляющихъ паръ (*couples composants*).

Приведемъ главныя предложенія, относящіяся къ теоріи паръ.

1.) *Пара можетъ быть перенесена по произволію въ своей плоскости, или въ плоскость ей параллельную, также и обращена какъ угодно, лишь бы только не перемѣнили стороны ея дѣйствія, и соединили неизмѣнливыми образомъ прежнее плечо съ новымъ.*

2.) *Пара можетъ быть замѣнена другою, содействующею съ нею парю, и коей моментъ равенъ моменту первой.*

3.) *Сколько бы ни было паръ, и какое бы положеніе они не имѣли, всегда возможно привести ихъ къ одной парѣ, которой легко опредѣлить какъ положеніе, такъ и моментъ.*

Для доказательства перваго предложенія, положимъ, что въ плоскости LK (черт. 5 Листъ VI) имѣемъ пару $(P, -P)$, приложенную къ прямой AB ; въ плоскости LK , или въ другой l_k , параллельной ей, беремъ линію ab , равную и параллельную AB . Соединимъ точку A съ b , а B съ a ; линія Ab и Ba пересѣкутся въ извѣстной точкѣ O , которая будетъ серединою прямыхъ Ab и Ba . Сверхъ того предполагаемъ, что линія AB и ab соединены между собою неизмѣнливымъ образомъ. Приложимъ теперь къ каждой изъ двухъ точекъ a и b двѣ силы P' , P'' , равныя и параллельныя силѣ P ; такимъ образомъ получимъ въ плоскости l_k двѣ противодействующія пары $(P', -P')$ и

$(P'', -P'')$, равныя какъ между собою, такъ и парѣ $(P, -P)$, въ плоскости LK заключающейся. Такъ какъ пары $(P', -P')$ и $(P'', -P'')$ взаимно уничтожаются, то очевидно что чрезъ введеніе ихъ, дѣйствіе первоначальной пары $(P, -P)$ не измѣнилось. Но легко видѣть, что пары $(P, -P)$ и $(P'', -P'')$ также взаимно уничтожаются; дѣйствительно, двѣ силы равныя P и P'' , приложенныя къ точкамъ A и b , совокупляющіяся въ одну силу Q , параллельную имъ, равную ихъ суммѣ $P + P''$, и проходящую чрезъ середину O прямой приложенія Ab ; Слѣд. COMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES То же самое можно сказать и о силахъ $-P$ и $-P''$, приложенныхъ къ точкамъ B и a ; ихъ равнодѣйствующая Q' , равная ихъ суммѣ, пройдетъ чрезъ ту же точку O , и уничтожитъ силу Q ; следовательно останется только пара $(P', -P')$, которая равна первоначальной, перенесенной параллельно самой себѣ въ своей плоскости, или въ плоскость ей параллельную.

Докажемъ теперь, что пара можетъ быть обращена какъ угодно въ своей плоскости. Для этого положимъ что дана пара $(P, -P)$; пусть будетъ AB ея плечо (черт. 6 Листъ VI). Въ плоскости этой пары, подѣ произвольнымъ угломъ съ AB , проводимъ прямую $ab \equiv AB$ такъ чтобы AB и ab пересѣкались въ общей ихъ серединѣ O ; сверхъ того предполагаемъ, что линія AB и ab соединены между собою неизмѣнливымъ образомъ. Принимаемъ ab за плечо двухъ противодействующихъ паръ $(P', -P')$ и $(P'', -P'')$, равныхъ какъ между собою, такъ и первоначальной $(P, -P)$; противодействующія пары уничтожаются, следовательно введеніе ихъ не измѣнитъ дѣйствія пары $(P, -P)$. Но замѣтимъ теперь, что пары $(P, -P)$ и $(P'', -P'')$ также уничтожаются, ибо равнодѣйствующая Q двухъ равныхъ силъ P и $-P''$, проходящая чрезъ точку K взаимнаго ихъ пересѣченія, уничтожается прямопротивною силою Q' , изображающею равнодѣйствующую силѣ $-P$ и P'' , и которая проходитъ чрезъ точку L , на направленіи силы Q находящуюся. И такъ, останется пара $(P', -P')$, приложенная къ плечу ab , составляющему какой ни есть уголъ съ прежнимъ плечомъ AB ; эта пара совершенно замѣнитъ дѣйствіе первоначальной $(P, -P)$.

Второе предложение доказывается следующим образом: пусть дана пара $(P, -P)$ приложенная к плечу AB (черт. 7 Лист VI), и положим, что желаем заменить ее другою, приложенною к плечу BC . Откладываем BC на продолжении AB , и вводимъ двѣ пары $(P', -P')$ и $(P'', -P'')$, равныя между собою и прямопротивныя, приложенныя къ прямой BC , которая принимается за общее ихъ плечо. Очевидно, что дѣйствіе пары $(P, -P)$ не измѣнится. Если предположить теперь, что силы P и P' обратно пропорціональны длинамъ AB и BC , то есть что $\frac{P}{P'} = \frac{BC}{AB}$, то равнодѣйствующая $P + P''$ силъ P и $P'' = P'$, пройдетъ чрезъ точку B (Смол. COMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES), и уничтожитъ дѣйствіе силъ $-P$ и $-P''$, приложенныхъ къ той же точкѣ, но въ противоположную сторону. И такъ, останется только пара $(P', -P')$, имѣющая плечомъ свою линию BC ; эта пара замѣняетъ совершенно первоначальную $(P, -P)$. Изъ сего предположенія можно заключить, что дѣйствіе какой ни есть пары $(P, -P)$, приложенной къ плечу AB , можешь измѣряться ея моментомъ, то есть произведевіемъ $P \times \overline{AB}$ силы P на плечо \overline{AB} .

Положимъ теперь, что имѣемъ двѣ пары, заключающіяся въ одной плоскости; посредствомъ предыдущаго предположенія можно будетъ измѣнить каждую изъ нихъ такъ, чтобы плечи новыхъ паръ были равны между собою. Но, въ слѣдствіе перваго предположенія, пары могутъ быть переносимы и вращаемы въ своей плоскости по произволу; слѣдовательно, разнапрягаемыя начи пары, имѣющія плечи равныя, могутъ быть совмѣщены. чрезъ что получимся одна равнодѣйствующая пара, равная суммѣ или разности составляющихъ, смотря по тому, будутъ ли первоначальныя пары содѣйствующими или противоположными.

Точно такимъ образомъ докажемъ, что двѣ пары, заключающіяся въ плоскостяхъ параллельныхъ, совокупляются въ одну, равную суммѣ или разности составляющихъ паръ, и, очевидно, что это предположеніе можешь быть распространено на какое угодно число паръ, находящихся въ одной плоскости, или въ плоскостяхъ параллельныхъ между собою.

Когда пары заключаются въ разныхъ плоскостяхъ, не параллельныхъ между собою, то совокупляются въ одну равнодѣйствующую пару по правилу параллелограмма силъ. Дѣйствительно, положимъ что даны двѣ пары $(P, -P)$ и $(Q, -Q)$, заключающіяся: первая, въ плоскости IK (черт. 8 Лист VI), а вторая въ LM ; пусть будетъ XU пересѣченіе двухъ плоскостей. Обращемъ пару $(P, -P)$ въ своей плоскости такъ, чтобы плечо ея AB приняло положеніе, параллельное правой XU , и измѣнимъ это плечо въ другое тл, равное напирѣть линейной единицѣ. Потомъ переносимъ пару до совпаденія плеча тл съ прямою тл на линіи XU ; такимъ образомъ получимъ пару $(P', -P')$. Дѣлаемъ то же самое съ парою $(Q, -Q)$; измѣнивъ плечо ab въ тл, и совмѣстивъ его послѣ измѣненія съ линіею тл на общемъ пересѣченіи плоскостей, получимъ пару $(Q, -Q)$. И такъ, первоначальныя пары $(P, -P)$ и $(Q, -Q)$ будутъ замѣнены двумя парами $(P', -P')$ и $(Q, -Q)$, приложенными къ общему плечу тл, совпадающему съ прямою XU . Совокупляя силы P' и Q , приложенныя къ точкѣ т, получимъ по правилу параллелограмма силъ равнодѣйствующую R , коей величина и направленіе будутъ совершенно извѣстны. Дѣлая то же самое съ силами $-P'$ и $-Q$, приложенными къ точкѣ n, найдемъ равнодѣйствующую $-R'$, имѣющая относительно прямой тл такое же положеніе какъ и R , но направляющаяся въ противоположную сторону. Слѣдовательно, пары $(P, -P)$ и $(Q, -Q)$ можно будетъ замѣнить одною парою $(R, -R)$, приложенною къ плечу тл. Если бы имѣли третью пару $(S, -S)$, то совокупивъ ее съ парою $(R, -R)$, нашли бы точно такимъ образомъ равнодѣйствующую имъ пару $(R', -R')$, которая замѣнила бы дѣйствіе трехъ паръ $(P, -P)$, $(Q, -Q)$, $(S, -S)$, и такъ далѣе.

Согласно съ извѣстіемъ многихъ математиковъ мы дуваемъ, что теорія паръ доставляетъ самыя простые и легкіе способы для рѣшенія вопросовъ, относящихся къ совокупленію и равновѣсію силъ, приложенныхъ къ неизмѣняемой системѣ. Эта теорія, заслуживающая особеннаго вниманія, принадлежитъ Г-ну Поинсо (Poinsot). Для дальнѣйшихъ подробностей отсылаемъ читателя къ сочиненію *Éléments de Statique, par Poinsot*, или къ Русскому переводу этой книги: Наталъ-

ныя основніа Статисти, 1851 г. переводъ М. Ле-
нина.

COURANT. (Физ.) **ТОКЪ.—ТЕЧЕНИЕ, ПОТОКЪ.**
Courant électrique, электрическій токъ.

COURANTES (COORDONNÉES). См. **COOR-
DONNÉES.**

COURBE. (Геом.) **КРИВАЯ ЛИНІЯ, КРИВАЯ.**
Линія, коей σημѣта безконечно малыя части
имѣютъ различныя направленія. Такъ обыкновен-
но опредѣляютъ кривую линію; но намъ кажет-
ся, что это опредѣленіе, а также и другія, пред-
лагаемыя для объясненія понятія о кривыхъ,
равно неудовлетворительны. Въ подтвержденіе
этого мнѣнія, приводимъ слова *Д'Аламберта* о
линіяхъ вообще (См. въ *Encyclopédie Méthodique*
смыслу **СОУВАЖ**).

„Весьма трудно предположить о линіяхъ поня-
тіе, болѣе вразумительное того проспаго поня-
тія, которое заключается для насъ въ самыхъ
словахъ: *прямой и кривой*. Можете быть самое
точное опредѣленіе линій есть слѣдующее: *прямая*
линія есть кратчайшее разстояніе между
двумя точками, а кривая есть линія, проведен-
ная отъ одной точки къ другой не по кратчай-
шему пути. Но первое изъ сихъ опредѣленій
выражаетъ скорѣе второстепенное свойство
прямой линіи, тѣмъ ея сущность; второе же,
сверхъ того что заключаетъ въ себѣ только
свойство отрицательное, причисливаетъ споль-
но же совокупленію конечныхъ прямыхъ, сосре-
доточенныхъ между собою какіе ни есть углы,
какъ и собственно *кривой линіи*, которую мо-
жно разсматривать какъ совокупность беско-
нечно малыхъ прямыхъ, пересѣкающихся подъ
углами, безконечно мало разнѣняющимися отъ
180°. Кажется, лучше бы не предлагали никакого
опредѣленія прямой и кривой линіямъ по при-
чинѣ трудности, а можете быть и совершенной
невозможности, привести ихъ объясненіе къ по-
нятію, болѣе простому нежели то, которое
онѣ представляющъ нашему уму самъ собою.“

Кривыя линіи раздѣляются на *плоскія* (*courbes*
planes или *courbes à simple courbure*) и на *кривыя*
двойной кривизны (*courbes à double courbure*). Пер-
выя могутъ быть начертаны на плоскости;

вторыя, напротивъ того, не могутъ лежать
всѣми своими точками на одной плоскости*).

Для изслѣдованія *плоской кривой* чаще всего
принимаютъ ея плоскость за одну изъ коорди-
натныхъ, напримѣръ за плоскость xy ; См. **COOR-
DONNÉES**. Въ такомъ предположеніи, кривая
будетъ опредѣляться двумя уравненіями $z=0$
и $f(x,y)=0$. Для простоты координаты пред-
полагаются прямоугольными. Уравненія $z=0$ и
 $f(x,y)=0$, разсматриваемыя отдѣльно, прина-
длежатъ: первое, плоскости xy , а второе, цилин-
дрической поверхности, коей производящая пер-
пендикулярна къ этой плоскости. И такъ, *плос-*
кую кривую линію принимають за пересѣченіе
одной изъ координатныхъ плоскостей съ цилин-
дрическою поверхностію, перпендикулярною къ
этой самой плоскости. Замѣтимъ, что при раз-
сматриваніи *плоской кривой* употребляютъ обы-
кновенно только одно уравненіе $f(x,y)=0$; но,
въ такомъ случаѣ, первое уравненіе, $z=0$, под-
разумѣвается.

Кривыя двойной кривизны разсматриваются
также какъ пересѣченія двухъ поверхностей;
но ни одна изъ сихъ послѣднихъ не должна быть
плоскою. Если изобразимъ чрезъ $f(x,y,z)=0$ и
 $F(X,Y,Z)=0$ уравненія этихъ двухъ поверхно-
стей, то кривая ихъ пересѣченія, для которой
должно быть $X=x, Y=y, Z=z$, опредѣлится
двумя уравненіями

$$f(x,y,z)=0 \text{ и } F(x,y,z)=0,$$

изъ которыхъ можно также вывести два слѣ-
дующія:

$$y=\varphi(x) \text{ и } z=\psi(x).$$

Эти два уравненія принадлежатъ проеціямъ
кривой пересѣченія на координатныхъ плоско-
стяхъ xy и xz . Очевидно, что уравненія $y=\varphi(x)$

* *Д'Аламбертъ*, въ VIII томѣ своихъ *Opusculs Mathématiques* въ Разсужденіи подъ заглавіемъ: *Sur les courbes à courbure multiple*, употребляетъ наименованія *courbe à triple courbure*, *à quadruple courbure*, и вообще *à multiple courbure* (кривая тройкой, четверной и вообще кратной кривизны). По *Д'Аламберту*, линія *A* будетъ двойной кривизны, ежели кривая *B*, перпендикулярная къ общему сѣченію беско-
нечно близкихъ плоскостей, опредѣляющихъ положеніе эле-
ментовъ линіи *A*, есть плоская кривая. Въ противномъ слу-
чаѣ кривая *B* будетъ тройкой, и вообще кратной кривизны. — Сколько намъ извѣстно никто, кромѣ *Д'Аламберта*, не употребляетъ этихъ наименованій.

и $z = \psi(x)$ можно принимать за уравнения двух цилиндрических поверхностей, соотвѣстственно перпендикулярныхъ плоскостямъ xu и xz ; взаимное пересѣченіе сихъ поверхностей образуетъ разсматриваемую кривую двойкой кривизны. Для примѣра отсылаемъ читателей къ кривымъ: **HÉLICE, LOXODROMIE** и проч.

Можно съ достовѣрностію полагать, что значіи древнихъ геометровъ о кривыхъ ограничивались свойствами *круговой линіи*. Впослѣдствіи, когда представились новые вопросы, какъ напримѣръ вопросъ *объ удвоеніи куба, задача о раздѣленіи угла на три равныя части, о квадратурѣ круга*, тогда начали разсматривать и другія, сложнѣйшія кривыя, какъ то: *коническія сѣченія, контоиду, циклоиду, коадтрису и спирали Архимедовы*; Смол. **CONIQUES (SECTIONS), CONCHOIDE, COISSOIDE, QUADRATRICE, SPIRALE**. Но всѣ эти изслѣдованія, основанныя на способахъ сличеніиическихъ, были болѣе или менѣе одностороннія, и не подвигали теоріи кривыхъ линій подъ правила общія, безъ которыхъ всякая теорія неудовлетворительна. Знаменитый Декартъ, жившій въ первой половинѣ XVII вѣка, сдѣлалъ самый счастливый переворотъ въ Геометріи кривыхъ линій, придумавъ выражать всякую кривую уравненіемъ между двумя перекрѣнными величинами, называемыми *координатами*, и опредѣляющими положеніе какой нѣ есть точки на кривой. Сочиненіе Декарта, изданное на Французскомъ языкѣ подъ заглавіемъ *Geométrie*, въ которомъ онъ излагаетъ свои открытія, напечатано въ первый разъ въ 1637 году.

Многіе авторы приписываютъ также Декарту первую мысль о приложеніи Алгебры къ рѣшенію опредѣленныхъ геометрическихъ вопросовъ; но первые опыты по сему предмету находятъ у нѣкоторыхъ математиковъ, жившихъ прежде Декарта, и преимущественно у Французскаго математика *Vieta (Viète)*. Прибавимъ къ этому, что гораздо прежде Декарта выражали свойства нѣкоторыхъ кривыхъ отношеніемъ прямыхъ линій, параллельныхъ между собою, и проведенныхъ изъ всѣхъ точекъ кривой къ постоянной прямой линіи. Въ этомъ способѣ усматриваемъ основную мысль Декартова анализа; но никто, до него, не замѣтилъ всей важности такого воззрѣнія на кривыя, и не указалъ на об-

ширную пользу, которую можно было извлечь изъ подобныхъ соображеній. Одинъ изъ первыхъ опытовъ Декарта въ новотъ его анализѣ было рѣшеніе слѣдующей общей задачи, надъ которою изцетно трудились первооснователи изъ древнихъ геометровъ *Демидъ, Аполлоній и Паппъ*. Дано на плоскости какое нѣ есть число прямыхъ линій A, B, C, D, \dots ; найди такую точку M , изъ которой можно бы было провести столько же другихъ прямыхъ a, b, c, d, \dots , по одной къ каждой изъ данныхъ A, B, C, D, \dots , составляющихъ съ послѣдними данныя же углы, и съ тѣмъ условіемъ: чтобы произведеніе двухъ изъ проведенныхъ линій, напримѣръ $a \times b$, было въ данномъ отношеніи къ квадрату c^2 третьей, когда даны три прямыя A, B, C ; или къ произведенію $d \times e$ двухъ остальныхъ, если даны четыре линіи A, B, C, D ; или, когда дано нѣтъ прямыхъ, то произведеніе трехъ линій должно быть въ данномъ отношеніи къ произведенію двухъ остальныхъ, помноженному еще на известную постоянную прямую, и такъ далѣе. Декартъ, въ своей Геометріи, предложилъ рѣшеніе этого вопроса, во всей его общирности. Читатели найдутъ частный случай наложенной задачи въ слѣдующемъ: **CONCHOIDE PARABOLIQUE**.

Мы не будемъ объяснять какии образомъ составлялось по способу Декарта уравненіе кривой на основаніи описаннаго ея свойства: примѣры составленія такихъ уравненій помѣщены во многихъ статьяхъ нашего Лексикона. Но чтобы данъ читателямъ нѣкоторое понятіе о пріемахъ Декарта при изслѣдованіи кривыхъ, мы приведемъ здѣсь хотя одинъ изъ его способовъ, напримѣръ, способъ для проведенія касательныхъ къ плоскимъ кривымъ.

Положимъ, что имѣемъ крестую AMB (черт. 9 Листъ VI), опредѣляемую уравненіемъ между прямоугольными координатами $AP = x$ и $PM = y$. Изъ нѣкоторой точки C оси AX описываемъ кругъ, пересѣкающій кривую по крайней мѣрѣ въ двухъ точкахъ N и N' . Въ этихъ точкахъ ординаты NQ и $N'Q'$ будутъ общія кривой и кругу. Если будемъ теперь уменьшать радіусъ CN круга, то точки N и N' начнутъ приближаться одна къ другой, и наконецъ, при надлежащей величинѣ радіуса, онѣ совѣстятся въ одну, опитченную на чертѣхъ буквою M . Въ

этой точки M радиус MC будет перпендикулярен к кривой, а следовательно также и к касательной TMT' . И так, решение задачи о проведении касательной к кривой линией, приводится к определению радиуса MC .

Для достижения этой цели, Декарт составил уравнение, заключающее в себя неопределенный радиус CN и расстояния ординат точек пересечения кривой с кругом от начала A . При двух точках пересечения N и N' , упомянутое уравнение будет второй степени, ибо оно должно определять величины AQ и AQ' ; но если предположим, что точки N и N' совмещаюся в одну M , то и ординаты NQ и $N'Q$ совмещаюся с ординатою MP , а следовательно в таком случае $AQ = AQ' = AP$, а это значить, что уравнение второй степени будет иметь два корня *равные*. Выразив алгебраически равенство этих двух корней, получим уравнение для определения искомого радиуса CM .

Положим, например, что кривая AMB есть *эллиптическая парабола*, определяемая уравнением $y^2 = px$, в котором p изображает ее параметр. Пусть будет $AC = a$, радиус $CN = r$; следовательно, для точек N и N' , получим в одно время

$$r^2 = (a - x)^2 + y^2 \quad \text{и} \quad r^2 = px,$$

откуда

$$r^2 = (a - x)^2 + px \quad \text{или} \quad x^2 - (2a - p)x + a^2 - r^2 = 0.$$

Чтобы корни этого уравнения были равны между собою, должно быть $\left(\frac{2a-p}{2}\right)^2 = a^2 - r^2$,

откуда $r = \sqrt{p(a - \frac{p}{4})}$. Но $a = x + \overline{PC}$, $r^2 = x^2 + \overline{PC}^2$; следовательно

$$x^2 + \overline{PC}^2 = p(x + \overline{PC} - \frac{p}{4});$$

с другой стороны, так как $x^2 = px$, то и получим $px + \overline{PC}^2 = p(\overline{PC} - \frac{p}{4})$, откуда $\overline{PC} = \frac{p}{2}$. Этим выводом показываем, что поднормальная параболы равна полу-параметру, из чего уже весьма легко заключаем, что подкасательная равна удвоенной абсциссе.

Очевидно, что вместо сущаго круга можно употребить сущую прямую, что во многих случаях упростит решение задачи о проведении касательных к кривым линиям.

Декарт, в своей *Геометрии*, предлагает решить исследования о кривых, как то: опре-

деление особенных точек, предель кривой, разыскание наибольших и наименьших ординат, спроектирование корней алгебраических уравнений высших степеней посредством кривых линий, и проч. и проч.

До Декарта, авторы называли *геометрическими* те кривые, которые могут быть начерчены посредством циркуля и линейки; все другие кривые именовались *механическими*. Декарт исправил это разделение почитая в разряд *геометрических кривых* все те, для которых зависимость между криволинейными координатами выражается *алгебраически*; к разряду же *кривых механических* он отнес все те, для которых упоминалась зависимость не может быть выражена алгебраически.

Ныне, следуя *Лейбницу*, геометрические кривые называются *алгебраическими* (*courbes algébriques*), а механические, *трансцендентными* (*transcendantes*). И так, кривая называется *алгебраическою* в том случае, когда уравнение ее в прямоугольных координатах будет алгебраическое, а *трансцендентною*, когда определяющее ее уравнение будет трансцендентное.

Алгебраические кривые разделяются на *порядки* или *степени* (*ordres, degrés*), сообразно с степению уравнений, их определяющих. Прямая линия, выражаемая уравнением первой степени

$$Ax + By + C = 0,$$

составляет разряд линий *первой степени*; См. DROITE.

Конические кривые, определяемые общим уравнением

$$Ax^2 + Bx + Cxy + Dx + Ey + F = 0,$$

принадлежат к разряду кривых *второго порядка* или *степени*.

Кривые *третьего порядка* определяются общими уравнением

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx^2y + Dxy^2 + Ex^2 + Fy^2 + Gxy + Hx + Iy + J = 0,$$

и так далее.

Очевидно, что с возвышением порядка кривых линий увеличивается и число постоянных величин, входящих в общия их уравнения. Различные соотношения между сим постоянными величинами приводят к различным кривым; каждая из сих последних хотя и принадлежит к одному и тому же порядку, но пользуется особенными свойствами, отличаю-

меньше ее или другихъ. Чемъ выше степень общаго уравненія, тѣмъ будетъ больше и число различныхъ кривыхъ, определяемыхъ симъ уравненіемъ. Напримѣръ, общее уравненіе кривыхъ второго порядка достигаетъ четыре конечныя саченія: *кругъ, эллипсъ, параболу и гиперболу*. Общее уравненіе кривыхъ третьей степени приводитъ, по *Делеру*, къ 16 родамъ кривыхъ, допускающимъ до 80 описаній. Ясно, что число кривыхъ, определяемыхъ уравненіемъ одной и той же степени, должно возрастать весьма быстро по мѣрѣ увеличенія этой степени.

Прежде, кривыя второго ряда назывались *кривыми перваго рода (courbes du premier genre)*, кривыя третьяго порядка — *кривыми втораго рода*, и такъ далѣе. Причина такого раздѣленія состояла въ томъ, что уравненіе первой степени принадлежитъ прямой линіи, и следовательно кривая линія, собственно говоря, начинается только съ уравненій второй степени. Нынѣ это раздѣленіе вышло изъ употребленія.

Знаменитый *Ферматъ*, современникъ Декарта, обогатившій многія отрасли математическихъ наукъ своими глубокомысленными изслѣдованіями, подвинулъ впередъ и Геометрію кривыхъ. Переписка Фермата съ Робервалемъ доказываетъ даже, что большая часть изъ открытій Декарта была известна ему прежде появленія въ свѣтъ Декартовой Геометріи. Умалчивая о многихъ примѣчательныхъ изслѣдованіяхъ Фермата въ Геометріи, мы приведемъ здѣсь только способъ, придуманный имъ для опредѣленія *наибольшей и наименьшей величинъ*, и который, по времени своего изобрѣтенія, конечно заслуживаетъ особенное вниманіе.

Способъ, о которомъ говоримъ, основанъ на той истинѣ, что когда какая либо величина, напримѣръ ордината кривой линіи, достигаетъ своего *наибольшаго или наименьшаго состоянія*, то, въ соприкосновеніи этого состоянія, приращеніе разсматриваемой величины равно нулю. Отсюда легко вывести правило, предлагаемое Ферматомъ для опредѣленія *наибольшей и наименьшей*; это правило состоитъ въ томъ, чтобы въ данное выраженіе, положимъ въ функцію $f(x)$, подставивши вмѣсто переменной x сперва $x + \epsilon$, а потомъ $x - \epsilon$, и уравнивъ оба вывода между собою, то если положимъ $f(x + \epsilon) = f(x - \epsilon)$, ра-

звѣтъ тогда *иногда* малую величину. По разложеніи функцій $f(x + \epsilon)$ и $f(x - \epsilon)$ по обыкновеннымъ правиламъ, умножившемъ равныя величины въ обѣихъ частяхъ уравненія $f(x + \epsilon) = f(x - \epsilon)$, и раздѣливъ остающіеся члены на величину степени приращенія, на какую только можно будетъ раздѣлить; положимъ потомъ $\epsilon = 0$, получимъ окончательное уравненіе, изъ котораго выводится уже значеніе x , обращающее величину функціи $f(x)$ въ *наибольшую или наименьшую*.

Чтобы показать употребленіе Ферматова способа, положимъ что ищется *наибольшая ордината эллипсидной иперболы*. Эта кривая (См. ANGUINÉE) определяется уравненіемъ.

$$y = \frac{a^2 x}{ab + x^2}.$$

Въ слѣдствіе сказаннаго выше получимъ

$$\frac{a^2(x+\epsilon)}{ab+(x+\epsilon)^2} = \frac{a^2(x-\epsilon)}{ab+(x-\epsilon)^2},$$

или

$$a^2bx + a^2b\epsilon + a^2x^2 - a^2x^2 - a^2x^2\epsilon + a^2\epsilon^2 = a^2bx - a^2b\epsilon + a^2x^2 + a^2x^2\epsilon - a^2x^2 - a^2\epsilon^2.$$

Это уравненіе, по сокращеніи и по раздѣленіи на ϵ , обратимъ въ слѣдующее:

$$ab - x^2 + \epsilon = 0,$$

откуда, положивъ $\epsilon = 0$, получимъ

$$x = \pm \sqrt{ab} \text{ и } y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^3}{b}}.$$

И такъ, наибольшая ордината эллипсидной иперболы, соотвѣствующая абсциссѣ \sqrt{ab} , будетъ $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^3}{b}}$.

Читатели, знакомые съ модною теоріею *наибольшихъ и наименьшихъ величинъ*, замѣтятъ безъ сомнѣнія недостаточность, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, изложеннаго Ферматова способа. Отсылаемъ для дальнѣйшихъ подробностей къ описанію MAXIMUM.

Ферматъ занимался также съ особеннымъ успѣхомъ опредѣленіемъ криволинейныхъ площадей; такого рода вопросы, въ его время, сопряжены были съ большими затрудненіями.

Геометрія Декарта не нашла во всѣхъ геометрахъ своего времени тѣхъ ревнителей, какихъ была въ правѣ ожидать. Между многими пропавшими, большая частію преспаръскими математиками, которые, не рѣшаясь изучить Новой Геометріи и отказавшись отъ старой, къ сожалѣнію были и *Робервалемъ*, зависявшимъ отъ которыхъ по-

лезными трудами в математических науках. Возражения Роберваля против теорий Декарта были все несовершенны, и свидетельствовали только об его истинности и пристрастии.

Французский математик Бонэ (Beaune), друг Декарта, оценил вполне Новую Геометрию. Он изучил ее во совершенствах, и, с целью распространения учения Декарта, написал полнотелыми примечания на его Геометрию, которыми все были одобрены самими авторами. Бонэ изложил также задачу, удержавшую его имя, и которую он предложил Геометрам своего времени; задача Бона примечательна тем, что была первой, в которой требовалось найти кривую линию по свойству ее касательной. Смол. BEAUNE (PROBLÈME DE).

После Бона в особенности занимались Геометрию Декарта Голландские и Фламандские математики, между которыми преимущественно известны: Шоотен (Schooten), Вассенаар (Vassenaar), Гугенс, де Витт (de Witt), Гудде (Huide), Ван-Гейрета (Van-Heurdt), Слус (Sluis) и некоторые другие.

Шоотен, с целью распространения учения Декарта, перевел его Геометрию на Латинский язык, и напечатал свой перевод с превосходными комментариями в 1649 году. Несколько лет спустя он перепечатал свой труд, обогатив его многими прибавлениями, как по примечаниям Бона, двумя письмами Гудда об уравнениях и способе наибольших и наименьших величин, одним письмом Ван-Гейрета о сращивании кривых и еще некоторыми другими любопытными замечаниями. Шоотен издал также собственным сочинением: *Exercitationes Geometricae*, изданным в 1646 году.

Мы думаем, что наши читатели прочтут без любопытства остроумный способ, о котором мы сейчас упомянули, и посредством которого сращивали кривой линии приводится к квадратуре криволинейной площади. Хотя некоторые и приписывают изобретение этого способа Ван-Гейрету, но, должно полагать, по свидетельству Валиса и Врункера, что он придуман прежде соотечественником их Виллелмом Нейлем (Neil). Вот этот способ: Положим, что дана кривая *OMA* (черт. 10

Лист VI), описанная кривоугольным координатным осями *OX*, *OY*. Пусть будет *PM* ордината точки *M*, *MN* нормальная к кривой в той же точке. Сверх того, изобразим через *I* какую ни есть посполвинную линию. Если составим следующую пропорцию: ордината *PM* относится к нормали *MN*, так как посполвинная линия *I* к четвертой пропорциональной, то изобразив эту последнюю линию *PM'*, и опустив ее на перпендикуляр *PM* из точки *P*, получим известную точку *M'*. Повторяя это самое построение для других точек первоначальной кривой *OMA*, определим столько же новых точек, коих совокупность образует новую кривую *OM'B*. Свойство последней кривой таково, что криволинейная площадь *OOM'P*, раздвинутая на посполвинную линию *I*, равна дуге *OM* первоначальной кривой *OMA*; отсюда заключаем, что если кривая *OM'B* салюцидима (salicible), то *OMA* будет спримальма. Легко усмотреть, что парабола, определенная уравнением $y^2 = px^2$, $y^2 = px^4$, $y^2 = px^6$... все спримальмы.

Этот способ, примечательный тем, что был придуман до изобретения Интегрального Ичисления, может быть доказан весьма простым образом посредством Анализа Безаключных. Действительно, если положим $OP = x$, $PM = y$, $PM' = y'$; то получим $MN = y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$ (Смол. NORMALE) и пропорция, о которой упомянуто выше, дословит

$$\frac{y}{y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}} = \frac{1}{y'}, \text{ откуда } y' = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}};$$

умножив последнее уравнение на dx , взяв интеграл, и разделив потом на I , получим

$$\frac{\int y' dx}{I} = \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}};$$

но так как $\int y' dx$ изображает площадь кривой *OM'B*, а $\int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$ дугу кривой *OMA* (Смол. AIRE, ARC), то отсюда и заключаем о справедливости предложенного построения.

Гугенс также обогатил Геометрию кривых своими трудами. Он изобрел весьма важную теорию *резервирующихся* или *звонков*, которую изложил в претей части своего сочинения *Horlogium oscillatorium*. Смол. DÉVELOPPEE

Предѣлы нашего Лексикона не позволяютъ намъ распространиться объ дальнѣйшихъ успѣхахъ Геометріи кривыхъ линій, или, какъ ее называли прежде, *Высшей Геометріи* (*Géométrie Sublime*). Впрочемъ, во многихъ старыхъ этой книги, читатели найдутъ нѣкоторыя подробности по сему предмету. Смол. ASYMTOTE, BRANCHE, CONSTRUCTION, CONTACT, CRAMER (PARADOXE DE), FAMILLE DE COURBES, POINTS SINGULIERS, QUADRATURE, RECTIFICATION, TANGENTE и проч. и проч.

Сверхъ математиковъ, о которыхъ уже говорено въ этой статьѣ, почти всѣ геометры XVII и XVIII столѣтій способствовали трудами своими усовершенствованію теоріи кривыхъ линій. Поменуемъ здѣсь главнѣйшихъ изъ нихъ: *Чирнгауза*, *Паскаля*, *Барроу* (*Barrow*), *Нютонъ*, *Лейбницъ*, *Вольфъ*, *Маркизъ де л'Опитала*, *Яковъ* и *Иванъ Бернулли*, *Маклоренъ*, *Стирлингъ*, *Гисней* (*Guisné*), *Клеро*, *Эйлеръ*, *д'Аламбертъ*, *Аббатъ де Гюа* (*Gua*), *Крайеръ*, *Монжъ* и нѣкоторые другіе.

Въ заключеніе приводимъ заглавія нѣкоторыхъ сочиненій, въ которыхъ можно почерпнуть обширныя познанія въ теоріи кривыхъ линій:

Нютонъ: Enumeratio linearum tertii ordinis.
Маклоренъ: Geometria organica.

Маркизъ де л'Опитала: Analyse des infiniment petits.—Traité analytique des sections coniques et de la construction des lieux géométriques, 1707.

Гисней: Application de l'Algèbre à la Géométrie.

Клеро: Recherches sur les courbes à double courbure.

Аббатъ де Гюа: Usages de l'Analyse de Descartes и проч.

Эйлеръ: Introductio in analysin infinitorum. Lausannae 1748.—Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes.

Крайера: Introduction à l'Analyse des lignes courbes. Genève, 1750.

Лакроа: Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral, 3 тома in 4°.

Коши: Leçons sur les applications du calcul infiniésimal à la Géométrie; 2 тома 1826 г.

POURSUITE (COURBE или LIGNE DE). (Геом.)
ПОГОННАЯ КРИВАЯ. Такъ назыв. *Буверъ*

кривую, образуемую равноотрѣзными движеніемъ корабля, преслѣдующаго другой корабль, который идетъ по прямой линіи. Буверъ предложилъ рѣшеніе этого вопроса въ *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* за 1752 годъ. Въ томъ же томѣ *Мопертюи* помѣстивъ свое рѣшеніе задачи о погонной кривой, распространивъ способъ на томъ случай, когда преслѣдуемый корабль описываетъ не прямую линію, а какую ни есть данную кривую.

Положимъ, что преслѣдующій корабль находится въ точкѣ *A* (черт. 1 Листъ VII), а преслѣдуемый въ *B*; пусть будетъ *BC* направленіе, по которому идетъ корабль *B*. Изъ точки *A* возставимъ перпендикуляръ *AQ* къ направленію *BC*, и беремъ линію *AX* за ось *x*-овъ, а *AU*, перпендикулярную къ *AX*, за ось *y*-овъ. Линіи *AQ=a* и *QB=b* будутъ извѣстны, а также и уголъ *BAQ=φ*, котораго тангенсъ равенъ отношенію $\frac{BQ}{AQ} = \frac{b}{a}$. Положимъ, что корабль *A* достигъ положенія *M*; пусть будутъ *AP=x*, *PM=y* координаты этой точки, а *s* дуга *AM*.

Въ то же время корабль *B* пройдетъ нѣкоторое приложинное пространство, закрѣпимъ *BE*. Но такъ какъ корабль *A* непрерывно измѣняетъ свой путь къ идущему по направленію *BC* кораблю *B*, то ясно что линія, соединяющая носъ корабля *A* съ его кормою, будетъ также непрерывно направлена къ движущейся точкѣ *B*; следовательно прямая *TMB* должна быть касательною къ погонной кривой. Вотъ одно условіе; другое выводится изъ того соображенія, что если означимъ чрезъ *n* и *m* скорости кораблей *A* и *B*, то дуга *AM=s* и прямая *BE*, или есть пространства, перейденныя кораблями *A* и *B*, будутъ пропорціональны угламъ *n* и *m*. Итакъ $s : BE :: n : m$, откуда $BE = \frac{m}{n} s$. Сверхъ того, въ слѣдствіе перваго условія, и по причинѣ подобія треугольниковъ *MTP* и *ETQ*, имѣемъ

$$\overline{TP} \cdot \overline{PM} : \overline{TQ} \cdot \overline{QB};$$

но \overline{TP} есть подкасательная кривой, почему и равно $y \frac{dx}{dy}$; $\overline{PM}=y$, $\overline{TQ}=\overline{AQ}-\overline{AP}+\overline{TP}=a-x+y \frac{dx}{dy}$,

$\overline{QB}=BE+\overline{BQ}=\frac{m}{n} s+b$; следовательно

$$y \frac{dx}{dy} : y = a-x+y \frac{dx}{dy} : \frac{m}{n} s+b,$$

откуда получимъ

$$\left(\frac{m}{n}x + b\right) \frac{dx}{dy} = a - x + y \frac{dx}{dy}$$

или

$$\frac{m}{n}x = -b + (a-x) \frac{dy}{dx} + y.$$

Если положимъ дифференциалъ этого уравненія, заменивъ ds выраженіемъ $dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$, и помо-

жимъ $\frac{dy}{dx} = p$, то получимъ

$$\frac{m}{n} \sqrt{1+p^2} = (a-x) \frac{dp}{dx},$$

откуда

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{dx}{a-x}.$$

Интегралъ этого уравненія будетъ

$$\log(\sqrt{1+p^2} + p) = \log \left[c^{\frac{m}{n}} (a-x)^{-\frac{m}{n}} \right],$$

или просто

$$(1) \quad \sqrt{1+p^2} + p = c^{\frac{m}{n}} (a-x)^{-\frac{m}{n}},$$

разумя подъ c постоянную произвольную вели-

чину, которая определяется изъ того условія, что при $x=0$, имѣемъ $\frac{dy}{dx} = p = \tan \theta = \frac{b}{a}$. Следова-

тельно

$$\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} + \frac{b}{a} = c^{\frac{m}{n}} a^{-\frac{m}{n}},$$

откуда

$$(2) \quad c^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \left(\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} + \frac{b}{a} \right).$$

Для краткости удержимъ въ вычисленіи величину

Замѣтимъ теперь, что по причинѣ

$$\left(\sqrt{1+p^2} + p \right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2} + p} = \sqrt{1+p^2} - p,$$

формула (1) приметъ видъ

$$\sqrt{1+p^2} - p = c^{-\frac{m}{n}} (a-x)^{\frac{m}{n}};$$

вычтя последнее уравненіе изъ (1), и замѣнивъ p равною величинѣ $\frac{dy}{dx}$, получимъ

$$(3) \quad 2dy = c^{\frac{m}{n}} (a-x)^{-\frac{m}{n}} dx - c^{-\frac{m}{n}} (a-x)^{\frac{m}{n}} dx.$$

Интегралъ этого уравненія представляеть два случая, смотря по тому, будутъ ли скорости m и n различны, или равны между собою. Въ первомъ предположеніи $\frac{m}{n}$ будетъ отлично

отъ единицы, и следовательно интегралъ уравненія (3) будетъ

$$(4) \quad 2(y+c') = -\frac{c^{\frac{m}{n}}}{\frac{m}{n}+1} (a-x)^{-\frac{m}{n}+1} + \frac{c^{-\frac{m}{n}}}{\frac{m}{n}+1} (a-x)^{\frac{m}{n}+1}$$

разумя подъ c' постоянную произвольную величину, которая определяется тѣмъ условіемъ, что при $x=0$, имѣемъ $y=0$; следовательно

$$2c' = -\frac{c^{\frac{m}{n}} a^{-\frac{m}{n}+1}}{-\frac{m}{n}+1} + \frac{c^{-\frac{m}{n}} a^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} \\ = \frac{an}{n^2-m^2} \left[(n-m)c^{-\frac{m}{n}} a^{\frac{n}{n}} - (n+m)c^{\frac{m}{n}} a^{-\frac{m}{n}} \right].$$

Если положимъ, что движеніе корабля B начнется отъ точки Q , по $BQ=b=0$, и величина $c^{\frac{m}{n}}$, въ силу уравненія (2), обратится въ $a^{\frac{m}{n}}$; следовательно $2c' = -\frac{2am}{n^2-m^2}$; подставляя эту величину въ уравн. (4), найдемъ

$$(5) \quad 2 \left(y - \frac{am}{n^2-m^2} \right) = -\frac{n}{n+m} a^{-\frac{m}{n}} (a-x)^{-\frac{m}{n}+1} - \frac{n}{n-m} a^{\frac{m}{n}} (a-x)^{-\frac{m}{n}+1}.$$

Вопъ уравненіе погонной кривой въ томъ предположеніи, что скорости кораблей различны, и что курсъ удаляющагося корабля перпендикуляренъ къ линіи, соединяющей его съ другимъ кораблемъ въ началѣ погони. Чтобы найти въ какой точкѣ N корабль A настигнетъ корабль B , стоимъ нѣсколько положимъ $x=a$; ордината \overline{QN} , соответствующая этому значенію x , будетъ искомое разстояніе точки N отъ извѣстной точки Q . Вторая часть уравн. (5), для $x=a$, обращается въ 0 когда $n>m$, а въ ∞ , когда $n<m$. Второе предположеніе приводитъ къ безконечной величинѣ для y , и показываешь невозможность встрѣчи двухъ кораблей, что и очевидно. Но когда $n>m$, то получимъ

$$y = \overline{QN} = \frac{am}{n^2-m^2}.$$

Напримѣръ, если бы скорости корабля A была вдвое больше скорости корабля B , то для разстоянія \overline{QN} нашли бы $\frac{2}{3}a$.

Когда скорости двухъ кораблей равны, то $\frac{m}{n}=1$, и уравн. (5) приметъ видъ

$$2dy = c(d-x)^{-1} dx - c^{-1}(a-x) dx;$$

вниз интегрируя, получимъ

$$2(y+c) = -c \log(a-x) + \frac{c^{-1}(a-x)^2}{2}.$$

Для опредѣленія постоянной величины c' замѣчаемъ, что при $x=0$ и $y=0$; следовательно

$$2c' = -c \log a + \frac{c^{-1}a^2}{2};$$

если положимъ, какъ и выше, что движеніе корабля B начинается отъ точки Q , то найдемъ $c'=a$, въ слѣдствіе чего

$$(6) \quad 2\left(y + \frac{a}{2}\right) = a \log\left(\frac{a}{a-x}\right) + \frac{(a-x)^2}{2a}.$$

Очевидно, что въ этомъ предположеніи корабль A не настигнетъ корабля B ; невозможность встрѣчи обнаруживается пошчасъ и изъ уравн. (6); дѣйствительно, положивъ въ немъ $x=a$, находимъ $y=\infty$.

Уравненіе (6) показываетъ, что погонная кривая будетъ алгебраическая, когда скорости двухъ кораблей различны, но соизмѣрны между собою. Но если скорости равны, то погонная кривая будетъ трансцендентная, ибо уравн. (6), опредѣляющее ее въ этомъ случаѣ, заключаетъ въ себя функцію логарифмическую.

Courbes organiques. Органическія кривыя. Плоскія кривыя, описываемыя посредствомъ угловъ и прямыхъ линій. Положимъ, напримѣръ, что два угла QPR и $Q'P'R'$ (черт. 11 Листъ VI) обращаются около двухъ неподвижныхъ точекъ P и P' такъ, что пересѣченіе N сторонъ PR и $P'R'$ движется по данной прямой AB . Въ такомъ предположеніи пересѣченіе M двухъ другихъ сторонъ PQ и $P'Q'$ будетъ описывать коническую кривую. Для описанія оныхъ коническихъ кривыхъ между собою, поступаемъ слѣдующимъ образомъ: на линіи PP' строимъ сегменты круга измѣряющей уголъ, равный дополненію данныхъ угловъ QPR и $Q'P'R'$ къ четырѣмъ прямымъ. Если данная прямая AB пересѣчетъ круговую дугу PDP' въ двухъ точкахъ, то коническая кривая будетъ гиперболою; если AB будетъ касательною къ дугѣ PDP' , то получится парабола; наконецъ, если прямая AB союветъ не встрѣтитъ дуги PDP' , то описанная кривая будетъ эллипсомъ. Удержавъ приведенное сей-часъ спроектіе, и предположивъ что линія AB удаляется на бесконечное разстояніе отъ PP' , такъ что стороны PR и $P'R'$ при движеніи угловъ QPR , $Q'P'R'$ остаются параллельными между собою, окажется, что описанная точкою M кривая будетъ кругъ.

Когда предположимъ что точки N описываютъ не прямую линію, а коническую кривую, то точка M опишетъ кривую третьего порядка.

Органическія кривыя изрѣдкомъ Махлеронами; онъ предложилъ изслѣдовать оныя въ описаніи саркома: *Geometria organica*. Описываетъ также, для некоторыхъ подробностей объ этомъ же предметѣ къ VIII книгѣ Хитическихъ Сочинѣй Маркиза де Л'Опитала.

Courbe polygon. Многоугольная кривая. Кривая линія, принимаемая за многоугольникъ, состоящій изъ бесконечнаго числа сторонъ. При изслѣдованіи кривыхъ на основаніи теоріи предельныхъ или бесконечно малыхъ величинъ и поему подобныхъ способовъ, мы всегда разсматриваемъ кривую какъ многоугольникъ; это значитъ, что принимаемъ кривую за предѣлъ вписанныхъ и описанныхъ около нея многоугольниковъ. Смол. LIMITE, INFINIMENT PETIT, POLYGONE.

Courbes anaclastiques. Анакластическія, диотрические кривыя. Такъ называлъ Французскій математикъ Мейранъ (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1740, II) кривыя, усматриваемыя чрезъ предомненіе. Такова напримѣръ кривая, которую усматриваютъ артель на плоскомъ дѣлѣ сосуда, наполненнаго водою.

Courbes anodonnées. Розаковидныя кривыя. Такъ называлъ Итальянскій математикъ Гвидо Грандо особеннаго рода кривыя, которыя могутъ быть начерчены геометрически въ кругѣ. Такого рода кривыя образуютъ нѣсколько листьевъ, и довольно похожи на розы, почему и получили названіе *rhodonnées* отъ Греческ. *rhodon*, роза.

Courbe analytique du visage de l'homme. Аналитическая кривая человѣческаго лица. Кривая, вымышленная довольно искусственнымъ Голландскимъ математикомъ Гуддомъ, и посредствомъ которой онъ пытался выразить какія угодно черты лица человѣческаго. Въ Лейбницескихъ *Акматахъ*, за 1700 годъ, Гуддъ сообщилъ Лейбницу объ этой сфранной мысли, и утвердилъ его, что онъ въ состояніи построить подобную кривую.

Courbe de Beaune или Courbe Beaunienne. Смол. BEAUNE.

COURBE DES ARCS НАН COMPAGNE DE LA CYCLOIDE (Смол.).

COURBES, или, употребительнѣе, LIGNES DE COUVURE. Линія кривизны. Смол. COURBURE DES SURFACES.

COURBES RÉCIPROQUES D'ÉQUILIBRATION.

(Мех.) ВЗАИМНЫЯ КРИВЫЯ РАВНОВѢСІЯ.

Положимъ что двѣ массы m и m' , связанныя нерастяжимою и совершенно гибкою нитью, которая свободно ходитъ по жолобу безконечно малаго блока C (черт. 12 Листъ VI), лежатъ на двухъ кривыхъ amA и bmB . Если допустить, что массы m и m' тяжелья, то онѣ вообще будутъ двигаться на кривыхъ. Но можно предложить себѣ вопросъ: по данной одной изъ двухъ кривыхъ опредѣлить другую такъ, чтобы массы m и m' , лежащія на нихъ, во всякъ своихъ положеніяхъ находились въ равновѣсіи. Двѣ кривыя, удовлетворяющія такому требованію, называются *взаимными кривыми равновѣсія*. Маркиз де *Оланта* первый рѣшилъ эту задачу (Acta Egdensia, 1795). Вскорѣ послѣ него, *Акоа* и *Монтъ Вернулли* предложили свои рѣшенія и способы для построения этого рода кривыхъ.

Примемъ центръ C безконечно малаго блока за начало координатъ, вертикальную линію CX за ось абсциссъ, а горизонтальную CY , за ось ординатъ. Пусть будутъ $\bar{CP} = x$ и $\bar{CP} = y$ координаты кривой amA , которую беремъ за данную; изобразимъ чрезъ $y = f(x)$ ея уравненіе. Сверхъ того, положимъ $\bar{Cp}' = x'$ и $\bar{p}'m' = y'$. Вопросъ состоитъ въ опредѣленіи зависимости y' къ x' .

Такъ какъ нить, къ концамъ которой привязаны массы m и m' , предполагается нерастяжимою, то длина ея будетъ постоянна; изобразимъ ее чрезъ l . Если означимъ чрезъ r и r' разстоянія \bar{mC} и $\bar{m'C}$ точекъ m и m' отъ начала координатъ C , то очевидно получимъ

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ и } r'^2 = x'^2 + y'^2,$$

и слѣдовательно, по причинѣ $r + r' = l$,

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2} = l.$$

Выразимъ теперь аналитически условіе равновѣсія двухъ тяжельхъ массъ m и m' . Для этого замѣтимъ, что такъ какъ въ настоящемъ случаѣ силы дѣйствуютъ посредствомъ блока, то онѣ, для равновѣсія, должны быть равны

между собою. Смол. POULIE. Слѣдовательно, изобразивъ чрезъ g силу тяжести, и разложивъ въсь gm , выраженный линіею \bar{mC} , по нормалю mN кривой amA и по направленію нити mR , получимъ двѣ составляющія \bar{mS} и \bar{mR} ; первая изъ нихъ произведетъ только давленіе на кривую, а вторая, направляющаяся по линіи нити, должна уравновѣситься равною ей силе $\bar{m'R'}$, которая отнесется къ массѣ m' , и дѣйствуетъ по направленію нити $m'R'$. Чтобы найти составляющую \bar{mR} , замѣтимъ, что изъ подобія треугольниковъ CmN и mRG , выходящихъ

$$\frac{\bar{mR}}{\bar{mG}} = \frac{\bar{Cm}}{\bar{CN}} \text{ или } \frac{\bar{mR}}{gm} = \frac{r}{x + pN},$$

откуда

$$\bar{mR} = \frac{gmr}{x + pN}.$$

Но pN изображаетъ поднормальную кривой amA , почему и вѣдемъ $pN = y \frac{dy}{dx}$, въ слѣдствіе чего предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$\bar{mR} = \frac{gmr}{x + y \frac{dy}{dx}}.$$

Точно такимъ образомъ получимъ для массы m' составляющую

$$\bar{m'R'} = \frac{gm'r'}{x' + y' \frac{dy'}{dx}};$$

но для равновѣсія должно быть $\bar{mR} = \bar{m'R'}$; слѣдовательно

$$\frac{mr}{x + y \frac{dy}{dx}} = \frac{m'r'}{x' + y' \frac{dy'}{dx}},$$

или

$$\frac{x dx + y dy}{m r dx} = \frac{x' dx' + y' dy'}{m' r' dx'}.$$

Дифференцируя уравненія $x^2 + y^2 = r^2$, $x'^2 + y'^2 = r'^2$, получаемъ выраженія

$$x dx + y dy = r dr \text{ и } x' dx' + y' dy' = r' dr',$$

въ слѣдствіе которыхъ предыдущая формула обратится въ

$$m \frac{dr}{dx} = m' \frac{dr'}{dx'} \text{ или } m \frac{dx}{dr} = m' \frac{dx'}{dr'};$$

но, съ другой стороны, $r + r' = l$, откуда $dr' = -dr$, слѣдовательно

$$m dx + m' dx' = 0.$$

Интегрируя это уравненіе, находимъ

$$mx + m' x' = C,$$

разумѣя подъ C постоянную величину.

Закликая теперь, что выражение $\frac{ma+m'a'}{m+m'}$,

равное постоянному количеству $\frac{C}{m+m'}$, изображает вертикальное расстояние центра тяжести двух масс m и m' от начала координат; следовательно, для равновесия сих масс, общий их центр тяжести должен постоянно находиться на одной и той же горизонтальной линии.

Уравнения

$$y = f(x), \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad x'^2 + y'^2 = r'^2 \\ r + r' = l, \quad mx + m'x' = C$$

заключают в себя решение задачи о взаимных кривых равновесия. Действительно, из этих пяти уравнений выведется

$$x = \frac{C - m'x'}{m} \quad \text{и} \quad y = \sqrt{(l - \sqrt{x'^2 + y'^2} - \frac{C - m'x'}{m})^2},$$

и следовательно, уравнение взаимной кривой равновесия относительно amA будет

$$\sqrt{(l - \sqrt{x'^2 + y'^2})^2 - \left(\frac{C - m'x'}{m}\right)^2} = \frac{C - m'x'}{m}.$$

Что касается до постоянной произвольной величины C , то она определяется вообще условием, что кривая $bm'B$ проходит через данную точку b , находящуюся на вертикальной оси CX , или через какую либо другую, определенную же точку.

Для примера положим, что amA есть прямая линия, определяемая уравнением $y = ax$; взаимная линия равновесия для этой прямой определяется уравнением

$$\sqrt{(l - \sqrt{x'^2 + y'^2})^2 - \left(\frac{C - m'x'}{m}\right)^2} = a \left(\frac{C - m'x'}{m}\right),$$

или, что все равно,

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = l - \left(\frac{C - m'x'}{m}\right) \sqrt{1 + a^2}.$$

Следовательно, взаимная кривая прямой линии будет *комическая кривая*.

Если положим, что линия $bm'B$ должна также проходить через начало координат, то при $x' = 0$ должно быть $y' = 0$, в следствие чего $l - \frac{C \sqrt{1 + a^2}}{m} = 0$, откуда $C = \frac{ml}{\sqrt{1 + a^2}}$, и наконец

$$y' = x' \sqrt{\frac{(1 + a^2)m'^2 - m^2}{m^2}}.$$

И так, в этом предположении, получаем прямую для взаимной линии равновесия.

Если бы кривая amA была *круговая линия*, то нашли бы для взаимной кривой *эпициклоиду*.

Для сличения ополаски к спашь: PONT LEVIS.

COURBE FUNICULAIRE. ВЕРЕВОЧНАЯ или ЦЕПНАЯ ЛИНИЯ. СМОТ. CHAINETTE.

COURBE DE LA PLUS VITE DESCENTE. СМОТ. BRACHYSTOCHROME.

COURBE APLANÉTIQUE, COURBE AUX APPROCHES ÉGALES, COURBE ASYMPTOTIQUE, COURBE CAUSTIQUE, DIACAUSTIQUE, ÉLASTIQUE, EXPONENTIELLE, TAUTOCHROME, VOILIERE и проч. и проч. СМОТ. APLANÉTIQUE, APPROCHES, ASYMPTOTE, CAUSTIQUE и вообще прилагательных имена.

COURBE MUSICALE. СТРУННАЯ КРИВАЯ. Кривая линия, образуемая натянутою струною, приводимою в сотрясение. СМОТ. CORDES (VIBRATION DES).

COURBES DES SIGNES DU ZODIAQUE. (СМОТ.) КРИВЫЕ ЗОДИАКАЛЬНЫХ ЗНАКОВ. Тянь от окончаний указывает в солнечных часах описывает, каждый день, кривую линию на плоскости квадрата; иногда означают на солнечных часах некоторые из сих кривых, относящихся к приятнейшим эпохам года, например, к главным неодняжким праздникам. Отъ то и называются *кривыми зодиакальных знаков*.

COURBE. (Исч. Втр. и Физ.) КРИВАЯ ЛИНИЯ.

COURBE DE MORTALITÉ; КРИВАЯ СМЕРТНОСТИ; УКАЗАТЕЛЬНИЦА СМЕРТНОСТИ. Построение этой кривой весьма просто: возьмем произвольную прямую за ось абсцисс или x -овъ, и назначим на ней точку O , которую примем за начало координат. Перпендикуляр, возмашенный изъ O , изобразит ось ординат или y -овъ. Опложимъ отъ точки O сто частей, равныхъ между собою, но впротечъ произвольной длины, и општимъ последовательна дѣленія нумерами 0, 1, 2, 5... до 100. Изъ всѣхъ точекъ дѣленія возмашемъ перпендикуляры, на которыхъ определены точки кривой смертности слѣдующимъ образомъ: принимаемъ въ соображение известное число людей, напримеръ 10000, рожившихъ въ одно время, и откладываемъ отъ начала координатъ по оси y -овъ длину, пропорциональную числу 10000. Далѣе, ищемъ въ таблицахъ смертности сколько въ 10000 чело-

вѣкъ, по прошествіи одного года послѣ рожденія, остается въ живыхъ; откладываемъ отъ точки дѣленія № 1 по ординатѣ длину, пропорціональную этому числу. Поступаемъ точно также съ ординатою, соответствующею номеру 2, по есмь откладываемъ по ней длину, пропорціональную числу младенцевъ, достигшихъ 2-хъ лѣтъ, замкнувъ это число изъ тѣхъ же таблицъ смертности. На этомъ самомъ основаніи продолжаемъ строеніе для каждого возраста, напримѣръ, на ординатѣ, соответствующей номеру 33, откладываемъ длину, пропорціональную числу людей, которые, изъ разсматриваемыхъ 10000, дожили до 33 лѣтъ. Такимъ образомъ дойдемъ до послѣдняго номера, который соответствуетъ у насъ 100-лѣтнему возрасту; положимъ, что изъ 10000 человекъ ни одинъ не достигъ этихъ лѣтъ; следовательно, послѣдняя ордината будетъ нуль. Черезъ отмѣченные такимъ образомъ 101 точку на ординатахъ, проводимъ непрерывную кривую, которая и называется *кривою смертности какъ указательницею смертности*. Очевидно, что она пересекаетъ ось абсциссъ въ точкѣ, отмѣченной номеромъ 100, и не будетъ простирается далѣе. Конечно есть люди, которые живуть свыше ста лѣтъ, и следовательно, по всей строгости, нельзя принимать это число предѣломъ человеческой жизни; но исключенія такъ рѣдки, что можно не брать ихъ въ расчетъ при составленіи кривой смертности.

Иногда для большей точности подраздѣляютъ еще первыя два дѣленія, то есть разстоянія отъ № 0 до № 1 и отъ № 1 до № 2; такое подраздѣленіе въ особенности приличествуетъ первому дѣленію, ибо, по причинѣ большой смертности между младенцами въ первые двѣнадцать мѣсяцевъ, кривая смертности, въ этомъ промежуткѣ, имѣетъ значительную кривизну. Обыкновенно для № 0 до № 1 раздѣляютъ на четыре части, а линію № 1 до № 2 только надѣ; въ такомъ предположеніи первая ордината послѣ той, которая соответствуетъ началу 0, изображаетъ число младенцевъ, достигающихъ 5-хъ лѣтняго возраста, вторая, число тѣхъ, которые доживаютъ до 6-ти мѣсяцевъ, и такъ далѣе. Впрочемъ, можно довольствоваться подраздѣленіемъ перваго промежутка на два равные промежутка.

Предложенный графическій способъ можетъ быть приложенъ и къ построенію указательницы смертности, соответствующей определенному возрасту. Положимъ напримѣръ, что составимъ такого рода кривую для 33 лѣтъ. Откладываемъ отъ начала координатъ по оси y -овъ длину, пропорціональную разсматриваемому числу людей 33 лѣтъ; вторая ордината должна быть пропорціональна числу людей, остающихся въ живыхъ по истеченіи одного года; третья — числу людей, достигающихъ 33 лѣтъ, и такъ далѣе до тѣхъ поръ, пока кривая не пересѣчетъ ось абсциссъ. Само собой разумеется, что разстоянія между ординатами должны быть равны между собою.

Такое графическое изображеніе результатовъ таблицъ смертности нѣтъ передъ собою недостатковъ по преимуществу, что представляетъ возможность съ одного взгляда обнять всѣ измѣненія въ ходѣ смертности, которыми трудно уловить нѣтъ передъ собою пространствъ таблицы.

Нѣкоторые математики пытались связать аналитическою формулою показанія таблицъ смертности. Германскій математикъ *Ламбертъ* предлагаетъ слѣдующее уравненіе для кривой смертности:

$$y = 10000 \left(\frac{98-x}{98} \right)^2 - 6176 \left\{ e^{-\frac{x}{21,682}} - e^{-\frac{x}{2,46114}} \right\},$$

которое онъ составилъ на основаніи Лондонскихъ таблицъ смертности. Число рожденій предполагается въ этомъ уравненіи равнымъ десяти тысячамъ, а предѣлъ человеческой жизни, девяносто четыре годамъ; y изображаетъ число людей, достигающихъ возраста x . *Дювилляръ* (*Duillard*), въ своихъ *Recherches sur les Emprunts*, предлагаетъ употреблять формулу Ламберта и при другихъ таблицахъ смертности, но съ измѣненіемъ постоянныхъ коэффициентовъ, именно въ такомъ видѣ:

$$y = N \left(\frac{t-x}{t} \right)^2 - m \left\{ e^{-\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{n}} \right\},$$

гдѣ N изображаетъ число рожденій, t самую глубокую старость, показываемую таблицей, а e , основаніе Неперовой системы логарифмовъ. Числа m , k и n определяются извѣстнымъ образомъ посредствомъ употребляемой таблицы

спинь, что эти 16 точек пересечения даны напередъ, но можно будешь провести чрезъ нихъ двѣ кривыя 4-го порядка. Такое заключеніе по видимому несообразно съ смысломъ 1-го Предложенія, въ силу котораго 14 точекъ определяютъ кривую 4 го порядка, между тѣмъ какъ изъ сказаннаго сей-часъ должно заключить, что чрезъ 16 точекъ можемъ провести не только одну кривую 4-го порядка, но даже и двѣ. Минное это противоречіе объясняется какъ и выше. Дѣйствительно, положимъ, что двѣ кривыя 4-го порядка проведены, напиримъ, чрезъ 10 изъ данныхъ 16 точекъ, и что эти кривыя пересѣкаются въ 16 точкахъ; положимъ остальныхъ 6 точекъ очень можетъ быть такъ, что онѣ совпадаютъ съ пересѣченіями двухъ разсмаприваемыхъ кривыхъ.

Мы привели предполагаемый Крамеромъ парадоксъ только потому, что первостепенные математикѣ уважали объ немъ. Кажется, изъ сказаннаго въ этой страницѣ, читатели заключатъ, что на самомъ дѣлѣ это противоречіе въ теоріи кривыхъ линий вовсе не существуетъ. Эйлеръ написалъ объ парадоксѣ Крамера Диссертацию подъ заглавіемъ: *Sur une contradiction apparente dans la théorie des lignes courbes* (Mémoires de Berlin, 1748).

CRATICULAIRE. См.т. ниже.

CRATICULE. (Перс.) **СѢТЬ.** *Craticule* prototype или *pro'totype craticulaire*; *истинная, первоу азная сѣть.* *Craticule* *estampe* или *estampe craticulaire*; *прот., ацтурная сѣть.* Когда желаетъ составить анаморфозу какого либо предмета, то сперва около его изображенія описываетъ квадратъ, который разбиваетъ на некоторое число четырехугольных клетокъ. На чертѣжѣ 11 (Листъ I) квадратъ *ABCD*, состоящий изъ 25 квадратиковъ, представляетъ такого рода сѣть, которая и называется *prototype craticulaire*. Потомъ, по известнымъ правиламъ Перспективы (См.т. ANAMORPHOSE), строятъ трапецію *abcd* (черт. 12 Листъ I), состоящую изъ столько-же малыхъ трапецій, сколько въ квадратѣ *ABCD* заключается квадратиковъ. Эта трапеція *abcd*, съ своею сѣтью малыхъ трапецій, вѣщающая въ себѣ превращенное изображеніе, называется *estampe craticulaire*.

CRÉMAILLÈRE, BARRE DENTÉE. (Mex.) **ЗУБ-**

ЧАТАЯ ПОЛОСА, ЗУБЧАТКА, ПОДЪЕМЦЫ.

Такъ называется полоса, прямая или кривая, по длинѣ которой насажены зубцы. На чертѣжѣ 13 (Листъ VI) *AB* изображаетъ прямую зубчатую полосу.

CRÉPUSCULAIRE (CERCLE). (Астр.) **СУМЕРЕЧНЫЙ КРУГЪ.** Малый кругъ, параллельный горизонту, и падающійся подъ нимъ на 18°. См.т. ниже.

CRÉPUSCULE. (Астр.) **СУМЕРКИ; ЗАРЯ.** Свѣтъ, разливающийся въ земной атмосферѣ за нѣсколь-ко времени до восхожденія солнца и послѣ за-хожденія сего свѣтила. Это явление происходитъ отъ преломленія солнечныхъ лучей въ атмосферѣ; См.т. REFRACTION. Сумерки поутру начинаются, а вечеромъ кончатся, когда солнце находится подъ горизонтомъ на 18°.

CRÉPUSCULE DU MATIN или **AU SOIR**; **УТРЕННИЕ СУМЕРКИ, УТРЕННЯЯ ЗАРЯ.** **CRÉPUSCULE DU SOIR**; **ВЕЧЕРНИЕ СУМЕРКИ, ВЕЧЕРНЯЯ ЗАРЯ.**

PROBLÈME DE PLUS COURT CRÉPUSCULE. Задача объ опредѣленіи кратчайшихъ сумерекъ. Для каждаго мѣста на земной поверхности есть такой день, въ который сумерки бывають короче нежели въ другіе дни года. Опредѣленіе для кратчайшихъ сумерекъ не представляется никакого особеннаго затрудненія; но рѣшеніе этой задачи требуетъ довольно подробнаго позволенія, почему мы и не можемъ предложить его въ нашней Лексиконѣ.

Первое рѣшеніе задачи объ опредѣленіи кратчайшихъ сумерекъ приписываютъ Испанскому математикѣ *Петру Нонусу* *Donas, Nons* 2d, который жилъ въ XVI столѣтіи, и приобрѣлъ известность своимъ способамъ для излеченія астрономическихъ инструментовъ. Нонусъ издалъ трактатъ о сумеркахъ на Испанскомъ языкѣ. Послѣ него многіе авторы занимались рѣшеніемъ этой же задачи. Маркизъ *де ла Санталя*, въ Описаніи своего *Analyse des Instruments* 1715, предложилъ счислительское рѣшеніе, довольно простое. *Поланъ Бернулли*, *Mongemini* (*Mompertuis*), *де Монж* (*de Montier*) и другіе, предложили также свои изслѣдованія по сему предмету.

Читатели найдутъ подробное рѣшеніе вопроса объ кратчайшихъ сумеркахъ въ *Encyclopedie*

визны поверхности. Очевидно, что если изобразить чрез ρ данную котораго ни есть изъ иско-
мыхъ радиусовъ кривизны, то получимъ

$$\rho = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2},$$

гдѣ X, Y, Z , какъ и выше, означаютъ координатныя точки пересѣченія двухъ смежныхъ нормалей, а x, y, z , координаты рассматриваемой точки M на поверхности.

Изъ слѣдствіе уравненія (1) будемъ

$$\rho = (Z-z)\sqrt{1+p^2+q^2},$$

откуда

$$Z-z = \frac{\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Если исключимъ изъ уравн. (2) отношеніе $\frac{dy}{dx}$, и подставимъ въ новое уравненіе найденную сейчасъ величину для $Z-z$, то найдемъ

$$(4) \quad \rho^2 - \frac{[(1+p^2)(1-2pq) + (1+q^2)r]\sqrt{1+p^2+q^2}}{r^2-s^2} \cdot \rho + \frac{(1+p^2+q^2)^2}{r^2-s^2} = 0.$$

Вотъ уравненіе второй степени, определяющее исконыя два радиуса кривизны предложенной поверхности въ точкѣ M .

Обратимся теперь къ уравн. (3). Такъ какъ оно доставляетъ двѣ величины для $\frac{dy}{dx}$, то принявъ $\frac{dy}{dx} = m$ и $\frac{dy}{dx} = m'$, получимъ два дифференціальныя уравненія

$$dy = m dx \text{ и } dy = m' dx;$$

если исключимъ переменную z изъ m и m' посредствомъ уравненія поверхности $z = f(x, y)$, то предыдущія уравненія будутъ заключать въ себѣ только координаты x и y , и слѣдовательно будутъ принадлежать двумъ кривымъ, начерченнымъ на плоскости xy . Эти двѣ кривыя изображаютъ проэекціи двухъ кривыхъ линій, вообще двойкой кривизны, начерченныхъ на поверхности, и нѣкоторыхъ тѣмъ свойство, что смежныя ихъ нормали будутъ пересѣкаться. Изъ всего сказаннаго легко заключить, что каждая точка M поверхности находится на пересѣченіи двухъ подобныя кривыхъ; на изъ сихъ послѣднихъ, которая соотвѣтствуетъ меньшей изъ двухъ величинъ ρ , называется линіею наибольшей кривизны (*ligne de la plus grande courbure*), а другая, линіею наименьшей кривизны (*ligne de la plus petite*

courbure). Обѣ линіи называются *линіями кривизны* (*lignes de courbure*). Можемъ первый разсужденіе этого рода линій.

Уравненіе (4) показываетъ, что двѣ кривизны поверхности будутъ обращены въ одну, или въ противоположныя стороны, смотря по тому, будетъ ли $rt-s^2 > 0$ или < 0 . Если положимъ въ формулѣ (4) $(1+p^2)x - 2pqy + (1+q^2)z = 0$, то уравненіе будетъ принадлежать поверхности такого свойства, что для каждой ея точки радиусъ кривизны равенъ между собою, но нѣтъ противоположные знаки. Можемъ предложить способъ для интегрированія уравненія въ частныхъ дифференціалахъ $(1+p^2)x - 2pqy + (1+q^2)z = 0$. Наконецъ, уравнивъ нулю подкоренную величину, получающую чрезъ рѣшеніе уравн. (4) относительно ρ , найдемъ

$$[(1+p^2)x - 2pqy + (1+q^2)z]^2 - 4(1+p^2+q^2)(rt-s^2) = 0.$$

Очевидно, что это уравненіе будетъ принадлежать такимъ поверхностямъ, для которыхъ два радиуса кривизны, соотвѣтствующіе определенной точкѣ, равны между собою, и направляются въ одну и ту же сторону. Посредствомъ Интегральнаго Исчисленія доказываютъ, что одна шаровая поверхность можетъ удовлетворить этому условию. Но если допустить, что предыдущее уравненіе должно имѣть нѣсколько или определенной зависимости y отъ x , то получится кривая, по протяженію которой обѣ кривизны поверхности равны между собою. Эту кривую Можемъ назвать *линіею сферической кривизны* (*ligne de courbure spherique*).

Читатели найдутъ желаемыя подробности объ этомъ любопытномъ предметѣ въ слѣдующихъ сочиненіяхъ:

Разсужденіе *Шалера*, помѣщенное въ *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1700 г.

Mémoires présentés à l'Académie des Sciences de Paris.

Монжа: Application de l'Analyse à la Géométrie.

Лагранж: Théorie des fonctions analytiques.

Лавроа: Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral; 3 тома in-4°.

Коши: Leçons sur les applications du calcul infini-
simal à la Géométrie; 2 тома in-4°, 1826 г.

СЕРСЛЕ И СОУВУРА. КРУГЪ КРИВИЗНЫ, СОПРЯКАЮЩІЙСЯ КРУГЪ. — РАДІУСЪ КРИВИЗНЫ. СМОТЪ OSCULATEUR (CERCLE).

COURBE A DOUBLE COURBURE. Кривая двойкой кривизны, двойко-кривая линия. См. **COURBE**.

COURBE A TRIPLE COURBURE. См. выноски из статьи **COURBE** на стр. 292.

COURBE DE COURBURE, LIGNE DE COURBURE. См. **COURBURE DES SURFACES**.

PLAN DE COURBURE или PLAN OSCULATEUR.

Плоскость кривизны, соприкасающаяся с плоскостью. Плоскость, проходящая через две смежные касательные к кривой линии, или, что всё равно, через три смежные точки сей последней. Пусть будет

$$AX + BY + CZ + D = 0$$

уравнение плоскости кривизны. Так как она должна проходить через три смежные точки кривой, то изобразим через $[x, y, z]$, $[x + dx, y + dy, z + dz]$ и $[x + dx + d(x + dx), y + 2dy + d^2y, z + 2dz + d^2z]$ координаты этих точек, получим три уравнения

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0$$

$$Adx + Bdy + Cdz = 0$$

$$Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z = 0;$$

из двух последних выведем равенства

$$\frac{A}{dydz - d^2y} = \frac{B}{dzdx - d^2z} = \frac{C}{dxdy - d^2x}$$

в следствие которых уравнение плоскости кривизны будет

$$(dydz - d^2y)(X-x) + (dzdx - d^2z)(Y-y) + (dxdy - d^2x)(Z-z) = 0.$$

Если примем x за переменную независимую, и следовательно координаты y и z за функции количества x , то можно будет положить $d^2x = 0$; сверх того найдем $dy = p dx$, $d^2y = q dx^2$, $dz = p' dx$, $d^2z = q' dx^2$, где p, q, p', q' изображают известные функции переменной x . И так, в этом предположении, уравнение плоскости кривизны примет вид:

$$(pq' - p'q)(X-x) - q'(Y-y) + q(Z-z) = 0.$$

Очевидно, что соприкасающаяся плоскость для плоской кривой линии, будет не иное что как сама плоскость, на которой кривая начерчена.

COUBURES (PROBLÈME DES). (Алг.) Мы приводим здесь задачу о курьерах для того, чтобы иметь случай упомянуть об одном парадоксе, известном в древности. Вот эта задача:

Два курьера A и B следуют по одной дороге;

первый из них проехал уже расстояние a , когда отправляется второго; предполагается, что курьер B проезжает в версты в один раз времени, а курьер A , которого пзда медленнее, только в версты в то же время. Спрашивается, на каком расстоянии от места отправления курьер B догонит курьера A ?

Пусть будет x неизвестное расстояние. Очевидно, что расстояния x и $x - a$, по условию вопроса, должны быть соответственно пройданы курьерами B и A в одинаковое время, которое изобразим через t . Следовательно получим две пропорции

$$n : 1^a :: x : t^a = \frac{x}{n}$$

$$m : 1^a :: x - a : t^a = \frac{x - a}{m},$$

из которых выводя

$$\frac{x}{n} = \frac{x - a}{m}, \text{ откуда } x = \frac{na}{n - m}.$$

Эта задача предлагается в разных видах. Например, можно предположить, что курьеры едут один на встречу другому, или едущие, через сколько времени на часах, съезжаясь опять в известное мгновение, ищущая стрелка достигнет часовой, и проч.

Обращаясь теперь к парадоксу, о котором сейчас упоминал. Вот в каком виде предлагалась задача

Предполагается, что Ахиллес близится к десяти раз скорее черепахи, которая впереди у Ахиллеса на одну милю. Спрашивается, может ли Ахиллес догнать черепаху, и, в случае возможности, на каком именно расстоянии?

Философ Зенон, глава Стоиков, утверждал, что Ахиллес не может догнать черепаху, и вопреки на чем он основывал свое утверждение: он говорил, что когда Ахиллес пробежит одну милю, черепаха пройдет десятую долю второй мили; когда Ахиллес пройдет эту десятую долю, то черепаха подвинется на десятую долю от десяти доли, т. е. на одну сотую мили, и так далее до бесконечности.

Ошибка Зенона, вероятно умышленная, состояла в том, что в его возражении скрытым образом предполагалось, что черепаха пройдет меньше $\frac{1}{10}$ мили; действительное по его

сужденію, проситивистію, переходное черепахю, равно $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$ миль, а сумма этой геометрической прогрессіи, продолженной въ безконечность, равна только $\frac{1}{9}$.

Если приложимъ къ этой задачі найденную выше формулу

$$x = \frac{na}{n-m},$$

то положивъ $a=10^4$, $n=10$, $m=1$, найдемъ

$$x = \frac{10}{9} = 1 + \frac{1}{9}.$$

Величина $x=1+\frac{1}{9}$ показываетъ, что Ахиллесъ догонитъ черепаху, когда она перейдетъ $\frac{1}{9}$ мили.

COURONNE. (Геом.) **ВЪНЧИКЪ.** Плоское пространство, заключающееся между двумя концентрическими кругами. Легко видѣть, что изобразить чрезъ R и r радіусы двухъ круговъ, ограничивающихъ вѣнчикъ, площадь этой фигуры будетъ равняться $\pi(R^2-r^2)$.

COURS или **MARCHE** d'une courbe. (Геом.) **ХОДЪ** кривой линіи. *Pour déterminer la nature des points singuliers d'une courbe, il faut examiner son cours dans le voisinage des ces points; для опредѣленія рода особенныхъ точекъ кривой линіи, надобно разсмотрѣть ея ходъ въ сопредѣльности тѣхъ точекъ.*

СН.

CRAMER (PARADOXE DE). (Геом.) **ПАРАДОКСЪ КРАМЕРА.** Чтобы поманъ въ чѣмъ состоятъ это кажущееся противорѣчіе въ теоріи кривыхъ линій, приведемъ два предложенія изъ Геометріи, справедливость которыхъ доказывается строгимъ образомъ.

1-е Предложеніе. Кривая линія n -го порядка, опредѣляемая уравненіемъ $y^n + (a+bx)^{n-1} + (c+dx+ex^2)y^{n-2} + \dots = 0$, можетъ быть проведена чрезъ $\frac{n^2+5n}{2}$ точекъ

И такъ, прямую линію, для которой $n=1$, можно провести чрезъ *два* точки; коническія сѣченія, гдѣ $n=2$, могутъ быть вообще проведены чрезъ *пять* точекъ; кривыя шестяго порядка, для которыхъ $n=3$, чрезъ *десять* точекъ; и такъ далѣе.

2-е Предложеніе. Двѣ кривыя, изъ кото-

рыхъ одна m -го, а другая n -го порядка, могутъ взаимно пересѣкаться не болѣе какъ въ mn точкахъ; но число пересѣченій можетъ быть менѣе произведенія mn . И такъ, двѣ коническія кривыя могутъ пересѣкаться только въ *четыре* точкахъ, ибо $m=2$ и $n=2$. Кривая шестяго порядка можетъ быть пересѣчена прямою линіею только въ *трехъ* точкахъ, ибо $n=3$, а $m=1$; двѣ кривыя 3-го порядка не могутъ имѣть болѣе *деяти* общихъ точекъ, ибо въ этомъ случаѣ $m=3$ и $n=3$.

Теперь покажемъ въ чѣмъ состоятъ *парадоксъ Крамера*, обнаруживающійся уже съ кривыхъ 3-го порядка. Крамеръ ограничилъ смыслъ 1-го Предложенія, и извѣстно тождо, чтобы заключить изъ него, какъ бы то казалось, что для опредѣленія кривой 3-го порядка надобно имѣть по меньшей мѣрѣ 9 точекъ, конкъ число оказывается иногда недостаточнымъ, онъ предполагалъ, что 9 точекъ, во всякомъ случаѣ, совершенно опредѣляютъ эту кривую. На основаніи же 2-го Предложенія двѣ кривыя 3-го порядка могутъ пересѣкаться въ 9 точкахъ; и такъ, если бы привели эти 9 точекъ пересѣченія за данныя, то есть за тѣ, чрезъ которыя должно провести кривую 3-го порядка, то, изъ сказаннаго выше слѣдовало бы, что вопросъ неопредѣленъ, ибо чрезъ систему упомянутыхъ 9 точекъ можно бы было провести двѣ кривыя 3-го порядка, а такое заключеніе, по явному, противорѣчитъ смыслу 1-го Предложенія. Но это противорѣчіе вовсе не существуетъ, ибо несправедливо утверждать, что 9 точекъ, во всякомъ случаѣ, опредѣляютъ кривую 3-го порядка. И въ самомъ дѣлѣ, можетъ случиться, что проведя кривую 3-го порядка, напередъ только чрезъ 7 изъ данныхъ 9 точекъ, двѣ остальныя точки случайно будутъ находиться на кривой. Хотя сія послѣдняя и пройдетъ въ этомъ случаѣ чрезъ всѣ данныя 9 точекъ, но не будетъ однакожъ совершенно опредѣлена.

Для кривыхъ 4-го и высшихъ порядковъ кажущееся противорѣчіе дѣлается еще болѣе ощущательнымъ. Напримѣръ, кривыя 4-го порядка, въ силу 1-го Предложенія, могутъ быть проведены чрезъ 16 точекъ. Но, въ слѣдствіе 2-го Предложенія, двѣ кривыя 4-го порядка могутъ пересѣкаться въ 16 точкахъ. И такъ, если допу-

спитъ, что эти 16 точекъ пересѣченія даны напередъ, но можно будетъ провести чрезъ нихъ двѣ кривыя 4-го порядка. Такое заключеніе по видному несообразно съ смысломъ 1-го *Предложенія*, въ силу котораго 14 точекъ опредѣляютъ кривую 4-го порядка, между тѣмъ какъ изъ сказаннаго сей-часъ должно заключить, что чрезъ 16 точекъ можемъ провести не только одну кривую 4-го порядка, но даже и двѣ. Мнимое это противорѣчіе объясняется какъ и выше. Действительно, положимъ, что двѣ кривыя 4-го порядка проведены, напередъ, чрезъ 10 изъ данныхъ 16 точекъ, и что эти кривыя пересѣкаются въ 16 точкахъ; положеніе остальныхъ 6 точекъ очень можетъ быть таково, что онѣ совпадаютъ съ пересѣченіями двухъ разсширяемыхъ кривыхъ.

Мы привели предполагаемый Крамеромъ парадоксъ только потому, что первоначальные математикѣ упоминали объ немъ. Кажется, изъ сказаннаго въ этой страницѣ, читателямъ заключить, что на самомъ дѣлѣ это противорѣчіе въ теоріи кривыхъ линий вовсе не существуетъ. *Эйлеръ* написалъ объ парадоксѣ Крамера диссертацію подъ заглавіемъ: *Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes* (Memoires de Berlin, 1748).

CRATICULAIRE. Смол. ниже.

CRATICULE. (Перс.) **СЪТЪ.** *Craticule prototype* или *prototype craticulaire*; истинная, первообразная сѣть. *Craticule ectype* или *ectype craticulaire*; прѣв. аценная сѣть. Когда желаемъ составить анаморфозу какого либо предмета, то сперва около его изображенія описываемъ квадратъ, который разбиваемъ на нѣкоторое число четырехугольных клочковъ. На чертежѣ 11 (Листъ I) квадратъ *ABCD*, состоящій изъ 25 квадратиковъ, представляеть такого рода сѣть, которая и называется *prototype craticulaire*. Потомъ, по извѣстному правилу Перспективы (Смол. ANAMORPHOSE), строимъ трапецію *abcd* (черт. 12 Листъ I), состоящую изъ столькохъ малыхъ трапецій, сколько въ квадратѣ *ABCD* заключено квадратишковъ. Эта трапеція *abcd*, съ своею сѣтью малыхъ трапецій, ивѣщающая въ себѣ превращенное изображеніе, называется *ectype craticulaire*.

CRÉMAILLÈRE, BARRE DENTÉE. (Мех.) **ЗУБ-**

ЧАТАЯ ПОЛОСА, ЗУБЧАТКА, ПОДЪЕМЦЫ.

Такъ называется полоса, прямая или кривая, по длинѣ которой насажены зубцы. На чертежѣ 13 (Листъ VI) *AB* изображаетъ прямую зубчатую полосу.

CRÉPUSCULAIRE (CERCLE). (Астр.) **СУМЕРЕЧНЫЙ КРУГЪ.** Малый кругъ, параллельный горизонту, и находящійся подъ нимъ на 18°. Смол. ПЛАНЪ

CRÉPUSCULE. (Астр.) **СУМЕРКИ; ЗАРЯ.** Свѣтъ, разливающейся въ земной атмосферѣ за нѣскольکو времени до восхожденія солнца и послѣ захожденія сего свѣтила. Это явленіе происходитъ отъ преломленія солнечныхъ лучей въ атмосферѣ; Смол. **REFRACTION**. Сумерки поупру начинаются, а вечеромъ кончатся, когда солнце находится подъ горизонтомъ на 18°.

CRÉPUSCULE DU MATIN или **АКВОДЕ; УТРЕННИЕ СУМЕРКИ, УТРЕННЯЯ ЗАРЯ.** **CRÉPUSCULE DU SOIR;** вечерніе сумерки, вечерняя заря.

PROBLÈME DU PLUS COURT CRÉPUSCULE. Задача объ опредѣленіи кратчайшихъ сумерекъ. Для каждаго мѣста на земной поверхности есть такой день, въ который сумерки бывають короче нежели въ другіе дни года. Опредѣленіе для кратчайшихъ сумерекъ не представляеть никакого особеннаго затрудненія; но рѣшеніе этой задачи требуетъ довольно подробнаго изложенія, почему мы и не можемъ предлагать его въ нашемъ Лексиконѣ.

Первое рѣшеніе задачи объ опредѣленіи кратчайшихъ сумерекъ приписываютъ Испанскому математикѣ *Петру Ноніусу* (*Nonus, Aign. i.*), который жилъ въ XVI столѣтіи, и приобрѣлъ извѣстность своимъ способомъ для дѣленія астрономическихъ мисруженіевъ. Ноніусъ издалъ трактатъ о сумеркахъ на Испанскомъ языкѣ. Послѣ него многіе авторы занимались рѣшеніемъ этой же задачи: Марквзъ *de l'Optique*, въ 3-мъ отдѣленіи своего *Analyse des Infiniment petits*, предложилъ синтетическое рѣшеніе, довольно простое. *Иванъ Бернуллі, Монпертюи* (*Maupertuis*), *ле Моннѣ* (*le Monnier*) и другіе, предложили также свои изслѣдованія по сему предмету.

Читатели найдутъ подробное рѣшеніе вопроса объ кратчайшихъ сумеркахъ въ *Encyclopédie*

méthodique, Mathématiques, въ статьѣ: *Cylindricule*. Эта самая задача изложена со всевозможною отчетливостію въ сочиненіи *Шуберта*: *Traité d'Astronomie théorique* (Tome 1-er Livre II, Chap. VI).

CREUX D'UNE ROUE. (Мех.) **ВПАДИНЫ ЗУБЧАТАГО КОЛЕСА.** Промежутки, отдѣляющіе смежные зубцы въ зубчатомъ колесѣ. Смол. DENT.

CRIBLE D'ERATOSTHÈNE. (Теор. Чис.) **РѢШЕТО ЭРАТОСФЕНА.** Способъ, придуманный почти за три столѣтія до Р. Х. Греческимъ философомъ *Эратосфеномъ*, и служащій для опредѣленія простыхъ чиселъ (*nombre premiers*). Вотъ въ чѣмъ состоитъ этотъ способъ: написать рядъ нечетныхъ чиселъ

3, 5, 7, 9*, 11, 13, 15*, 17, 19, 21*, 23, 25*, 27*, 29, 31, 33*, 35*, 37, 39*, 41, 43, 45*, 47, 49*.....

продолженный по произволію, зачеркиваемъ сперва каждое *третье* число, начиная считаясь отъ ближайшаго числа къ 3, то есть, отъ 3. И такъ, числа 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45...., которыя мы означили звѣздочкою, будутъ всѣ зачеркнуты послѣ перваго дѣйствія. Далѣе, зачеркиваемъ *пятое* число, считая отъ прѣшняго 7, и не пропуская зачеркнутыхъ прежде; такимъ образомъ пронадутъ новыя числа 25, 49 и проч. Потомъ зачеркиваемъ каждое *седьмое* число, считая отъ 9; каждое *одиннадцатое*, считая отъ 13, и такъ далѣе. Очевидно, что незачеркнутыя числа въ первоначальномъ ряду не будутъ дѣлиться ни на одно изъ простыхъ чиселъ 3, 5, 7, 11....., и следовательно будутъ сами *числа простыя*. Что касается до зачеркнутыхъ чиселъ, то всѣ они будутъ сложныя.

Эратосфенъ писалъ рядъ нечетныхъ чиселъ на дощечкѣ, и прокалывалъ дырочки подъ тѣми изъ сихъ чиселъ, которыя мы зачеркивали. Такимъ образомъ дощечка сходствовала съ *рѣшетомъ*, сквозь которое сложные числа какъ бы выпадали, между тѣмъ какъ оставались одни *простыя*.

CRIC. (Мех.) **ДОМКРАТЪ, ПОДЪЕМЪ.** Машина относящаяся къ вершю, и употребляемая для подниманія значительныхъ тяжестей. Она состоитъ изъ прочной зубчатой полосы *AB* (черт. 14 Листъ VI), обыкновенно желѣзной, которая

можетъ свободно дѣлаться по дѣлѣ своей въ лицѣ *KL*. Шестерня *C*, приводимая въ движеніе около своей оси посредствомъ рукоятки *D*, задвигаетъ зубцами своими за зубцы полосы, которая такимъ образомъ выдвигается изъ ящика вертннхъ концовъ *A* сквозь отверстіе *mn*. При употребленіи домкрата верхній конецъ *A* полосы поднимается подъ грузъ, который желаютъ поднять.

Основываясь на законѣ равновѣсія на воротахъ (Смол. TOUR), легко видѣть, что въ домкратѣ, въ случаѣ равновѣсія, *сила, приложенная къ рукоятки D, должна относиться къ сопротивленію по дѣлѣи полосы AB, какъ радіусъ шестерни C, къ радіусу рукоятки*. Когда рукоятка не прямая, а искривленная, то подъ радіусомъ ея должно разумѣть радіусъ круга, описываемаго шточкою приложенія силы, которая дѣйствуетъ на рукоятку.

Ясно, что дѣйствіе домкрата будетъ тѣмъ значительнѣе, чѣмъ будетъ болѣе уменьшеніе радіуса рукоятки къ радіусу шестерни.

Слѣд. сомнѣніе. Сложный домкратъ или сложный подъемъ оплачивается отъ *простаго* только тѣмъ, что вѣсено одной шестерни, приводящей зубчатую полосу въ движеніе, употребляющей въ этой машинѣ нѣсколько зубчатыхъ колесъ съ ихъ шестернями; при такомъ устройствѣ, можно поднимать большія тяжести съ менѣшимъ усиліемъ.

CRISTAL (CIEUX DE) или **CIEUX CRISTALLINS.** (Астр.) **КРИСТАЛЬНЫЯ НЕБЕСА.** Въ статьѣ CIEL мы сказали, что древніе астрономы, для объясненія различныхъ движеній небесныхъ тѣлъ, допускали существованіе восьми твердыхъ небесъ. *Амбронъ*, Король Каспійскій приписывалъ къ нимъ еще два новыхъ, которыя названы *кристаллическими небесами*; первое изъ нихъ служило для объясненія предвареній равноденствій, а вторымъ объяснялось колебательное движеніе небесной сферы, которое допускали погнѣданіе астрономы.

CRISTAL. КРИСТАЛЛЪ. Когда тѣло изъ жидкаго состоянія переходитъ въ твердое, то вообще принимаетъ правильнй видъ, и называется въ такомъ случаѣ *кристалломъ*. Формы, свойственныя кристалламъ, суть многогранники, концы

углы, для одного и того же вещества, остаются неизменными; но размеры этих многогранников весьма разнообразны. Часто они расширяются в известную сторону, а сжимаются в другую, или некоторые их грани расширяются, а другие сжимаются, что зависит от особенностей обособления, сопровождающих окристаллование расширяемых тел.

Геометрические формы, чаще других встречающиеся в кристаллах, суть следующие: *правильный октаэдр, прямой и косоголанный октаэдр с квадратными или ромбоидальными основаниями, прямая правильная шестигранная призма, прямая и косоголанный призмы с квадратными или ромбоидальными основаниями*. Встречаются еще и другие формы, как то: *правильный тетраэдр, ромбоидальный додекаэдр, то есть двенадцатигранник, ограниченный двенадцатью равными ромбами, также додекаэдр с пятиугольными, но не равносторонними гранями*.

Должно отличать от настоящих кристаллов так называемые *псевдоморфозы (pseudomorphes)* или *ложные кристаллы*. В настоящем кристалле всегда существуют такие направления, по которым он может быть удобно разсечен: одно или несколько из этих направлений во всяком случае параллельны одной или нескольким наружным граням кристалла. Псевдоморфозы же не иное что, как землесеченные вещества, получившие свой наружный вид в пустотах, в которых настоящие кристаллы оставили свои отпечатки.

CRISTALLISATION. КРИСТАЛЛИЗОВАНИЕ, КРИСТАЛЛИЗАЦИЯ, ОБРИСТАЛЛОВАНИЕ.

CRISTALLISER. КРИСТАЛЛИЗИРОВАТЬ. Превращать в кристалл. SE CRISTALLISER; кристаллизоваться, окристалловаться.

CRISTALLOGRAPHIE, CRISTALLONOMIE. КРИСТАЛЛОГРАФИЯ, КРИСТАЛЛОНОМИЯ.

Наука, занимающаяся описанием кристаллов и изложением законов, по которым образуются их геометрические формы. Французский минералог Гаюи, первый дал систематический вид учению о кристаллах, и открытыми своими работами основал Кристаллографию. Он издал об этом предмете книгу под заглавием:

Traité de Cristallographie, par Haüy, 2 тома, 1822 (изд. изд.). В 1831 году Академик Г. Купфер напечатал большое сочинение об этой же науке, под названием: *Handbuch der rechnenden Krystallonomie*, St. Petersburg, 1831.

CRITÈRE, CRITÉRIUM, CARACTÈRE. ПРИЗНАКЪ, КРИТЕРІУМЪ. — ПРАВИЛО.

CRITIQUE (VALEUR). (Алг.) КРИТИЧЕСКАЯ

ВЕЛИЧИНА. Для объяснения этого наименования, которое Г. Фурье употребляет в сочинении своем: *Analyse des équations déterminées*, мы должны обратиться к главному приему, предлагаемому для нахождения корней в алгебраических уравнениях. Пусть будет $f(x)=0$ предложенное уравнение, и положим что оно степени m . Г. Фурье составляет все производные данной функции $f(x)$ до m го порядка включительно; последняя производная очевидно будет равняться постоянному числу, ибо $f'(x)$ изображает целую алгебраическую функцию.

Таким образом получится ряд

$$(A) f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(iv)}(x), \dots, f^{(m-1)}(x), f^{(m)}(x).$$

Г. Фурье называет *критическими* такие величины переменной x , которых обращают в нуль одну из производных $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(m-1)}(x)$, и вписывает эти значения в ряд (A) одинаковые знаки. И так, величина $x=a$ была бы критической, если бы, например, при $f'''(a)=0$, функции $f''(a)$ и $f^{(iv)}(a)$ имели одинаковые знаки. В уравнении $x^5-10x^3+23x^2+6x-7=0$, для которого будет

$$f(x) = x^5 - 10x^3 + 23x^2 + 6x - 7$$

$$f'(x) = 5x^4 - 30x^2 + 6x + 6$$

$$f''(x) = 20x^3 - 60x + 6$$

$$f'''(x) = 60x^2 - 60$$

$$f^{(iv)}(x) = 120x$$

$$f^{(v)}(x) = 120,$$

функция $f^{(iv)}(x)$ обращается в нуль для $x=1$ и $x=-1$; первая величина доставляет $f'''(1)=+6$ и $f^{(iv)}(1)=+120$, а вторая, $f'''(-1)=+6$ и $f^{(iv)}(-1)=-120$; так как $f'''(1)=0$, а функции $f''(1)$ и $f^{(iv)}(1)$ оба положительны, то заключаем, что величина $x=1$ есть критическая.

Заканчивая, что каждой критической величине соответствует одна пара мнимых корней уравнения $f(x)=0$. И так, можно предположить

следующее правило: сколько будетъ критическихъ величинъ въ ряду (4), столько же, по меньшей мѣрѣ, предложенное уравненіе $f(x) = 0$ будетъ имѣть паръ мнимыхъ корней. Поэтому мы въ правѣ заключить, что въ приведенномъ выше уравненіи находимся по крайней мѣрѣ два корня мнимыхъ. И действительно, оно имѣетъ два корня мнимыхъ и три вещественныхъ, изъ которыхъ два отрицательные, а одинъ положительный. — Для сличенія опскажемъ чинапателей къ статьѣ: **FOURIER (ANALYSE DES ÉQUATIONS DÉTERMINÉES PAR).**

CROISER (SE), то же что **SE COUPER. ПЕРЕ-СЪКАТЬСЯ.**

CROISSANT. (Мат.) ВОЗРАСТАЮЩІЙ, ВОСХО-ДЯЩІЙ, УВЕЛИЧИВАЮЩІЙСЯ. *Quantité croissante; возрастающее, увеличивающееся количество. Série croissante; возрастающій рядъ,* то есть та-кой, въ которомъ величина членовъ постепенно увеличивается, какъ напримѣръ въ рядахъ

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$-16, -9, -4, -1, 0, 1, 4, 9, 16, \dots$$

Иногда подъ *рядомъ восходящимъ* или *возрастающимъ* разумѣютъ такой, въ которомъ спе-циально переменной величины составляютъ рядъ возрастающій, напримѣръ:

$$1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots, x - \frac{x^2}{1.2.5} + \frac{x^3}{1.2.5.4.6} - \dots,$$

и проч.

Уменьшующимъ рядомъ (série décroissante) назы-вается такой рядъ, въ которомъ величина чле-новъ постепенно уменьшается, какъ напримѣръ въ слѣдующемъ:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.6} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.6} + \dots$$

Также, подъ *нисходящимъ рядомъ* разумѣютъ такую спироку, въ которой сплени переменной составляютъ рядъ убывающій: таковъ рядъ

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \dots$$

CROISSANT. (Астр.) ПЕРВАЯ и ПОСЛѢДНЯЯ ЧЕТВЕРТЬ луны Смот. PHASE.

CROÛTRE. (Мат.) ВОЗРАСТАТЬ, РАСТИ, УВЕ-ЛИЧИВАТЬСЯ.

CROIX (MULTIPLIER EN). (Астр.) НА-КРЕСТЬ ПЕРЕМНОЖАТЬ. Для раздѣленія дроби $\frac{a}{b}$ на

другую $\frac{c}{d}$, помножаемъ a на d , помножь b на c , и получаемъ частное $\frac{ad}{bc}$; такое дѣйствіе назы-вается *умноженіемъ на-крестъ*.

CROIX-OU-PILE. (Ист. Вѣр.) ОРЛЯНКА, ОРЕЛЪ ИЛИ РЫШЕТКА. *Д'Аламбертъ, въ Essai sur l'Analyse Méthodique, въ статьѣ Croix ou Pile, изъ-являетъ своимъ сомнѣніи на стѣхъ справедливости обыкновеннаго способа опредѣленія шансовъ (chances) играющихъ въ эту игру. Пока-жетъ, на одномъ вопросѣ, въ чѣмъ состоятъ его возраженіе.*

Спрашивается, какъ велика отропность, что при дукратномъ бросаніи монеты, выпадетъ орелъ?

Рѣшеніе этого вопроса, предлагаемое всеми авторами, состоитъ въ слѣдующемъ: получаемъ четыре возможныхъ соединенія:

Бросая въ первый разъ: Бросая во второй разъ:

Орелъ.	Орелъ.
Рышетка.	Орелъ.
Орелъ.	Рышетка.
Рышетка.	Рышетка.

Изъ этихъ четырехъ случаевъ только въ по-сѣднемъ не выпадетъ орелъ, между тѣмъ какъ въ трехъ первыхъ выростетъ орелъ; слѣдова-тельно, искома въропность равна дроби $\frac{3}{4}$.

На это рѣшеніе д'Аламбертъ дѣлаетъ то замѣ-чаніе, что два соединенія, приводящія съ пер-ваго раза къ орлу, должны быть выключены въ одинъ случай, и это потому, что коль скоро выпалъ орелъ, то игра кончена, и второе бро-саніе монеты не считается. И такъ, по мнѣнію д'Аламберта, возможныхъ соединеній будетъ только три, именно:

Бросая въ первый разъ: Бросая во второй разъ:

Орелъ.	Бросать не нужно.
Рышетка.	Орелъ.
Рышетка.	Рышетка.

Слѣдовательно искома въропность изобразит-ся дробию $\frac{2}{3}$.

Ошибки д'Аламберта состояла въ томъ, что онъ принималъ равновозможными всѣ три раз-скадриваемыя тутъ соединенія, между тѣмъ какъ въропность появленія орла съ перваго раза

ожидаемо разна $\frac{1}{2}$, а *рыцетки* въ первый разъ и *орла* во второй, только $\frac{1}{4}$. Но когда определяешь вѣроятность дробью, [коей числитель изображаетъ совокупность благоприятныхъ случаевъ, а знаменатель, число всѣхъ возможныхъ случаевъ, но предполагается, что всѣ случаи равно возможны; то есть, что мы находимся въ совершенной неопредѣленности на счетъ ихъ появленія. Если же не всѣ случаи равно возможны, то приведенное сей-часъ опредѣленіе должно быть измѣнено; въ такомъ предположеніи вѣроятность событія изобразится суммою вѣроятностей всѣхъ благоприятныхъ случаевъ. И такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ, въ комбинаторѣ вѣроятности двухъ благоприятныхъ случаевъ были $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$, сумма $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ изобразитъ вѣроятность вскрытія *орла* по крайней мѣрѣ одинъ разъ при двукратномъ бросаніи монеты.

CROIX D'ARPENTAGE. (Землем.) **ЗЕМЛЕМѢРНЫЙ КРЕСТЬ.** Угломѣрный инструментъ, который нѣкогда былъ въ употребленіи въ Землемѣріи.

CROIX GÉOMÉTRIQUE или **ARVALÈTE.** (Аспр.) **ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КРЕСТЬ.** Инструментъ, похожій на крестъ, и посредствомъ котораго нѣкогда определяли высоту солнца на мѣрѣ. Въ *Encyclopédie Méthodique, Mathématiques*, въ статьѣ *Арвалѣте*, помѣщено описаніе *геометрическаго креста*.

CROIX GNOMONIQUE. (Гном.) **ГНОМОНИЧЕСКИЙ КРЕСТЬ.** Родъ солнечныхъ часовъ, извѣстныхъ видѣ креста. Читатели найдутъ описаніе этого квадрата въ *Dictionnaire universel de Mathématique et de Physique par Savarién* (Том. 1 стр. 249).

CROQUIS или **BROUILLON.** **ЧЕРКОВОЙ ЛИСТЪ, ЧЕРНОВОЙ ЧЕРТЕЖЪ** или **ПЛАНЪ.** Листъ бумаги, на которомъ опмѣчаютъ всѣ измѣренія, производимыя при какой либо геодезической или землемерной съѣмкѣ.

CRUCIFORME (**HYPERBOLE**). (Геом.) **КРЕСТО-ОБРАЗНАЯ ГИПЕРБОЛА.** Такъ называлъ *Ньютонъ* одну изъ гиперболъ шретьяго порядка по той причинѣ, что двѣ ея вѣтви пересѣкаются въ видѣ креста.

CUBATION, или, употребительнѣе **CUBATURE D'UN SOLIDE.** (Геом.) **КУБАТУРА.**

Измѣреніе объема геометрическаго тѣла; Смоч. **VOLUME.** — Въ тѣсномъ смыслѣ подъ *кубатурою* тѣла разумѣютъ построеніе такого куба, котораго объемъ равнялся бы уже найденному объему разсматриваемаго тѣла. Эта задача рѣдко можетъ быть рѣшена посредствомъ элементарной Геометріи, допускающей въ построеніяхъ своихъ только *прямую линію*, опредѣляемую двумя точками, и *кругъ*, описанный извѣстнымъ радиусомъ изъ данного центра. Такъ напримѣръ; невозможно построить *геометрически* спороу такого куба, котораго объемъ былъ бы вдвое болѣе объема данного куба. Смоч. **DUPPLICATION DU CUBE, CONSTRUCTION.**

CURE или **HEXAÈDRE.** (Геом.) Отъ Греческ. *κῦβος, ἑξαγωνία* **КУБЪ, ГЕКСАЗДРЪ, ПРАВИЛЬНЫЙ ШЕСТИГРАННИКЪ.** Правильный многогранникъ, ограниченный шестью равными квадратами. Кубъ, коего ребро есть линейная единица, принимается, по объему своему, за *единичный*, и съ нимъ сравниваютъ объемы всѣхъ другихъ тѣлъ. И такъ, когда говоримъ, что объемъ прямоугольнаго параллелепипеда равняется произведенію трехъ его реберъ, то разумѣемъ, что каждое ребро предварительно сравнено съ линейною единицею, и выражено числомъ. Следовательно, произведеніе трехъ реберъ будетъ число означенное, означающее сколько разъ единичный кубъ содержится въ данномъ параллелепипедѣ.

PROBLÈME DE LA DUPPLICATION DU CUBE. Задача объ удвоеніи куба. Смоч. **DUPPLICATION.**

CUBE. (Ариф. и Алг.) **КУБЪ, ТРЕТЬЯ СТЕПЕНЬ.** Кубомъ называется произведеніе трехъ равныхъ множителей. И такъ, кубъ числа 2 будетъ $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$, кубъ 3 равняется $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$ и проч. Кубъ двучленнаго количества $a + b$ есть $(a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. *Elever au cube; возвысить въ кубъ, въ третью степень.*

Цѣлыя числа, по дѣлности на 3, могутъ быть слѣдующихъ трехъ видовъ: $3k$, $3k+1$ и $3k+2$. Сосчитавъ кубъ каждого изъ нихъ, получимъ

$$(3K)^3 = 27K^3 = 9(3K^3)$$

$$(3K+1)^3 = 27K^3 + 27K^2 + 9K + 1 = 9(3K^3 + 3K^2 + K) + 1$$

$$(3K-1)^3 = 27K^3 - 27K^2 + 9K - 1 = 9(3K^3 - 3K^2 + K) - 1.$$

И такъ, точный кубъ, по делимости на 9, долженъ быть одного изъ слѣдующихъ трехъ видовъ: $9E$, $9E+1$ и $9E-1$. Изъ этого заключаемъ, что всякій кубъ, по раздѣленіи на 9, даетъ въ остатокъ или 0, или +1, или -1. Отсюда слѣдуетъ, что цѣлыя числа вида $9E \pm 2$, $9E \pm 3$, $9E \pm 4$ не могутъ быть точными кубами.

RACINE CUBE, или, употребительнѣе, **RACINE CUBIQUE**. Кубичный корень. Кубичнымъ корнемъ изъ какого нѣ есть числа называется такой множитель, который буди умноженъ на свой квадратъ, произведетъ данное число. И такъ, 2 есть кубичный корень изъ 8, ибо $2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; $(a+b)$ есть корень кубичный изъ $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, ибо $(a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a+b)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Extraire la racine cube или cubique; извлечь кубичный корень. Дѣйствіе извлеченія кубичнаго корня означается знакомъ $\sqrt[3]{}$; и такъ, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b$. Смол. EXTRAC-TION.

CUBE DU CUBE. КУБЪ КУБА. Такъ называли Арабскіе писатели, а послѣдствіи и другіе, *девятую степень* числа.

CUBER UN SOLIDE. (Геом.) **НАЙТИ ОБЪЕМЪ** геометрическаго тѣла Смол. VOLUME.

CUBIQUE (UNITÉ). (Геом.) **КУБИЧЕСКАЯ ЕДИНИЦА, ЕДИНИЧНЫЙ КУБЪ**. Такъ называется кубъ, съ объемомъ котораго сравниваютъ объемы другихъ тѣлъ. Смол. CUBE въ геометрическомъ значеніи.

PARABOLES CUBIQUES. Кубическія параболы. Première parabole cubique или parabole cubique du premier degré. Первая кубическая парабола или кубическая парабола первой степени. Кривая, определяемая уравненіемъ $y^3 = px$; она имѣетъ точку изгиба въ началѣ координатъ. Seconde parabole cubique или parabole cubique du second degré. Вторая кубическая парабола или кубическая парабола второй степени. Кривая, определяемая уравненіемъ $y^3 = px^2$; она имѣетъ точку возврата въ началѣ координатъ.

ELLIPSE CUBIQUE. КУБИЧЕСКІЙ ЭЛЛИПСЪ.

Кривая линія трехей степени, определяемая уравненіемъ $y^2 = px^2 - qx^3$. Она состоитъ изъ двухъ безконечныхъ вѣтвей, и слѣдовательно не имѣетъ никакого сходства съ обыкновеннымъ эллипсомъ.

HYPERVOLE CUBIQUE. КУБИЧЕСКАЯ ИПЕРВОЛА. Кривая, определяемая уравненіемъ $y^4 = px^2 + qx^3$. Смол. CONIQUES (SECTIONS — D'UN ORDRE SUPERIEUR).

CUBIQUE. (Арие. и Алг.) **КУБИЧНЫЙ**. Nombre cubique; кубическое число, кубъ. Racine cubique; кубичный корень. Equation cubique; кубическое уравненіе, уравненіе третьей степени. Смол. CARDAN (REGLE DE). Table des nombres cubiques; таблица кубовъ. Таблица, въ которой кубы цѣлыхъ чиселъ расположены по порядку.

CUBO-CUBE. КУБЪ-КУБЪ. Такъ называлъ Диофантъ, а послѣ него Вѣтъ и другіе авторы, *шестую степень*. Для означенія *девятой степени* они употребляли названіе *кубъ-кубъ-кубъ* (cubo-cubo-cube). Смол. CARRÉ-CARRÉ.

CULMINANT (POINT). (Астр.) **КУЛЬМИНАЦИОННАЯ ТОЧКА**. Точка, въ которой свѣтъ, въ суточномъ обращеніи около земли, достигаетъ наибольшей высоты надъ горизонтомъ. Когда склоненіе свѣтила не перемѣняется, то эта точка находится на меридіанѣ; въ противномъ случаѣ она удалена отъ меридіана, но всегда на весьма малый часовой уголъ.

CULMINATION. (Астр.) **КУЛЬМИНАЦІЯ**. Время прохожденія свѣтила чрезъ меридіанъ.

CULTELLATION (MÉTRODE DE). (Землем.) **СПОСОБЪ ПРОЕКТИРОВАНІЯ**. Нѣкоторые авторы называли *способомъ развѣрзанія* (méthode de développement) способъ измѣренія поверхности наклоннаго къ горизонту участка земли; проектированіе же этой поверхности на горизонтальную плоскость, или, что все равно, опредѣленіе горизонтальнаго основанія участка земли, составляло предметъ такъ называемаго *способа проектированія* (méthode de cultellation).

CUNEUS. Лашинское названіе *лины*. Смол. COIN.

CURSEUR. УКАЗАТЕЛЬ, СТРЕЛКА. — БЫГУНЕЦЪ. — ПОДВѢЖНАЯ НИТЬ въ микрометрѣ

CURTATION, по Лейбницки *curtatio*. (Астр.) **УКРА-**

ЩЕНИЕ. Разность между истиннымъ разстояніемъ планеты отъ солнца и проекціею ея разстоянія на плоскости эклиптики. Эта проекція называется *укращеннымъ разстояніемъ* (*distance raccourcie*).

CURTICONE. Смол. **CONE TRONQUÉ**.

CURVA IN CURVAM (DIFFERENTIATIO DE).

(Ини. Исч.) **ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПОДЪ ИНТЕГРАЛЬНЫМЪ ЗНАКОМЪ**; собственно: дифференцирование отъ кривой до кривой. Такъ Лейбницъ называлъ способъ, на который онъ былъ введенъ занимаясь рѣшеніемъ одного вопроса объ *синхроническихъ* или *одновременныхъ кривыхъ*, предложенныхъ ему *Иваномъ Бернулли*. Теорема Лейбница состоитъ въ следующемъ: изобразимъ чрезъ $f(x, y)$ функцію двухъ переменныхъ независимыхъ x и y , и положимъ, что требуется найти величину $\frac{d \int f(x, y) dx}{dy}$, то есть,

производящую интеграла $\int f(x, y) dx$ по измѣняемой переменнѣ y . По теоремѣ Лейбница будетъ

$$\frac{d \int f(x, y) dx}{dy} = \int \frac{d f(x, y)}{dy} dx.$$

Это предложеніе доказывалось весьма просто; дѣйствительно, положивъ $u = \int f(x, y) dx$, получимъ

$\frac{du}{dx} = f(x, y)$ и $\frac{d^2 u}{dx dy} = \frac{d f(x, y)}{dy}$; но $\frac{d^2 u}{dx dy} = \frac{d^2 u}{dy dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dy} \right)$ [смол. DIFFERENTIEL (CALCUL)]; слѣдовательно

$$\frac{d \left(\frac{du}{dy} \right)}{dx} = \frac{d f(x, y)}{dy}.$$

Интегрируя это уравненіе относительно x , получимъ

$$\frac{du}{dy} = \int \frac{d f(x, y)}{dy} dx,$$

или, окончательно

$$(A) \quad \frac{d \int f(x, y) dx}{dy} = \int \frac{d f(x, y)}{dy} dx,$$

наблюдая что $u = \int f(x, y) dx$.

Лейбницъ называлъ этотъ способъ *differentiatio de curvâ in curvâ* потому что въ вопросѣ, въ которомъ онъ употреблялъ этотъ пріемъ, надо-

было переходить отъ одной кривой линіи къ другой, того же рода, измѣняя безконечно мало постоянный параметръ, входящій въ уравненіе первой изъ нихъ.

Правило, выражаемое уравненіемъ (A), полезно для нахождения многихъ *неопредѣленныхъ* и *опредѣленныхъ* интеграловъ. Такъ напримѣръ, дифференцируя m разъ сряду интегралъ

$$\int \frac{dx}{a+x^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctang. \frac{x}{\sqrt{a}} + \text{const.}$$

относительно постоянной величины a , получимъ

$$\int \frac{1.2.3...m dx}{(a+x^2)^{m+1}} = -\frac{a^m \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \arctang. \frac{x}{\sqrt{a}} \right]}{d a^m} + \text{const.}$$

откуда

$$\int \frac{dx}{(a+x^2)^{m+1}} = -\frac{d^m \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \arctang. \frac{x}{\sqrt{a}} \right]}{1.2.3...m. d a^m} + \text{const.}$$

Равнымъ образомъ, такъ какъ

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a+x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}},$$

то дифференцируя это уравненіе m разъ относительно a , и раздѣливъ попомѣ на произведеніе $1.2.3...m$, получимъ

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)^{m+1}} &= \frac{1}{1.2.3...m} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{d^m \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right)}{d a^m} \\ &= \frac{1.3.5...(2m-1)}{2.4.6...(2m)} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a^{m+\frac{1}{2}}}; \end{aligned}$$

полагая $a=1$, найдемъ

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{m+1}} = \frac{1.3.5...(2m-1)}{2.4.6...(2m)} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Вотъ еще примѣры:

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + \text{const.}, \quad \int_0^\infty e^{-ax} dx = a^{-1} \text{ (для } a > 0 \text{)}.$$

Дифференцируя эти два интеграла m разъ сряду относительно постоянного количества a , найдемъ:

$$\int x^m e^{ax} dx = -\frac{d^m \left(\frac{e^{ax}}{a} \right)}{d a^m} + \text{const.}$$

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax} dx = (-1)^m \frac{d^m (a^{-1})}{d a^m} = \frac{1.2.3...m}{a^{m+1}}.$$

Изъ интеграловъ

$$\int \cos ax. dx = \frac{\sin ax}{a}, \quad \int \sin ax. dx = -\frac{\cos ax}{a}$$

выведемъ точно также образцы

$$\int x^{2m} \cos ax \cdot dx = (-1)^m \frac{d^{2m} \left(\frac{\sin ax}{a} \right)}{da^{2m}} + \text{const.}$$

$$\int x^{2m-1} \sin ax \cdot dx = (-1)^m \frac{d^{2m-1} \left(\frac{\sin ax}{a} \right)}{da^{2m-1}} + \text{const.}$$

$$\int x^{2m} \sin ax \cdot dx = (-1)^{m+1} \frac{d^{2m} \left(\frac{\cos ax}{a} \right)}{da^{2m}} + \text{const.}$$

$$\int x^{2m-1} \cos ax \cdot dx = (-1)^m \frac{d^{2m-1} \left(\frac{\cos ax}{a} \right)}{da^{2m-1}} + \text{const.}$$

Правило Лейбница может сделаться ошибочным для определенных интегралов, когда функция под знаком \int обращается в бесконечность между пределами интегрирования, или еще, когда один или оба предела суть бесконечны величины.

CURVILIGNE. (Геом.) **КРОВОЛИНЕЙНЫЙ.** *Figure curviligne; криволинейная фигура;* фигура, ограниченная кривыми линиями, например: *кругъ, эллипсъ, сферический треугольник* и проч.

QUADRILATÈRE CURVILIGNE. Криволинейный четырехугольник. Фигура, начерченная на какой нибудь поверхности, кривой или плоской, и ограниченная четырьмя кривыми линиями.

ANGLE CURVILIGNE. Криволинейный уголъ. Уголъ, составленный двумя пересѣкающимися кривыми. Для измѣренія подобнаго угла, проводимъ въ точку пересѣченія двухъ кривыхъ касательную къ каждой изъ нихъ; уголъ, заключающийся между сими касательными, равняется криволинейному углу. Если разсматриваемыя кривыя будутъ касательны одна къ другой, то очевидно криволинейный уголъ, образуемый ими въ точкѣ касанія, обращается въ нуль.

CURVILIGNE (MOUVEMENT). (Мех.) **КРОВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНІЕ.** Теорія криволинейнаго движенія тѣло связана съ различными соображеніями, которыя подробно изложены въ словахъ: **FORCE, INERTIE, MASSE, MOUVEMENT, VITESSE.** Но, для удобности читателей, мы занестьемъ изъ помянутыхъ слѣдующихъ нѣкоторыхъ опредѣленій и понятій, необходимыхъ для яснаго изложенія теоріи криволинейнаго движенія.

Весьма малое тѣло, или такъ называемая *матеріальная точка* (point matériel), неподверженная дѣйствію никакой силы, и разсматриваемая независимо отъ другихъ тѣлъ, должна или оставаться въ покое абсолютномъ, или имѣть абсолютное движеніе по прямой линіи съ постоянною скоростью. Въ такомъ предположеніи говорить, что тѣло *сохраняетъ* свое состояніе. И такъ, выражаясь о тѣлѣ, что оно *сохраняетъ* свое состояніе, мы разумѣемъ, что оно или находится въ покое, или движется по прямой линіи, переходя равныя пространства въ равныя времена. Когда тѣло движется иначе, то есть, не по прямой линіи съ постоянною скоростью, то говорить, что состояніе тѣла *перемѣняется*; можно доказать, что эта перемѣна происходитъ всегда отъ нѣкоторой причины, независимой отъ самаго тѣла; эта причина, какова бы она ни была, называется *силою*. Впрочемъ не должно терять изъ виду, что здесь говорится о покое и движеніи абсолютномъ.

Силы не принимаются въ этомъ метафизическомъ значеніи въ Механикѣ: въ ней разсматриваются силы только въ отношеніи производимыхъ ими дѣйствій на тѣла. Легко доказать (См.от. FORCE), что *дѣйствіе силы по какому нибудь направлению A* выражается произведеніемъ $\frac{d(v \cos \omega)}{dt} \cdot \frac{dt^2}{2}$, гдѣ v изображаетъ скорость движущейся точки, dt элементъ времени, а ω уголъ, составленный съ прямою A направленіемъ скорости, или, что все равно, направленіемъ касательной къ траекторіи. Принимая въ соображеніе только первый изъ двухъ множителей, то есть $\frac{d(v \cos \omega)}{dt}$, получаемъ такъ называемую, весьма несвойственно, *силу ускорительную* (force accélératrice). Мы говоримъ несвойственно, и это потому, что слово *сила* представляеть уму понятіе о причинѣ метафизической, между тѣмъ какъ сила ускорительная есть выраженіе чисто аналитическое. Подъ *силою движущею* (force motrice) разумѣютъ произведеніе массы движущагося тѣла на ускорительную силу; и такъ, если означимъ чрезъ m эту массу, то $m \frac{d(v \cos \omega)}{dt}$ изобразитъ движущую силу.

Основываясь на этомъ выраженіи, легко опредѣлить движущую силу, отъ дѣйствія которой точка будетъ описывать данную кривую линію.

Для этого, определяем проекции силы на трехъ направленияхъ, заключающихся въ одной плоскости, и поможемъ, по извѣстнымъ правиламъ Геометріи, находимъ величину и направление силы для какого ни есть мгновенія. Для простѣйшаго рѣшенія подобныхъ задачъ, полезно основаться съ различными выраженіями проекцій силы на направленія, чаще другихъ встречающихся. Опредѣлимъ сперва проекцію силы на перпендикуляръ къ плоскости кривизны; [Смол. COURBURE (PLAN DE)]. Для этого спомниъ только подставили въ формулу

$$m \frac{d(v \cos \omega)}{dt} = m \left(\frac{dv}{dt} \cos \omega - v \sin \omega \frac{d\omega}{dt} \right)$$

величины v и ω относящихся къ разсматриваемому нами случаю. Но, въ настоящемъ случаѣ, $\omega = \frac{\pi}{2}$, и сверхъ того легко видѣть, что $\frac{d\omega}{dt} = 0$; дѣйствительно, ω есть уголъ, составляемый касательною къ кривой съ перпендикуляромъ къ плоскости кривизны, а $\omega + d\omega$ изображаетъ уголъ смежной касательной съ нѣтъ же перпендикуляромъ; но какъ эти двѣ касательныя заключаются въ плоскости кривизны, то и будешь въ одно время $\omega = \frac{\pi}{2}$ и $\omega + d\omega = \frac{\pi}{2}$, и следовательно $d\omega = 0$. Отсюда заключаемъ, что проекція силы на направленіи перпендикулярномъ къ плоскости кривизны, равна нулю, то есть, что самая сила заключается въ этой плоскости.

Легко вывести выраженія проекцій силы на разныхъ направленіяхъ. Приводимъ нѣкоторые изъ этихъ выраженій, которые доказаны въ слѣдующихъ: FORCE.

На касательной.... $m \frac{dv}{dt}$

На радіусъ кривизны: $\frac{mv^2}{\rho}$ (ρ изображаетъ радіусъ кривизны).

На прямоугольныхъ координатныхъ осяхъ:

$$\begin{cases} \text{на оси } x \dots \dots m \frac{d^2x}{dt^2} \\ \text{на оси } y \dots \dots m \frac{d^2y}{dt^2} \\ \text{на оси } z \dots \dots m \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

На радіусъ вектора: $m \left[\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{1}{r} (dr^2 - v^2) \right]$

и проч. и проч.

Переходимъ теперь къ приложеніямъ приведенныхъ формулъ.

а.) Положимъ, что требуется найти силу, отъ дѣйствія которой мгновенная точка двигалась бы по плоской кривой такъ, чтобы радіусъ вектора описывалъ площадь, пропорціональную временамъ около точки, данной въ плоскости праекторія. Такъ какъ данная кривая есть плоская, то достаточно имѣть двѣ проекціи силы на двухъ прямыхъ, заключающихся въ плоскости кривой. Мы выберемъ на этомъ концѣ радіусъ вектора и перпендикуляръ къ этому радіусу. Найдемъ сперва проекцію на последнемъ изъ сихъ двухъ направленій. Примемъ за координатную плоскость x —ось и y —ось плоскости кривой линіи; изобразимъ чрезъ α и β углы, составляемые перпендикуляромъ къ радіусу вектору съ координатными осями x и y , получимъ для иско- мой проекціи силы выраженіе $m(\cos \alpha \frac{d^2x}{dt^2} + \cos \beta \frac{d^2y}{dt^2})$.

Но, по условію перпендикулярности радіуса вектора и прямой, на которую проецировали силу, имѣемъ $x \cos \alpha + y \cos \beta = 0$, откуда $\frac{\cos \alpha}{y} = -\frac{\cos \beta}{x}$
 $= \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \pm \frac{1}{r}$, разумѣя подъ r длину радіуса вектора. И такъ, $\cos \alpha = \pm \frac{y}{r} \cos \beta = \mp \frac{x}{r}$, почему искомая проекція приметъ видъ $\pm m \left(\frac{y d^2x - x d^2y}{dt^2} \right)$
 $= \pm m \frac{d(y dx - x dy)}{dt^2}$.

Но извѣстно изъ Геометріи, что $y dx - x dy$ изображаетъ удвоенный элементъ площади, описываемой радіусомъ векторомъ *); слѣдовательно

*) Чтобы доказать это предположеніе, вспомнимъ только, что если примемъ одинъ уголъ треугольника въ началѣ координатъ, и предположимъ, что координаты двухъ другихъ угловъ изображены чрезъ x и y , x' и y' , то площадь треугольника выразится чрезъ $\frac{x'y - y'x}{2}$. Элементъ площади, описываемой радіусомъ векторомъ, можетъ быть принимаемъ за треугольникъ; координаты полюса радіуса вектора, то есть одного изъ угловъ треугольника, равны нулю, а координаты двухъ другихъ угловъ, будутъ x и y , $x + dx$ и $y + dy$, подставляя въ выраженіе $\frac{x'y - y'x}{2}$, $x + dx$ на мѣсто x' , а $y + dy$ на мѣсто y' , получимъ $\frac{y dx - x dy}{2}$. Это самое предположеніе доказано другимъ образомъ въ примѣчаніи на стр. 167 (Часть I) нашего Лекціона.

ко, изобразивъ чрезъ s площадь, описываемую радиусомъ векторомъ въ единицу времени, получимъ $xdx - xdy = \pm 2cdt$, откуда $d(xdy - xdx) = 0$. Это уравнение показываетъ, что проекція силы на направленіе перпендикулярномъ къ радиусу вектору, равна нулю. И такъ сила направляется по радиусу вектору, и следовательно направленіе ея проходитъ чрезъ центръ, около котораго радиусъ векторъ описываетъ площади, пропорціональныя временамъ.

Остается теперь опредѣлить проекцію силы на радиусъ векторъ; очевидно что эта проекція не различается отъ самой силы по величинѣ своей, а разлѣ только по знаку. И такъ, изобразивъ чрезъ R неизвѣстную силу, получимъ

$$R = \pm m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{dr}{dt} - v^2 \right) \right];$$

знакъ $+$ принадлежитъ тому случаю, когда R направляется по радиусу вектору, то есть, когда центральная сила оппозитивающа, а знакъ $-$ относится къ предположенію силы притягательной. Введемъ на мѣсто прямоугольныхъ координатъ x и y полярныя r и p , такъ чтобы $x = r \cos p$, $y = r \sin p$. Найдется $v^2 = \frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{dp^2}{dt^2}$, и следовательно $R = \pm m \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \frac{dp^2}{dt^2} \right)$.

Но легко видѣть, что условіе пропорціональности площадей къ временамъ выражается въ полярныхъ координатахъ уравненіемъ $r^2 dp = 2c dt$, откуда $r \frac{dp^2}{dt^2} = \frac{4c^2}{r^3}$, почему $R = \pm m \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{4c^2}{r^3} \right)$.

Теперь стоитъ только освободить вторую часть послѣдней формулы отъ дифференціала времени; для этого, имѣемъ $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dp} \cdot \frac{dp}{dt}$, или, въ слѣдствіе уравненія площадей, изъ котораго

$$\frac{dp}{dt} = \frac{2c}{r^2}, \text{ получимъ } \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dp} \cdot \frac{2c}{r^2} = -2c \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dp}; \text{ дифференцируя еще одинъ разъ относительно } t, \text{ найдемъ}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -2c \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dp^2}, \frac{dp}{dt} = -\frac{4c^2}{r^3} \cdot \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dp^2},$$

откуда окончательно

$$R = \mp \frac{4c^2 m}{r^3} \left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dp^2} + \frac{1}{r} \right].$$

Очевидно, что сила R не можетъ быть опре-

дѣлена показателемъ видъ кривой, описываемой материальною точкою будетъ неизвѣстенъ; но когда кривая дана по своему уравненію между

r и p , то легко найти выраженіе $\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dp^2}$ въ функціи r , и следовательно самую силу R . Положимъ напримѣръ, что описываемая кривая есть эллипсъ, котораго одинъ фокусъ совпадаетъ съ полюсомъ радиуса вектора. Изобразивъ чрезъ a большую полу-ось, а чрезъ e эксцентриситетъ эллипса, получимъ

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos p}, \text{ откуда } \frac{1}{r} = \frac{1+e \cos p}{a(1-e^2)};$$

следовательно

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dp^2} = -\frac{e \cos p}{a(1-e^2)}.$$

И такъ, найдемъ

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dp^2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{a(1-e^2)},$$

и наконецъ

$$R = \mp \frac{4c^2 m}{a(1-e^2)} \cdot \frac{1}{r^3}.$$

Очевидно, что въ этой формулѣ должно допустить знакъ $+$, а это показываетъ что сила R притягательная; сверхъ того, заключаемъ изъ той же формулы, что найденная сила обратно пропорціональна квадрату расстоянія движущейся точки отъ притягательнаго центра *).

На такомъ основаніи *Нютонъ* опредѣлялъ силу, движущую планетныя массы въ орбитахъ эллиптическихъ, вѣющихъ фокусы свои въ центръ солнца, и радиусы векторы которыхъ описываютъ около центра сего свѣтила площади, пропорціональныя временамъ. Нютонъ нашелъ предвѣдущую величину для R , выражающую законъ всеобщаго тяготѣнія. Смот. ATTRACTION, CENTRALES (FORCES).

б.) Приведенный частный случай показываетъ какимъ образомъ по данному движенію опредѣляется сила, производящая это движеніе. Рѣшеніе обратнаго вопроса составляетъ собственно теорію криволинейнаго движенія. Предполагается, что дана сила по величинѣ и по направленію,

*) Эта самая задача рѣшена въ статьѣ: CENTRALES (FORCES).

а ищется движение, производимое ею. Легко составить уравнения, в которых заключается решение этого вопроса. Действительно, изобразим через R движущую силу, а через λ угол, составляемый ею с данным направлением A , то есть с тем самым, которое с касательною к кривой составляет угол ϵ ; $R \cos \lambda$ изобразит проекцию силы R на направление A . Но мы видели выше, что $m \frac{d(v \cos \omega)}{dt}$ выражает эту самую проекцию; следовательно

$$(A) \quad R \cos \lambda = m \frac{d(v \cos \omega)}{dt}.$$

Вот общее уравнение движения материальной точки, подверженной действию какой нибудь силы R . Если бы материальная точка была побуждаема несколькими силами P', P'', P''', \dots , то надлежало бы совокупить их в одну равнодействующую (См. COMPOSITION DES FORCES), и означив ее через R , опять употребили бы ту же формулу (A).

Уравнение (A) не определяет вполне рассматриваемого движения; и действительно, легко видеть, что при одной и той же силе, движение может быть весьма разнообразно, смотря на положение движущейся точки, также на величину и направление ее скорости в определенное мгновение. Не должно отнositь этого обстоятельства к неполноте приведенной нами формулы: заключается в этом, что по данной только силе, невозможно определить всех обстоятельств движения. Надобно к знанию силы прибавить еще, что для определенного времени $t = \tau$, положение движущейся точки, величина и направление ее скорости известны. Так например можно положить, что для $t = \tau$, имеем

$$x = a, y = b, z = c, \frac{dx}{dt} = \alpha, \frac{dy}{dt} = \beta, \frac{dz}{dt} = \gamma,$$

где x, y, z изображают координаты движущейся точки, а $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ проекции скорости на трех координатных осях. Эти проекции, как известно, совершенно определяют величину и направление скорости.

Для употребления формулы

$$R \cos \lambda = m \frac{d(v \cos \omega)}{dt},$$

сначала только предположим, что направление A перпендикулярно совпадает с тем же направлением, не заключающимся в одной плоскости.

Таким образом получатся три уравнения, которые в совокупности с условием об известном состоянии движущейся точки в данное мгновение, будут необходимы, и вместе с тем достаточны, для определения всех обстоятельств рассматриваемого движения. Что касается до выбора проекций, то это будет зависеть от произвольности и искусства анализа; но несомненно, что при удачном выборе проекций, должно ожидать значительных упрощений в вычислениях.

Положим, например, что желаем определить движение точки m , побуждаемой силою, которая постоянно направляется к неподвижному центру C (см. 15 Лист VI), и выражается некоторою функцией расстояния r точки m от C . Пусть будет R эта сила. Сверх того, изобразим через β скорость движущейся точки, соответствующую известному мгновению, которое примем за начало времени, а через α угол, составляемый направлением скорости β с радиусом вектором $\overline{CA} = a$. Означим через δ угол, заключающийся между радиусом вектором a и неподвижною прямою CB , взятою по произволению. По истечении времени t , движущаяся точка перейдет в положение m ; вопрос состоит в определении всех обстоятельств ее движения. Во первых легко видеть, что движение будет происходить в плоскости, проходящей через неподвижный центр C и через направление AD начальной скорости β . — И так, стоит только предположить, что направление A совпадает с двумя какими нибудь прямыми, заключающимися в плоскости движения. За одну из сих прямых мы возьмем линию, перпендикулярную к радиусу вектору, а за другую, касательную к траектории. Разсмотрим сперва проекцию силы на последний из сих двух направлений. Если изобразим через v скорость движущейся точки, то проекция силы R на касательную к траектории будет $-R \frac{dr}{v dt}$, ибо легко видеть, что $-\frac{dr}{v dt}$ изображает косинус угла, составляемого радиусом вектора с касательною к траектории. Но, с другой стороны, та же проекция выражается через $\frac{dv}{dt}$; следовательно

$$m \frac{dv}{dt} = -R \frac{dr}{v dt}, \quad \text{или, полагая } \frac{R}{m} = P, \\ (B) \quad v dv = -P dr.$$

Проекция на линию, перпендикулярную к радиусу вектору, равна нулю; но она выражается также чрез

$$\pm \frac{x dy - y dx}{dt^2} = \pm \frac{d\left(\frac{xy - y^2 dx}{dt}\right)}{dt} = \pm \frac{d(r^2 dp)}{dt^2},$$

разукта под p переменный угол BCm (черт. 15); следовательно

$$(C) \quad \frac{d(r^2 dp)}{dt^2} = 0.$$

Уравнения (B) и (C) суть без сомнения простейшие из всех, которые могут быть составлены для решения занимающего нас вопроса. Интегрируя их от $t=0$, найдем непосредственно

$$v^2 = \dot{\rho}^2 - 2 \int_a^r P dr \quad \text{и} \quad r^2 \frac{dp}{dt} = 2c;$$

последнее уравнение показывает, что площади, описываемые радиусом вектором, пропорциональны времени, а постоянное количество c изображает площадь, описанную радиусом вектора в единицу времени. Если, на место квадрата скорости v^2 , подставим равную ему величину $\frac{dr^2 + r^2 \dot{\rho}^2}{dt^2}$, то первое уравнение примет вид

$$\frac{dr^2 + r^2 \dot{\rho}^2}{dt^2} = \dot{\rho}^2 - 2 \int_a^r P dr,$$

или, по причине $r \frac{dp}{dt} = \frac{2c}{r}$,

$$\frac{dr^2}{dt^2} = \dot{\rho}^2 - \frac{4c^2}{r^2} - 2 \int_a^r P dr.$$

Это уравнение, в котором переменные почтась отделяются, доставляет

$$(D) \quad dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\dot{\rho}^2 - \frac{4c^2}{r^2} - 2 \int_a^r P dr}},$$

и следовательно

$$(E) \quad d\rho = \pm \frac{2cd\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\dot{\rho}^2 - \frac{4c^2}{r^2} - 2 \int_a^r P dr}}.$$

Нельзя извлечь никаких следствий из формул (D) и (E), пока не дана функция радиуса вектора r , изображающая силу P ; мы можем

только во второй из этих формул определить постоянную величину c . — Для этого надобно найти площадь, описываемую радиусом вектором в элемент времени dt , и разделить ее на dt . В первое мгновение, считая от начала движения, материальная точка опишет элементарное пространство $AA' = \dot{\rho} dt$; следовательно площадь треугольника ACA' , разбивающая эту площадь сектора ACN , действительно описываемого радиусом вектором, только величинам бесконечно малым порядков пренебрегающих первым, выразится чрез $\frac{a\dot{\rho} \sin \alpha \cdot dt}{2}$; и такъ, раздѣля на dt , получимъ $c = \frac{a^2 \sin \alpha}{2}$.

Положимъ въ частности $P = \frac{k}{r^2}$, разуйя под k постоянный коэффициентъ. Это предположеніе будетъ относиться къ закону всеобщаго тяготѣнія. Получимъ

$$\int_a^r P dr = -k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

и следовательно, принявъ въ соображеніе одно уравненіе (E), определяющее видъ траекторіи, найдемъ

$$d\rho = \pm \frac{2cd\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\dot{\rho}^2 - \frac{2k}{a} + \frac{2k}{r} - \frac{4c^2}{r^2}}},$$

или

$$d\rho = \pm \frac{2cd\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\dot{\rho}^2 - \frac{2k}{a} + \frac{k^2}{4c^2} - \left(\frac{2k}{r} - \frac{k}{2c}\right)^2}}.$$

Легко видѣть, что величина $\dot{\rho}^2 - \frac{2k}{a} + \frac{k^2}{4c^2}$ всегда положительная; действительно, если на место положительной c подставимъ ея величину, то найдемъ

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^2 - \frac{2k}{a} + \frac{k^2}{4c^2} &= \dot{\rho}^2 - \frac{2k}{a} + \frac{k^2}{a^2 \sin^2 \alpha} \\ &= \dot{\rho}^2 - \frac{2k}{a} + \frac{k^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{a^2 \sin^2 \alpha} \\ &= \left(\dot{\rho} - \frac{k}{a \sin^2 \alpha} \right)^2 + \frac{k^2}{a^2 \sin^2 \alpha} \cot^2 \alpha, \end{aligned}$$

а последнее количество, какъ сумма двухъ квадратовъ, очевидно будетъ положительное. Принявъ для сокращенія $\dot{\rho}^2 - \frac{2k}{a} + \frac{k^2}{4c^2} = l^2$, получимъ

$$dp = \frac{2cd \left(\frac{1}{r} \right)}{\sqrt{1^2 - \left(\frac{2c}{r} - \frac{2c}{k} \right)^2}};$$

Для интегрирования положим $\frac{2c}{r} = \frac{k}{2c} = b \cos q$;

найдем: $dp = \pm d\rho$ откуда $q = \pm(p + \pi)$ разумя под π постоянную величину. Следовательно

$$\frac{2c}{r} - \frac{k}{2c} = b \cos(p + \pi),$$

и наконец

$$r = \frac{\frac{4c^2}{b}}{1 + \frac{2bc}{k} \cos(p + \pi)}.$$

Вот уравнение траекторий; оно, как известно, принадлежит коническим сечениям.

Если $\frac{2bc}{k} < 1$, то кривая описываемая материальной точкой, будет эллипс; когда $\frac{2bc}{k} = 1$, то траектория будет парабола; наконец, если $\frac{2bc}{k} > 1$, то получится гипербла. Эти самые условия могут быть выражены еще следующими образом:

$$\text{Для эллипса: } \frac{4c^2 b^2}{k^2} < 1$$

$$\text{Для параболы: } \frac{4c^2 b^2}{k^2} = 1$$

$$\text{Для гиперболы: } \frac{4c^2 b^2}{k^2} > 1;$$

или, подставляя на мѣсто b^2 величину $\beta^2 - \frac{2k}{a} + \frac{k^2}{4c^2}$, получим условия:

$$\text{Для эллипса: } \frac{4c^2}{k^2} \left(\beta^2 - \frac{2k}{a} \right) < 0$$

$$\text{Для параболы: } \frac{4c^2}{k^2} \left(\beta^2 - \frac{2k}{a} \right) = 0$$

$$\text{Для гиперболы: } \frac{4c^2}{k^2} \left(\beta^2 - \frac{2k}{a} \right) > 0,$$

и, раздѣля на положительную величину $\frac{4c^2}{k^2}$, найдем окончательно:

$$\text{Для эллипса: } \beta^2 < \frac{2k}{a}$$

$$\text{Для параболы: } \beta^2 = \frac{2k}{a}$$

$$\text{Для гиперболы: } \beta^2 > \frac{2k}{a}.$$

с) Обратимся опять къ уравненію (А), которое напишемъ въ видѣ:

$$(F) \quad R \cos \lambda - m \frac{d(v \cos \omega)}{dt} = 0.$$

Для предстоющей намъ цѣли, полезно указать на особенное значеніе формулы (F), оправданное въ статьѣ FORCE, къ которой и отсылаемъ читателей.

Вещественная точка извѣщаетъ всегда сопротивление или оказываетъ противодействие всякой причинѣ, стремящейся перемѣнить ея состояніе. Напряженіе этого противодействия, называемое *силой инерціи*, зависитъ отъ массы матеріальной точки и отъ большей или меньшей степени, производимой перемѣны въ ея состояніи; что касается до направленія силы инерціи, то оно всегда прямопротивоположно тому, по которому измѣняется состояніе движущейся точки. Выраженіе $-m \frac{d(v \cos \omega)}{dt}$ изображаетъ проекцію силы инерціи на прямой А, составляющей уголъ ω съ касательною къ траекторіи. Изъ уравненія (F) слѣдуетъ, что движущая сила R уничтожаетъ силу инерціи, соотвѣствующую той перемѣнѣ состоянія, которой подверглась вещественная точка. Въ движеніяхъ свободныхъ это всегда справедливо, то есть, во всякомъ случаѣ движущая сила уничтожаетъ силу инерціи, которая обнаруживается отъ перемѣны, происшедшей въ движеніи тѣла.

Разсмотримъ матеріальную точку m , побуждаемую движущею силою R; положимъ, что еслибъ никакая сила не дѣйствовала на эту точку, то она, въ элементъ времени dt , перешла бы со скоростью v пространство AB (Черт. 16 Листъ VI); но отъ дѣйствія силы R, точка описываетъ прямую AC. Линія BC, безконечно малая втораго порядка, изображаетъ мѣру и силы движущей, и силы инерціи. Та жъ другая выразилась чрезъ $2m \frac{BC}{dt^2}$; что касается до ихъ направленій, то она прямопротивоположна: BC изображаетъ направленіе силы R, а CB, силы инерціи. Положимъ теперь, что точка m какимъ либо образомъ принуждена описывать прямую AD въ тождѣ самый элементъ времени dt . Ея сила инерціи будетъ по величинѣ $2m \frac{DB}{dt^2}$, а по направленію, прямая DB. Эта сила уже не уничтожится отъ дѣйствія движущей силы R; но еслия совокупимъ эти двѣ силы, то равнодѣйствующая ихъ

будетъ $2m \frac{DC}{dt}$ по величинѣ, а DC по направлению. Когда рассматриваемъ точку свободную, то эта равнодѣйствующая и будетъ препятствовать движущейся точкѣ или отъ A къ D .

Сказанное здѣсь приводить къ одному соображенію, которое весьма полезно въ теоріи движений, подверженныхъ какимъ либо препятствіямъ. Въ слѣдствіе соображенія, о которомъ говоримъ, мы можемъ допустить, что точка повинуется не движущей силѣ, но что она, въ продолженіе элемента времени dt , описываетъ безконечно малую прямую, описанную отъ той, которую дѣйствительно переходитъ; но, въ такомъ предположеніи, должно будетъ къ этому воображаемому движенію присовокупить дѣйствіе равнодѣйствующей силы инерціи, соотвѣтствующей истинному движенію, и движущей силы, приложенной къ матеріальной точкѣ.

Положимъ теперь, что матеріальная точка въ движеніи своемъ подвержена препятствію какого угодно рода; въ такомъ случаѣ она не будетъ повиноваться вполнѣ дѣйствію движущей силы, то есть, перемѣна въ ея состояніи дѣлается оппозитною отъ той, которой бы она подвергалась, еслибы была свободна. Въ этомъ предположеніи сила инерціи и движущая сила уже не уничтожаются взаимно. Если бы точка была свободна, то, въ силу сказаннаго выше, мы могли бы допустить, что она движется такъ, какъ бы двигалась, бывъ подвержена препятствію; но, въ такомъ случаѣ, въ мгновенному ея перемѣщенію надлежало бы прибавить дѣйствіе равнодѣйствующей движущей силы и силы инерціи. Въ исполненіи же предположенія, дѣйствіе, о которомъ говоримъ, должно уничтожаться, то есть, равнодѣйствующая силы движущей и силы инерціи должна сгруппироваться къ произведенію такихъ только перемѣщеній, которыя, по своему препятствію, невозможны. И такъ чтобы вывести уравненіе движенія матеріальной точки, подверженной препятствіямъ, сподручательно выразить, что равнодѣйствующая силы инерціи и силы движущей сгруппирована произвешитъ перемѣщенія, невозможныя по роду существующихъ препятствій.

Пусть будетъ Q эта равнодѣйствующая. Рассмотримъ теперь какія перемѣщенія сила Q ,

приложенная къ матеріальной точкѣ m , можетъ произвешити, и какія не можетъ. Во первыхъ легко показать, что если сила Q можетъ произвешити перемѣщенія по какому угодно направлению, то по припопозитному, перемѣщенія будутъ уже невозможны. Хотя это предположеніе очевидно само собою, однако же имъ воспользуемся. Положимъ, что сила Q (Черт. 17 Листъ VI) въ состояніи двигать точку m какъ по направленію mA , такъ и по припопозитному mB . Другая сила Q , равная и припопозитная первой, очевидно способна къ произведенію точки такого же дѣйствія, но если, она будетъ въ состояніи привести въ движеніе точку m какъ по направленію mB , такъ и по mA . Положимъ что эти двѣ силы Q приложены въ совокупности къ матеріальной точкѣ m , которая, по своему произволенію ей препятствій, можетъ имѣть движеніе только по направленію mA . Точка m должна имѣти по этому направленію, або кажда изъ силъ Q побуждать ее въ эту сторону. Но силы Q равны между собою и припопозитны; слѣдовательно онѣ взаимно уничтожаются, и поэтому не могутъ произвешити никакого перемѣщенія. И такъ, нельзя допустить, чтобы одна и та же сила могла производить перемѣщенія припопозитныя.

Теперь легко показать, что сила не можетъ производить перемѣщеній по направленію, перпендикулярному къ ея собственному. Дѣйствительно, положимъ что сила Q (Черт. 18 Листъ VI) въ состояніи произвешити передвиженіе по направленію mA , перпендикулярному къ mQ ; по той же самой причинѣ и перемѣщеніе въ припопозитную сторону mB будетъ возможно, а это противорѣчитъ тому, что сей-часъ было доказано. Слѣдовательно, сила Q не можетъ производить матеріальную точку подъ прямымъ угломъ.

Теперь легко доказать, что сила Q можетъ произвешити всякое перемѣщеніе по направленію, составляющему съ ея собственнымъ угломъ острый. Дѣйствительно, допустить что одно перемѣщеніе по направленію mA (Черт. 19 Листъ VI) возможно, предполагаетъ уголъ $\angle mQ$ имѣющимъ прѣлого. Разложимъ силу Q на двѣ mA и mB (См. PARALLELOGRAMME DES FORCES), изъ которыхъ послѣдняя перпендикулярна

къ $тА$. Сила $тВ$, какъ сказано было выше, не можетъ произвести перемѣщенія по направленію $тА$; и такъ, мы можемъ откинуть составляющую $тВ$, ибо, по предположенію, только перемѣщеніе по $тА$, и будетъ возможно. Останется одна сила $тА$, которая безъ сомнѣнія произведетъ перемѣщеніе по собственному своему направленію. Такъ какъ сила Q въ состояніи произвести перемѣщенія подъ всѣми возможными острыми углами, то, въ слѣдствіе перваго предположенія, заключаемъ, что эта сила не можетъ произвести перемѣщенія ни подъ какимъ тупымъ угломъ.

И такъ, изъ перечня разсмотрѣнныхъ нами случаевъ, заключаемъ, что сила можетъ произвести перемѣщенія подъ всѣми возможными острыми углами, а не можетъ произвести ихъ ни подъ прямыми углами, ни подъ тупыми.

Теперь легко найти условія, необходимыя для того чтобы равнодѣйствующая Q силы движущей и силы инерціи не производила никакого дѣйствія. Для этого, равнодѣйствующая должна составлять съ направленіемъ всѣхъ перемѣщеній, допускаемыхъ свойствомъ прелативій, углы или прямые, или тупые, или, зна равнодѣйствующая должна равняться нулю. И такъ, если означимъ чрезъ ϕ уголъ составляемый силою Q съ направленіемъ какого нѣ еще возможнаго перемѣщенія, то окажется, что должно быть

$$Q \cos \phi < 0 \quad \text{или} \quad = 0.$$

Ежели, сверхъ того, означимъ чрезъ λ и ω углы, составляемые направленіемъ движущей силы R и касательною къ траекторіи съ направленіемъ возможнаго перемѣщенія, къ которому отношеніе угла ϕ , то получимъ

$$(G) \quad Q \cos \phi = R \cos \lambda - \frac{m(v \cos \omega)}{dt} < 0.$$

Вотъ общее уравненіе движеній, подверженныхъ прелативіямъ. Мы приложимъ формулу (G) только къ одному случаю, именно къ тому, когда матеріальная точка должна описывать данную кривую, и не можетъ отклоняться отъ нея. Пусть будетъ $ВА$ элементъ данной кривой $LBAM$ (черт. 20 Листъ VI), и положимъ что движущаяся точка находится въ $т$. Возможныя перемѣщенія будутъ только отъ $т$ къ $А$ или отъ $т$ къ $В$; но чтобы сила Q не составляла съ направленіемъ сихъ возможныхъ перемѣщеній угловъ острыхъ, она не должна составлять и

тупыхъ. Дѣйствительно, если допустимъ, что она составляетъ уголъ тупой съ направленіемъ $тВ$, то окажется, что съ направленіемъ $тА$ эта сила составляетъ уголъ острый, и наоборотъ; и такъ, сила Q должна быть нормальна къ кривой $LBAM$ въ точкѣ $т$, въ слѣдствіе чего ея проеція на касательной будетъ нуль. Предположивъ что λ изображаетъ уголъ, составляемый направленіемъ движущей силы R съ касательною, и сдѣлавъ $\omega = 0$, уравненіе (G) приметъ видъ

$$(II) \quad R \cos \lambda - m \frac{dv}{dt} = 0.$$

Изобразивъ теперь чрезъ X, Y, Z составляющія движущей силы R по тремъ прямоугольнымъ осямъ, а чрезъ x, y, z координаты движущейся точки, получимъ

$$\cos \lambda = \frac{Xdx + Ydy + Zdz}{Rds},$$

разумѣя подъ ds элементъ дуги траекторіи. Слѣдовательно, принявъ въ соображеніе равенство $ds = vdt$, уравненіе (II) получится такой видъ:

$$mv dv = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Это уравненіе есть то, которое обыкновенно предлагаютъ въ Механикѣ для движенія точки по данной кривой.

Читатели найдутъ во многихъ мѣстахъ нашего Лекціона приложения изложенной здѣсь теоріи криволинейнаго движенія. Преимущественно отсылаемъ къ слѣдующимъ: APPROCHES (COURBE AUX—EGALES), BALISTIQUE, BRACHYSTOCHRON, CENTRALES (FORCES), PENDULE, TRAJECTOIRE.

Мы не разсматривали здѣсь того случая, когда движущаяся точка подчинена условіямъ, зависящимъ вѣдѣстѣ со временемъ. Отсылаемъ по сему предмету къ Разсужденію Г. Остроградскаго: *Considérations générales sur les déplacements instantanés des systèmes assujettis à des conditions variables*. (Mémoires de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Petersburg, Sciences Math. Phys. et Natur. T. III, 1838.)

Скажемъ въ заключеніе, что въ изложеніи криволинейнаго движенія, мы придерживались воззрѣнія Г. Остроградскаго на этотъ предметъ. Читатели, желающіе ближе ознакомиться съ этою теоріею, найдутъ въ литографирован-

ной его Механики, на Французскомъ языкѣ, въ подробностяхъ, которыя мы должны были пропустить. Любители математики съ нетерпѣніемъ ожидаютъ появленія на Русскомъ языкѣ этого классическаго сочиненія.

SYNOMÈTRE. ЦИНОМЕТРЪ, СИНЕМЪРЪ.

Инструментъ, посредствомъ котораго мѣряютъ степень густоты синаго цына неба, по мѣрѣ того какъ поднимаются въ атмосферу на высоты болѣе и болѣе значительныя.

CYCLE. (Хрон.) **КРУГЪ.** Періодъ времени, состоящій изъ определенного числа лѣтъ, въ продолженіи которыхъ совершаются нѣкоторыя явленія въ известномъ порядкѣ. Главные круги суть: *кругъ луны, кругъ солнца и индиктъ.*

Кругъ луны (*cycle lunaire*), открытый въ Греціи *Метон*омъ почти за 450 лѣтъ до Р.Х. есть періодъ изъ 19 лѣтъ; въ этомъ промежуткѣ времени заключаются всѣ перемѣны дней новолунія въ разсужденіи дней мѣсяца, такъ что по прошествіи одного такого круга, дни новолунія, въ продолженіи слѣдующихъ 19 лѣтъ, упадутъ опять на прежніе дни мѣсяца. Это открытіе показалося Грекамъ столь изысканнымъ, что въ Афинахъ вытѣсла золотыми буквами дни мѣсяца, на которые упадутъ новолунія въ продолженіи полнаго круга луны, и выставили эту таблицу на главной площади города. По этой по причинѣ годъ круга луны и теперь еще называется *золотымъ числомъ* (*nombre d'or*).

Кругъ солнца (*cycle solaire*) есть періодъ времени, состоящій изъ 28 лѣтъ; въ этомъ кругѣ заключаются всѣ перемѣны дней недѣли въ разсужденіи дней мѣсяца. По прошествіи каждыхъ 28 лѣтъ, дни недѣли упадутъ опять на тѣ же дни мѣсяца, какъ за 28 лѣтъ назадъ.

Кругъ индикта или просто *индиктъ* (*cycle d'indiction*) содержитъ въ себѣ 15 лѣтъ. Онъ употребляется въ Церковномъ Календарѣ, и не имѣетъ никакихъ астрономическихъ основаній.

Сверхъ приведенныхъ трехъ круговъ, были придуманы еще и нѣкоторыя другіе. *Василійскій кругъ* (*cycle paschal*), получаемый чрезъ перемноженіе круга луны на кругъ солнца, то есть 19

на 28, состоящій изъ 532 лѣтъ. *Періодъ Юліанскій* (*periode Julienne*), равный 7980 годамъ, получается перемноженіемъ между собою числа 19, 28 и 15, означающія кругъ луны, солнца и индикта.

Что касается до самаго опредѣленія трехъ главныхъ круговъ, то отсылаемъ къ статьѣ **CALENDRIER.**

CYCLIQUE. **ЦИКЛИЧЕСКИЙ.** Относящійся къ кругамъ или опредѣленнымъ періодамъ времени. См. выше.

CYCLOIDAL. (Геом.) **ЦИКЛОДАЛЬНЫЙ.** Принадлежащій или относящійся къ циклоидѣ. *Revue cycloidal*; *циклодальный малтникъ.* *Espace cycloidal*; *циклодальная площадь.* См. ниже. *Courbe cycloïdale*; *циклодальная кривая.* См. конецъ статьи: **DEVELOPPÉE.**

CYCLOIDE (отъ Греч. *κύκλος, кругъ*), **ТРОСНОИДЪ** (отъ Греч. *τροχός, колесо*) или **ROULETTE** *).

(Геом.) **ЦИКЛОИДА.** Одна изъ примѣчайнѣйшихъ трансцендентныхъ кривыхъ. Когда кругъ катится по прямой линіи, то каждая точка, взятая на его окружности, описываетъ *циклоиду*.

Пусть будетъ *M* точка, которая, при движеніи круга производящаго *EMD* (черт. 2 Листъ VII) по прямой *AX*, описываетъ циклоиду *AMHNE*. Ясно, что если примемъ начало движенія въ точкѣ *A*, и предположимъ что кругъ катится отъ лѣвой руки къ правой, то есть отъ *A* къ *B*, то при положеніи *EMD* круга, длина дуги его *ME* будетъ равнилась прямой линіи *AE*. И такъ, по свойству циклоиды будетъ

$$AE = \text{дуга } ME.$$

Чтобы найти уравненіе циклоиды въ прямоугольных координатахъ, пусть будетъ *a* радиусъ *EC* круга производящаго *EMD*, *A* начало координатъ, *AX* и *AY* прямоугольныя координатныя ося, и слѣдовательно *AP = x*, *PM = y*. Изобразимъ сверхъ того чрезъ φ уголъ *MCE*. Очевидно получимъ

*) Въ обиходномъ смыслѣ, подъ названіемъ *roulantes* (отъ слагаемаго *rouler, катиться*) разумѣютъ кривыя, образуемыя движеніемъ точки, взятой на данной кривой, когда сія послѣдняя катится по ободу другой, данной же кривой линіи.

$AP = AE - PE = AE - Mg$ и $PM = EC - Cq$;
то $AE = 2ay$, $ME = a \sin \varphi$, $MQ = a \sin \varphi$, $Cq = a \cos \varphi$;
следовательно

$$(1) \quad \begin{cases} x = a(p - \sin \varphi) \\ y = a(1 - \cos \varphi) \end{cases}$$

Вот два уравнения циклоиды между прямоугольными координатами x , y и вспомогательным углом φ . Для исключения сего последнего выводим из уравнения $y = a(1 - \cos \varphi)$

$$\cos \varphi = \frac{a-y}{a} \quad \text{или} \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{2ay-y^2}}{a}$$

и

$$\varphi = \arccos \frac{a-y}{a} = \arcsin \frac{\sqrt{2ay-y^2}}{a};$$

подставляя эти величины в уравнение.....
 $x = a(p - \sin \varphi)$, получаем

$$(2) \quad \begin{cases} x = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay-y^2} \quad \text{или} \\ x = a \arcsin \frac{\sqrt{2ay-y^2}}{a} - \sqrt{2ay-y^2} \end{cases}$$

Легко усмотреть, что циклоида не прекращается в точке B , в которой производящий круг описывается полной оборотом. И в самом деле, должно допустить, что круг продолжает катиться по прямой AX , и при таком движении, как следует из уравн. (2), описывает бесконечное число часней, равных ΔHB . По левую сторону точки A будет то же самое: действительно, можно вообразить, что круг приходит в положение A по совершении бесконечного числа оборотов. Все эти особенности обнаруживаются из уравн. (2) замечая, что один и тот же синус соответствует бесконечному числу дуг. И так, если изобразить через φ наименьшую дугу, коей синус равен $\frac{\sqrt{2ay-y^2}}{a}$, то эпохи самый синус будет принадлежать к дугам

$$\dots, -(6\pi - \varphi), -(4\pi - \varphi), -(2\pi - \varphi),$$

$$2\pi + \varphi, 4\pi + \varphi, 6\pi + \varphi, \dots$$

из чего заключаем, что x может принимать все возможные значения от $-\infty$ до $+\infty$, и что следовательно, циклоида простирается в бесконечность как с правой, так и с левой стороны.

Дифференциальное уравнение циклоиды получим, или чрез непосредственное дифференци-

рование одного из двух уравн. (2), или чрез исключение вспомогательного угла φ из дифференциальных уравнений (1). Последний способ до-

стается самым

$$\frac{dx}{d\varphi} = a(1 - \cos \varphi) = y$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = a \sin \varphi = \sqrt{2ay - y^2};$$

следовательно, по причине $\frac{dy}{d\varphi} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\varphi}$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay-y^2}}{y} \quad \text{или} \quad dx = \frac{y dy}{\sqrt{2ay-y^2}}$$

Вот дифференциальное уравнение циклоиды, описанной к прямоугольным осям. Посредством предыдущей величины для $\frac{dy}{dx}$ очень легко построить касательную к циклоиде. Действительно, так как $y \frac{dy}{dx}$ есть общее выражение поднормальной, то найдем, что эта дуга в настоящем случае равна $\sqrt{2ay-y^2}$, то есть линии PE , ибо $PE = Mg$, а линия Mg , по свойству круга, равна $\sqrt{Eq \times qD} = \sqrt{y(2a-y)}$. И так, нормаль циклоиды изобразится по величине и по направлению линией ME , которая, по свойству же круга, есть средняя пропорциональная между линией $Eq = y$ и полным диаметром $ED = 2a$. Следовательно

$$(4) \quad \text{Нормаль } ME = \sqrt{2ay}.$$

Теперь, для проведения касательной в точке M циклоиды, стоит только чрез эту точку провести линию, перпендикулярную к нормальной ME ; очевидно, что прямая, соединяющая M с концом D диаметра круга производящего, будет искома касательная, ибо известно, что углы при окружности, опирающиеся на диаметр, суть прямые. Основываясь на этом замечании выводим весьма легкий способ для проведения касательной к циклоиде, не имея надобности строить производящий круг для каждой рассматриваемой точки. В самом деле, начерпим где нибудь на оси AX производящий круг $QmRa$, и перпендикулярный к этой оси диаметр QR . Положим, что желаем построить касательную к циклоиде в точке μ , находящейся на части AH ; для этого проводим линию μL на-

параллельно оси AX , и первую точку пересечения круга $QmRl$ с μL , то есть точку m , соединим с концом R диаметра QR . Линия ml , проведенная параллельно хорду mR , будет искома касательная. Если бы данная точка находилась на части NB циклоиды, напирить в N , то вместо первой точки пересечения m на круг $QmRl$, следовало бы размещивать вторую точку n , и линия Nl' , проведенная параллельно хорду nR , изобразила бы касательную к циклоиде в точке N .

Справедливость предложенного построения очевидна; действительно, если сманенъ двигать кругъ $QmRl$ по прямой AX отъ правой руки къ левой такъ, чтобы при этомъ движении диаметр QR оставался перпендикулярнымъ къ оси AX , то когда точка m совмѣстится съ точкою μ на циклоидѣ, движущійся кругъ совмѣстится съ производящимъ кругомъ, соотвѣствующимъ этой точкѣ μ ; касательная къ циклоидѣ совпадетъ съ хордою mR , которая, въ новомъ своемъ положеніи, по свойству движениа круга, будетъ параллельна первоначальному своему направленію.

Для опредѣленія радиуса кривизны циклоиды, надобно найти величину $\frac{d^2y}{dx^2}$; дифференцируя первое изъ уравненій (3), найдемъ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y\sqrt{2ay-y^2}} \cdot \frac{dy}{dx};$$

подставляя же на мѣсто $\frac{dy}{dx}$ величину, взятую изъ уравн. (3), получимъ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}.$$

Извѣстно, что радиусъ кривизны ρ , для какой нъ есть плоской кривой, опредѣляется формулою [Смол. OSCULATEUR (CERCLE)]

$$\rho = -\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

такъ какъ въ циклоидѣ $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay-y^2}}{y}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}$, то и найдемъ для этой кривой

$$\rho = \frac{\left(\frac{2ay}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{a}{y^2}} = \frac{(2ay)^{\frac{3}{2}}}{ay^2} = 2\sqrt{2ay}.$$

Но $\sqrt{2ay}$, въ силу формулы (4), изображаетъ нормаль циклоиды; следовательно, ρ радиусъ кри-

визны циклоиды, въ какой нъ есть ея точка, равняется удвоенной нормали, соответствующей той же точкѣ. На основаніи этого предположенія легко доказать примѣчательное свойство циклоиды, именно, что *эволюта ея есть такая же циклоида, илиющая относительно первой изъ-стное положеніе.*

Вспомнимъ, что эволютою кривой линіи называется геометрическое мѣсто всѣхъ центровъ круговъ кривизны. Следовательно, если продолжимъ нормаль ME циклоиды до M' (черт. 2 Листъ VII), такъ чтобы $EM' = EM$, то линія $MM' = 2EM$ изобразитъ радиусъ кривизны, соотвѣствующій точкѣ M , а точка M' будетъ принадлежать эволютѣ. Сверхъ того, уравненіе $\rho = 2\sqrt{2ay}$ показываетъ, что въ началѣ координатъ A , гдѣ $y = 0$, радиусъ кривизны равенъ нулю, а для точки H , для которой $y = 2a$, радиусъ кривизны равенъ $4a$; и такъ, если на продолженной ординатѣ HC отложимъ отъ точки C линію $GA' = HC$, то опредѣлимъ точку A' , принадлежащую также эволютѣ. Проведемъ теперь чрезъ точку A' прямую $G'G''$, параллельную основанію AB циклоиды, а чрезъ три точки A, M', A' вообразимъ кривую, изображающую эволюту части AMN предложенной циклоиды. Подобно доказавши, что кривая $AM'A'$ есть также циклоидальная дуга, коей производящій кругъ равенъ кругу EMD . Для этого продолжимъ диаметръ DE до точки E' ; получимъ $EE' = DE$. Далѣе, чрезъ точки E, M' и E' опишемъ кругъ $EM'E'S$; очевидно, что треугольникъ $EM'E'$ будетъ равенъ треугольнику EMD ; следовательно, дуга $EM' = дуга EM$, дуга $M'E' = дуга MD$; но линія AG , по свойству циклоиды, равна полуокружности EMD круга производящаго, и сверхъ того линія $AE = дуга EM$; следовательно $EG = дуга MD$. Но $EG = E'A'$; а дуга $MD = дуга M'E'$, почему $A'E' = дуга EM'$, а это последнее равенство выражаетъ означенное свойство циклоиды. Точно такъ же образъ доказается, что эволюта полуциклоиды HNB будетъ такая же полуциклоида $A'B$, являющаяся относительно первой положеніе, означенное на чертѣжѣ.

Такъ какъ длина какой нъ есть дуги эволюты кривой линіи опредѣляется разностию двухъ радиусовъ векторовъ этой кривой, примыкающихъ къ крайнимъ точкамъ сирамлемой дуги эволюты

(Смол. DÉVELOPPEE), то ясно, что длина полу-циклоиды $AM'A'$ равна удвоенному диаметру круга производящего, то есть линии $A'H$, ибо радиусы векторы, прилегающие к точкам A' и A , будут соответственно $4a$ и 0 . Отсюда заключается, что длина цѣлой циклоиды AHB , состоящей из двух равных частей AH и HB , равна учетверенному диаметру круга производящего, то есть $8a$. Это предположеніе будетъ сейчасъ доказано еще другими способами.

Переходимъ теперь къ опредѣленію длины и площади кривой или есть части циклоиды. Изобразимъ черезъ s какую угодно циклоидальную дугу, напиримѣръ AM ; такъ какъ вообще $s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ (Смол. ARC), то надлежитъ найти dx и dy для циклоиды. Но, въ силу уравненій (1), имѣемъ

$$dx = ad\varphi(1 - \cos\varphi), \quad dy = ad\varphi \sin\varphi,$$

откуда

$$dx^2 + dy^2 = a^2 d\varphi^2 [(1 - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi] = a^2 d\varphi^2 (2 - 2\cos\varphi),$$

и следовательно, по причитію $\sqrt{2 - 2\cos\varphi} = 2\sin\frac{1}{2}\varphi$,

$$s = 2a \int d\varphi \sin\frac{1}{2}\varphi = 4a [C - \cos\frac{1}{2}\varphi],$$

гдѣ C изображаетъ постоянную величину. Для опредѣленія C замѣтимъ, что если условимся считать дуги отъ точки A , то будетъ въ одно время $s = 0$ и $\varphi = 0$; следовательно $0 = 4a(C - 1)$, откуда $C = 1$. И такъ

$$s = 4a(1 - \cos\frac{1}{2}\varphi) = 8a \sin^2\frac{1}{4}\varphi.$$

Чтобы получить длину цѣлой циклоидальной дуги $AMHNB$, стоитъ только положить въ этомъ выраженіи $\varphi = 2\pi$, ибо производящій кругъ, достигая точки B , содержитъ полный оборотъ. Предыдущее уравненіе дастъ намъ

$$s = 8a \sin^2\frac{1}{4}2\pi = 8a.$$

Эта формула показываетъ, что длина цѣлой циклоиды равна учетверенному диаметру производящаго круга, что было уже найдено выше на другомъ основаніи.

Пусть будетъ теперь s' циклоидальная дуга HM (черт. 2); получимъ $s' = 4a - s$, и какъ $s = 8a \sin^2\frac{1}{4}\varphi$, то и найдемъ

$$s' = 4a(1 - 2\sin^2\frac{1}{4}\varphi) = 4a \cos^2\frac{1}{4}\varphi;$$

возвышая въ квадратъ, имѣемъ

$$s'^2 = 16a^2 \cos^2\frac{1}{4}\varphi = 16a^2 (1 + \cos\varphi) = 16a^2 (2a - a(1 - \cos\varphi));$$

но $a(1 - \cos\varphi) = r = PM$; следовательно

$$2a - a(1 - \cos\varphi) = DE - PM = HG - KG = HK.$$

Если изобразимъ черезъ x' линію HK , то получимъ

$$s'^2 = 8ax'.$$

Вотъ уравненіе циклоиды, выражающее весьма простое отношеніе между дугою s' , считаемую отъ вершины H кривой, и ордыною x' ; это уравненіе употребляется въ Механикѣ.

Для криволинейной площади, которую изобразимъ черезъ u , имѣемъ общее выраженіе $u = \int y dx$ (Смол. AIRE). Следовательно для циклоиды, гдѣ $y = a(1 - \cos\varphi)$ а $dx = ad\varphi(1 - \cos\varphi)$, получимъ

$$u = a^2 \int d\varphi (1 - \cos\varphi)^2.$$

Но $(1 - \cos\varphi)^2 = 1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi$, а $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(\cos 2\varphi + 1)$; следовательно

$$u = a^2 \int d\varphi (1 - \cos\varphi)^2 = a^2 \int d\varphi (\frac{3}{2} - 2\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi).$$

Если возьмемъ интегралъ отъ $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$, то получимъ полную циклоидальную площадь, ограниченную съ одной стороны циклоидальною дугою $AMHNB$, а съ другой, основаніемъ AB . Неопредѣленный интегралъ будетъ

$$u = a^2 [\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi] + \text{const.};$$

взявъ же эту величину, какъ сказано выше, отъ $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$, получимъ

$$u = 3\pi a^2.$$

И такъ, *полная циклоидальная площадь равна утроенной площади круга производящаго.*

Циклоида ADB (черт. 3 Листъ VII), обращаясь около своего основанія AB , производитъ тѣло вращенія, котораго объёмъ легко опредѣлить. Рѣшимъ эту задачу въ болѣе общемъ видѣ: положимъ, что пребудетъ нѣкая объёмъ тѣла, образуемаго обращеніемъ дуги LDK (черт. 3) около прямой LK , параллельной основанію AB . Примемъ LK за ось абсциссъ; перпендикулярная къ ней линія LY изобразитъ ось ординатъ. Пусть будетъ $AF = h$, $FL = l$, и $Lq = l'$, $qM = y'$; очевидно что h и l будутъ постоянными известными линіями. Если сверхъ того положимъ $AP = x$, $PM = y$, то получимъ

$x = h + x'$ и $y = l + y'$, откуда $dx = dx'$ и $dy = dy'$; следовательно уравненіе (3) приметъ видъ

$$dx' = \frac{(l + y') dy'}{\sqrt{2a(l + y') - (l' + y')^2}}.$$

Вотъ дифференціальное уравненіе циклоидальной дуги LDK , описанной къ прямоугольнымъ осямъ LX и LY .

Но известно, что объём шара вращения определяется интегралом $\pi \int y'^2 dx'$, в котором y' изображает ординату производящей кривой, а x' её абсциссу; Смолт. VOLUME. И так если назовём V объём шара, образуемого вращением циклоидального полу-сегмента $LMDE$ около прямой LE , то получимъ

$$V = \pi \int_0^{2a-l} \frac{l(1+y'y'dx)}{\sqrt{2a(l+y')-(l+y')^2}},$$

ибо въ точкѣ L имѣемъ $y'=0$, а въ точкѣ E , $y'=ED=2a-l$.

Для уничтоженія ирраціональности въ последней формулѣ, положимъ

$$\sqrt{2a(l+y')-(l+y')^2}=(l+y')z, \text{ откуда } z=\sqrt{\frac{2a-(l+y')}{l+y'}};$$

найдемъ

$$y'=\frac{2a}{1+z^2}-l, dy'=-\frac{4azdz}{(1+z^2)^2}, \sqrt{2a(l+y')-(l+y')^2}=\frac{2az}{1+z^2};$$

пределы относительно переменной z получатся сдѣлавъ въ выраженіи

$$z=\sqrt{\frac{2a-(l+y')}{l+y'}}$$

$y'=0$ и $y'=2a-l$; такимъ образомъ найдемъ для z пределы $\sqrt{\frac{2a-l}{l}}$ и 0. Если подставимъ теперь въ выраженіе объёма V найденныя величины, и переименуемъ знакъ интеграла, называя порядкомъ предѣловъ, то по сокращеніи получимъ

$$V=4a\pi \int_0^{\sqrt{\frac{2a-l}{l}}} \left(\frac{2a}{1+z^2}-l \right) \frac{dz}{(1+z^2)^2}.$$

Разложивъ выраженіе $\left(\frac{2a}{1+z^2}-l \right)$, получимъ три интеграла, которые определяются посредствомъ известной формулы

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^m} = \frac{z}{2(m-1)(1+z^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)} \int \frac{dz}{(1+z^2)^{m-1}},$$

получаемой весьма простымъ образомъ изъ уравненія (D) статьи BINOMES (DIFFÉRENTIELLES). Возьмъ каждый изъ сихъ трехъ интеграловъ между предѣлами 0 и $\sqrt{\frac{2a-l}{l}}$ наблюдая что

$$\int_0^{\sqrt{\frac{2a-l}{l}}} \frac{dz}{1+z^2} = \text{arctang} \sqrt{\frac{2a-l}{l}}, \text{ получимъ послѣ сокращеній:}$$

$$V = \frac{\pi}{6} (2l^3 - 15al + 15a^2) \sqrt{2al-l^2} + \pi a (2l^2 - 6al + 5a^2) \text{arctang} \sqrt{\frac{2a-l}{l}}.$$

Вотъ выраженіе объёма шара, образуемого вращеніемъ циклоидальнаго полу-сегмента $LMDE$ около прямой LE . Чтобы опредѣлить объёмъ шара, образуемаго вращеніемъ полу-циклоиды AMD около полу-основанія AC , сдѣлаемъ только положимъ $l=FL=0$ въ найденномъ выраженіи для V ; такимъ образомъ получимъ

$$5\pi a^3 \cdot \text{arctang}(\infty) = 5\pi a^3 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5}{2} \pi a^3 \cdot 2\pi a.$$

Если умножимъ последнее выраженіе на 2, то выведемъ изъ него слѣдующее заключеніе: площадь циклоидальной дуги ADB (черт. 3 Листъ VII), обращаясь около основанія циклоиды AB , производитъ шаръ, коего объёмъ равенъ площади круга произвольнаго, помноженной на $\frac{5}{2}$ окружности того же самаго круга.

Въ этой статьѣ мы предложили сѣмъ примѣчательныя геометрическія свойства циклоиды; что касается до механическихъ принадлежностей этой кривой, то онѣ изложены особо. Смолт. BRACHYSTOCHROME, TAUTOCHROME. По аналогіи предметамъ, опишемъ также примѣчательныя къ слову *EPICYCLOÏDE*. Въ заключеніе приводимъ нѣкоторые историческія сдѣланія объ циклоидѣ.

Изобрѣтеніе циклоиды, приписываемое обыкновенно знаменитому Галилею, а нѣкоторыми авторами Ошцу Марсену (*Marsenne*), относится къ самому началу XVII столѣтія. Впрочемъ есть писатели, полагающіе, но безъ основательной причины, что циклоида была извѣстна уже около 1500 года математикѣ Бовиллю (*Carolus Bovillus*), и даже нѣкоторые думаютъ, что эта кривая вымыслена еще прежде 1451 года Кирдьяномъ Луа (*Сим*), будио бы употребившимъ ее въ задатокъ о квадратурѣ круга, рѣшеніемъ которой онъ ревностно занимался. Несмотря на всѣ эти противорѣчивыя мнѣнія писателей объ изобрѣтеніи циклоиды, можно кажется по справедливости считать Галилея изобрѣтателемъ сей кривой; и дѣйствительно, достоверно, что именно до Галилея не обратили особеннаго вниманія на циклоиду, и что онъ первый открылъ нѣкоторые ея свойства.

Съ 1650 года циклоида сдѣлалась предметомъ

изысканий для Французских математиковъ, и ихъ изслѣдованія привели къ рѣшенію многихъ любопытныхъ вопросовъ, относящихся къ этой кривой. Роберваль опредѣлилъ полную площадь обыкновенной циклоиды, а также продолговатой и укороченной (См. см. ниже) Декартъ и Ферматъ предложили способы для проведенія касательныхъ къ нимъ. За сими проступили къ рѣшенію вопросовъ болѣе сложныхъ, именно, къ опредѣленію объемовъ шѣлъ, образуемыхъ обращеніемъ опредѣленныхъ дугъ циклоиды около ея основанія и осей. Роберваль предложилъ вѣрныя рѣшенія этихъ задачъ. Торричелли, также занимавшійся сими вопросами, былъ приведенъ къ выводу ошибочнымъ.

Въ 1658 году знаменитый Паскаль приступилъ къ рѣшенію нѣкоторыхъ вопросовъ о циклоидѣ, еще труднѣйшихъ. Онъ предпринялъ опредѣлять площадь и центръ тяжести *циклоидальнаго сегмента* LDK (черт. 3 Листъ VII), также объемъ и поверхность шѣла, образуемаго вращеніемъ этого же сегмента около основанія АВ, оси CD и прямой LK. Въ нѣсколько дней Паскаль рѣшилъ всѣ эти задачи. Убѣжденный крѣпкими нѣкоторыхъ лицъ, и въ особенности влиятельными Кардинала Роаннезъ (Roannez), онъ рѣшился предложить подъ вымышленнымъ именемъ А. Делонвиля (A. Delonville), и въ видѣ вызова, рѣшеніе этихъ задачъ современнымъ математикамъ; за вѣрныя рѣшенія онъ обѣщавался выдать опредѣленные денежные награды. На этотъ вызовъ, сколько извѣстно, отвѣчали только два математика: Валисъ и Иезуитъ Лалуэръ (Lalouère). Въ рѣшеніе перваго вкрался нѣкоторый погрѣшности; что касалось до рѣшенія Лалуэра, то оно, сверхъ исполненія своей, оказалось ошибочнымъ, почему назначенныя Паскалемъ награды и не могли быть присуждены ни одному изъ двухъ совскаателей.

Сверхъ математиковъ, объ которыхъ мы упомянули въ этой страницѣ, занимались изслѣдованіемъ о циклоидѣ Вренъ, Гуенесъ, Слюзъ (Sluse), Иезуитъ Фабри, Лейбницъ, Нютонъ, братья Бернулли, де ла Гиръ и многіе другіе. Приводимъ заглавія отдѣльныхъ трактатовъ о циклоидѣ Groningius: Historia cycloidis, которая считается весьма ошибочною.

Fénel: Histoire de la roulette.

Historia Trochoidis seu Cycloidis Galliae.

Lalouère: Geometriae promota in VII de Cycloide libris, 1660.

Fabri: Opusculum geometricum de linea sinuum et Cycloide.

СYCLOIDE ALONGÉE или **РАЛОНГÉE**. ПРОДОЛГОВАТАЯ, УДЛИНЕННАЯ, РАСТЯНУТАЯ ЦИКЛОИДА. — **СYCLOIDE ACCOURCIE** или **РАССОУРСІЕ**. СЖАТАЯ, УКОРОЧЕННАЯ ЦИКЛОИДА. Мы видели въ предыдущей страницѣ, что когда кругъ катится по прямой линіи, то всякая точка, на окружности его находящаяся, описываетъ нѣкоторую трансцендентную кривую, которую назвали *циклоидою*. Если же описывающая точка будетъ находиться не на окружности производящаго круга, а гдѣ нибудь въ его плоскости, то получаются два рода новыхъ кривыхъ — *продолговатая циклоида* и *циклоида сжатая* — первая въ томъ случаѣ, когда описывающая точка находится внѣ производящаго круга, а вторая, когда она берется внутри его.

Весьма легко вывести уравненія продолговатой и сжатой циклоиды. Действительно, положимъ сперва что описывающая точка М (черт. 4 Листъ VII) находится внѣ круга производящаго EHDG. Если примемъ точку А за начало координатъ и вѣдѣмъ за начало движенія круга EHDG, который катится по оси AX онъ лѣвой руки къ правой, то очевидно, что въ означенномъ на чертежѣ положеніи круга производящаго, длина дуги HE будетъ равняться прямой линіи AE, а точка М будетъ принадлежать продолговатой циклоидѣ. И такъ

$$AE = \text{дуги HE.}$$

Изобразимъ чрезъ a радиусъ CE круга производящаго, а чрезъ b постоянное разстояніе MC описывающей точки М отъ центра С. Пусть будетъ сверхъ того $AP = x$, $PM = y$, φ уголъ HCE; найдемъ

$$AP = AE - PE = AE - Mq \text{ и } PM = CE - Cq.$$

Но $AE = ar$, $Mq = b \sin \varphi$, $Cq = b \cos \varphi$; следовательно

$$x = ar - b \sin \varphi = a \left(\varphi - \frac{b}{a} \sin \varphi \right)$$

$$y = a - b \cos \varphi = a \left(1 - \frac{b}{a} \cos \varphi \right).$$

Вотъ уравненія продолговатой циклоиды; замѣ-

тимъ что мы предполагаемъ $b > a$. Если бы, напротивъ того, допустили что $b < a$, то эти самыя уравненія принадлежали бы *сжатой циклоиде*, и, въ этомъ случаѣ, постоянная величина b изображала бы линію, меньшую радиуса круга производящаго, напримѣръ длину mc (помъ же чертежъ). Наконецъ, полагая $b = a$, очевидно найдется *обыкновенная циклоида*.

Когда изъ предыдущихъ двухъ формулъ исключить уголъ φ , то получимъ уравненіе въ прямоугольныхъ координатахъ

$$x = a \operatorname{arccos} \frac{a-y}{b} - \sqrt{b^2 - (a-y)^2},$$

принадлежащее продолговатой, или сжатой, или обыкновенной циклоидѣ, смотря по тому, будетъ ли $b > a$ или $b < a$ или $b = a$.

Изслѣдованіе различныхъ свойствъ продолговатой и сжатой циклоиды не представляетъ никакого затрудненія. Предсказываемъ разборъ этихъ кривыхъ самому читателю. Скажемъ только, что спрямленіе сихъ циклоидъ приводитъ къ эллиптическимъ функциямъ.

CYCLOMÉTRIE. ЦИКЛОМЕТРИЯ, КРУГОНЗ-

МѢРЕНІЕ. Въ *Хронологіи*, искусство измѣрять круги или періоды времени. — Въ *Геометріи*, совокупность способовъ, служащихъ для опредѣленія различныхъ отношеній, существующихъ между круговыми дугами и относящихся къ нимъ припопосредственнымъ линіямъ. Читатели найдутъ разныя подробности объ Циклометріи во многихъ статьяхъ этого Лексикона; Смощ. ANGULAIRES (SECTIONS), BINOMES (EQUATIONS), CERCLE, CIRCONFERENCE, COTES (THÉORÈME DE), SÉRIE, TRIGONOMÉTRIQUES (LIGNES) и проч. и проч. Отсылаемъ также къ списку: Cyclometrie, въ книгѣ: *Supplément à Georg Simon Kluge's Wörterbuche der reinen Mathematik. Herausgegeben von J. A. Gräfe*, Leipzig, 1835. Въ ней изложены весьма обстоятельно разные способы и формулы, составляющіе предметъ Циклометріи.

CYLINDRE. (Геом.) **ЦИЛИНДРЪ.** Въ Прикладной Механикѣ: **ВАЛЬ, НАВОЙНЯ, КАТОКЪ.** *Прямой цилиндромъ* (*cylindre droit*) называется тѣло $EFGDGH$ (черт. 6 Листъ VII), образуемое обращеніемъ прямоугольника $ABCD$ около неподвижной его стороны AB . При такомъ движеніи,

сторона AD и BC описываютъ круги $EFGI$ и $FHCK$, концы которыхъ черкуются *основаніями цилиндра* (*bases du cylindre*). *Сторона CD* описываетъ поверхность, которая называется *боковой или выпуклою поверхностію цилиндра* (*surface convexe du cylindre*). Перпендикулярное разстояніе между двумя основаніями цилиндра, называется его *высотой* (*hauteur*); очевидно, что въ прямомъ цилиндрѣ это разстояніе равно длинѣ AB , соединяющей центры двухъ основаній. Линія AB именуется *осью цилиндра* (*axe du cylindre*).

Легко видѣти, что всякая плоскость, перпендикулярная къ оси прямого цилиндра, разсѣкаетъ его по *круговой линіи*. Когда сѣкающая плоскость не перпендикулярна къ оси, то сѣкаемая стѣна будетъ *эллипсомъ*. Наконецъ, если разсѣченъ цилиндръ плоскостію, проходящею чрезъ ось цилиндра, то получимъ прямоугольникъ $FEDC$.

Косоугольнымъ цилиндромъ (*cylindre oblique*) называется тѣло, образуемое обращеніемъ косоугольнаго параллелограмма около одной изъ его сторонъ. Следовательно, въ косоугольномъ цилиндрѣ, ось не перпендикулярна къ основаніямъ, и не равна высотѣ его.

Въ Элементарной Геометріи принимаютъ цилиндръ за призму, состоящую изъ безконечнаго числа граней, и на этой основаніи доказываютъ весьма просто, что объемъ цилиндра, какъ прямого такъ и косоугольнаго, равенъ площади основанія, помноженной на высоту, а боковая поверхность прямого цилиндра — произведенію окружности его основанія на высоту. Что касается до боковой поверхности косоугольнаго цилиндра, то она зависитъ отъ спрявленія эллипса, и следовательно опредѣленіе ее не можетъ быть предметомъ Элементарной Геометріи.

Въ обширномъ смыслѣ, подъ *цилиндрами* раззуются тѣла, ограниченное боковою поверхностію, образуюкою движеніемъ прямой линіи, которая сохраняетъ параллельность во всѣхъ своихъ положеніяхъ. Смощ. CYLINDRIQUE (SURFACE).

CYLINDRES SEMBLABLES. **Подобные цилиндры.** Два цилиндра называются *подобными*, когда отношеніе осей къ діаметру основанія одинаково для обоихъ цилиндровъ.

СЦИЛИНДРА СЪОБЩЕНІЯ. Косой цилиндръ. Поверхность, образуемая прямою линією, которая, описываясь на дѣлѣхъ или сѣчѣ кривыя линіи, движется параллельно данной плоскости. Смол. GAUSCHE (SURFACE).

CYLINDRE GNOMONIQUE. (Гном.) **ЦИЛИНДРИЧЕСКІЙ КВАДРАНЪ, ГНОМОНИЧЕСКІЙ ЦИЛИНДРЪ.** Солнечные часы, начерченные на поверхности цилиндра.

CYLINDRIQUE, ЦИЛИНДРИЧЕСКІЙ. Относящійся къ цилиндру или выходящій изъ сего тѣла. *Surfaces cylindriques; цилиндрическія поверхности;* (Смол. ялге).

CYLINDRIQUE (SURFACE). ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ. Поверхность, образуемая движениемъ прямой, опирающейся на кривую линію, и сохраняющей параллельность во всѣхъ своихъ положеніяхъ. Прямая линія, образующая поверхность, называется *производящею* (*generatrice*), а кривая, направляющая движение прямой — *направляющею* (*directrice*).

Пусть будутъ

$$x = az + \alpha \quad \text{и} \quad y = bz + \beta$$

уравненія движущейся прямой въ одномъ изъ ея положеній. Количества a и b , по свойству движения разсматриваемой прямой, будутъ постоянныя; напротивъ того, величины α и β измѣняются вѣдѣ съ положеніемъ производящей. Такъ какъ количества a и b постоянны для одного и того же положенія прямой, а измѣняемая при переходѣ отъ одного положенія въ другое, то очевидно, одно изъ нихъ будетъ функциею другого. И такъ $\beta = \varphi(\alpha)$, или

$$y - bz = \varphi(x - az),$$

разукая подъ φ произвольную функцию, которая въ частныхъ случаяхъ опредѣляется посредствомъ уравненій направляющей кривой. Исключивъ произвольную функцию φ изъ послѣдняго уравненія [Смол. ARBITRAIRES (ÉLIMINATION DES CONSTANTES)], получимъ слѣдующее уравненіе въ частныхъ дифференціалахъ для цилиндрическихъ поверхностей:

$$a \frac{dz}{dx} + b \frac{dz}{dy} = 1.$$

Для притѣра опредѣленія произвольной функции φ положимъ, что направляющая цилиндрической поверхности есть эллипсъ, начерченный въ плоскости xz , и центръ котораго совпадаетъ съ началомъ координатъ. Если изобразимъ чрезъ A большую, а чрезъ B малую полу-ось эллипса, то уравненія его будутъ

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{z^2}{B^2} = 1 \quad \text{и} \quad r = 0;$$

совокупля эти формулы съ уравненіями производящей прямой

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

находимъ

$$\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} = 1;$$

но $a = x - az$, $\beta = y - bz$; слѣдовательно

$$\frac{(x - az)^2}{A^2} + \frac{(y - bz)^2}{B^2} = 1.$$

Вотъ уравненіе исконой цилиндрической поверхности. Если положимъ $B = A$, то направляющая обратится въ *круговую линію*, и получимъ въ этомъ случаѣ уравненіе

$$(x - az)^2 + (y - bz)^2 = A^2.$$

По сходству предмѣтовъ, описанныхъ къ снѣтъ: CONIQUE (SURFACE).

CYLINDROÏDE. (Геом.) **ЦИЛИНДРОИДЪ.** Иногда даютъ это названіе тѣлу, выходящему сходство съ обыкновеннымъ цилиндромъ, разсматриваемымъ въ началѣ Геометріи; напротивъ, если цилиндръ, выходя изъ круговыхъ основаній, имѣетъ эллиптическія, то можно его называть *цилиндроидами*. Впрочемъ, такого рода тѣла обыкновенно называютъ *цилиндромъ*, имѣющимъ въ шомъ какого вида основаніе. И такъ, говорятъ: *эллиптическій, параболитическій цилиндръ*, или *цилиндръ съ эллиптическимъ, съ параболитическимъ основаніемъ* (*cylindre à base elliptique, parabolique*). — Нѣкоторые авторы называли также *цилиндроидами* тѣло, образуемое вращеніемъ шербомъ около второй ея оси. Смол. HYPERBOLIQUE DE RÉVOLUTION.

CYSSOÏDE. Смол. Cissoïde.

DACTYLOLOGIE. ДАКТИЛОЛОГИЯ. Отъ Греч.

δακτυλος, палецъ, νόμος, законъ. Искусство производить легкия арифметическія выкладки по пальцамъ. Для этого, начинающъ обыкновенно съѣтъ съ большого пальца лѣвой руки, который означаетъ 1, указательный 2, средній палецъ 3. безымянный 4, мизинецъ 5, мизинецъ правой руки 6, и такъ далѣе до большого пальца правой руки, который изображаетъ 10. Несмотря на незначительность этого способа счисленія, весьма неудобнаго, нѣкоторые авторы, какъ по: *Бета* (De temporibus et naturae regim), *Ново наги* (De numeris Liv. I Cap. XIV) и *Леопольдъ* (Theatrum Arithmetico Geometricum) писали объ немъ.

D'ALEMBERT (PRINCEPE DE). Смолн. DYNAMIQUE.

DATA. Латинское названіе; по Франц. **DONNEES.**

ДАННЫЯ, ДАННОСТИ. Величины, извѣстныя по условіямъ рѣшаемаго вопроса. Напримѣръ, радиусъ опредѣленнаго круга, оси даннаго эллипса, площадь треугольника, когда основаніе и высота его извѣстны, называющіяся *данными*. — Названіе одного изъ примѣчательнѣйшихъ сочиненій *Эвклида*; оно служило продолженіемъ его *Элементовъ*, и какъ бы введеніемъ въ Высшую Геометрію. Эта книга была напечатана нѣсколько разъ: можно указать между прочими на изданіи: *Гарди*, 1625 года, съ Греческимъ текстомъ, и *Баррова*, 1659 года.

DATE. (Хрон.) **ЧИСЛО, ДЕНЬ.—ГОДЪ, ЭПОХА.**

Точное указаніе времени какого либо событія, и е. означеніе *года, мѣсяца и числа*, въ которое событіе случилось. Иногда, въ опредѣленіи времени извѣстнаго происшествія, не можешь достигнуть такой точности, и должны довольствоваться опредѣленіемъ года, даже столѣтія; и въ этомъ случаѣ приближительное означеніе времени происшествія называютъ *date*. Одно изъ главныхъ затрудненій, испытываемыхъ при опредѣленіи историческихъ эпохъ, происходитъ отъ разнообразія и запутанности лѣтосчисленій, бывшихъ въ употребленіи въ разныхъ временахъ, и у разныхъ народовъ. Читатели найдутъ самыя обстоятельныя подробности объ этомъ предметѣ въ классическомъ сочиненіи: *Art de vérifier les dates*.

DAVIS (QUARTIER DE). ДАННОВЪ ИВА-

ДРАНТЬ. Инструментъ, изобретенный въ концѣ XVI столѣтія мореплавателемъ *Данновымъ (John Davis)*, и служившій для опредѣленія высоты солнца на морѣ. Этотъ квадратъ данно уже вышелъ изъ употребленія.

DE

DE. (Ист. Вар.) **ИГРАЛЬНАЯ КОСТЬ, КОСТКА,**

ЗЕРНЬ. Малаго развѣта кубъ, на граняхъ котораго написаны нумера 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Вышеютакже призматическія кости съ большимъ числомъ граней. Въ сѣмъ многія задачи изъ Анализа Вѣроятностей приводятъ къ слѣдующему вопросу, который относится къ игрѣ въ кости: *Дано извѣстное число костей, изъ которыхъ каждая имѣетъ опредѣленное число граней съ опредѣленными же на нихъ нумерами: найти, какъ велика вѣроятность, что бросивъ кости разомъ, сумма вскрывшихся нумеровъ будетъ равняться какому либо данному напередъ числу?*

Рѣшивъ этотъ вопросъ въ нѣмъ предположеніи, что каждая кость имѣетъ одинаковое число граней. Пусть будетъ n число бросаемыхъ костей, а z число граней каждой изъ нихъ; положимъ, что на граняхъ написаны нумера 1, 2, 3, ... до n . Спрашивается, какъ велика вѣроятность, что бросивъ всѣ n костей разомъ, сумма вскрывшихся нумеровъ будетъ равняться опредѣленному числу, которое изобразимъ чрезъ $s + 1$?

Означимъ чрезъ p искомую вѣроятность; пусть будетъ сверхъ того u число случаевъ, при которыхъ сумма вскрывшихся нумеровъ на n костяхъ равна $s + 1$, а x число всѣхъ возможныхъ случаевъ при совокупномъ бросаніи сихъ самыхъ n костей. По сему опредѣленію вѣроятности получимъ

$$p = \frac{x}{u}.$$

Величина x опредѣляется непосредственно: действительно, въ слѣдствіе сказаннаго въ статьѣ COMBINAISON объ сочетаніяхъ съ повтореніемъ, заключаемъ, что $u = n^n$. И такъ

$$(1) \quad p = \frac{x}{n^n}.$$

Для опредѣленія величины x надобно изыскать со-

покупность всех возможных соединений в члены, входящих в ряд

$$1, 2, 3, 4, \dots, m,$$

съ жѣлѣ условіемъ, чтобы сумма этихъ n чиселъ равнялась числу $s+1$. Съ этою цѣлю разсмотримъ выраженіе

$$(x+x^2+x^3+\dots+x^m)^n.$$

Если развернемъ эту степень, то получимъ члены, изъ которыхъ каждый будетъ вида

$$A x^{\alpha} \cdot 2^{\beta} \cdot 3^{\gamma} \dots x^{\alpha+\beta+\gamma+\dots+\nu},$$

гдѣ чѣмъ величій $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \nu$, по свойству разложенія, будетъ равно n . Если же предположимъ

$$\alpha+\beta+\gamma+\dots+\nu=s+1,$$

то очевидно коэффициентъ A изобразитъ число совокупностей n чиселъ, взятыхъ отъ 1 до m , коихъ сумма равна $s+1$, и следовательно, въ исполненіи предположенія, A будетъ равняться y . И такъ, y есть коэффициентъ $(s+1)$ -ой степени количества x въ разложеніи

$$(x+x^2+x^3+\dots+x^m)^n.$$

Опредѣленіе этого коэффициента весьма просто: дѣйствительно, если замѣнимъ что

$$(x+x^2+x^3+\dots+x^m)^n = x^n(1+x+x^2+\dots+x^{m-1})^n \\ = x^n \left(\frac{1-x^m}{1-x} \right)^n = x^n (1-x^m)^n (1-x)^{-n},$$

и разложимъ $(1-x^m)^n$ и $(1-x)^{-n}$ по Ньютоновой биномѣ, то получимъ

$$(2) \quad (1-x^m)^n = 1 - nx^m + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{2m} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{3m} + \dots$$

$$(3) \quad (1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \\ + \frac{n(n+1)(n+2)\dots s}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots s-n+1} x^{s-n+1} + \dots$$

Очевидно, что опредѣленіе коэффициента $(s+1)$ -ой степени x въ выраженіи

$$(x+x^2+x^3+\dots+x^m)^n = x^n(1-x^m)^n(1-x)^{-n}$$

приводится къ опредѣленію коэффициента $\dots (s+1-n)$ -ой степени въ произведеніи двухъ разложеній (2) и (3). И такъ, удерживая въ сказанномъ произведеніи только члены, въ которые входитъ степень x^{s+1-n} , получимъ безъ затрудненія

$$y = \frac{n(n+1)(n+2)\dots s}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (s-n+1)} \\ - n \frac{n(n+1)(n+2)\dots (s-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (s-n+1-m)} \\ + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)\dots (s-2m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (s-n+1-2m)} \\ - \text{и проч.}$$

Если положимъ

$$s-m=s', \quad s-2m=s'', \quad s-3m=s''', \dots$$

то предыдущая формула приметъ слѣдующій симметрической видъ, болѣе удобный для численныхъ приложений:

$$y = \frac{s'(s'-1)(s'-2)\dots(s'-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} \\ - n \frac{s'(s'-1)(s'-2)\dots(s'-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} \\ + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{s'(s'-1)(s'-2)\dots(s'-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{s''(s''-1)(s''-2)\dots(s''-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} \\ + \text{и проч.}$$

Ясно что въ этой формулѣ должно будетъ опустить всѣ члены, начиная съ того, для котораго величина, изображенная у насъ буквою s съ чертами, обратится въ нуль или въ число отрицательное.

Положимъ, что желаемъ найти вѣроятность вскрытія 16 очковъ при совокупномъ бросаніи четырехъ обыкновенныхъ шестигранныхъ костей. Въ такомъ случаѣ имѣемъ

$$m=6, \quad n=4, \quad s+1=16 \text{ или } s=15, \quad s'=9, \quad s''=3; \\ \text{слѣдовательно}$$

$$y = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 4 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 125.$$

И такъ въ силу формулы (1), искомая вѣроятность, которую означимъ чрезъ p , изобразится дробью

$$p = \frac{125}{6^4} = \frac{125}{1296}.$$

DÉBANDEMENT d'un ressort. **СПУСКЪ** пружины.

Débander или abaisser un ressort; спустить пружину.

DÉBARASSER (SE). (Анг.) **ОСВОБОДИТЬСЯ,**

ИСКЛЮЧИТЬ, УНИЧТОЖИТЬ. *Pour se débarrasser du terme px^2 dans l'équation $x^3+px^2+qx+r=0$, il n'y a qu'à poser $x=y-\frac{1}{3}p$; тогда освободитъ уравненіе $x^3+px^2+qx+r=0$ отъ члена px^2 , ставитъ только положитъ $x=y-\frac{1}{3}p$.*

DÉBLAI. ВЫЕМКА. Такъ называется въ земляныхъ работахъ объёмъ земли, снимаемый для уравненія грунта на днъ какой либо другой цѣли. — Самая яма, произшедшая отъ вырытой земли. — *Évaluation des volumes des déblais et remblais, определёніе объёмовъ выемки и насыпи.* Смол. VOLUME.

EN DÉBLAI, EN REMBLAI. Въ выемкѣ, въ насыпи. *Profil en déblai, en remblai; профиль въ выемкѣ, въ насыпи.*

DÉCAIDAIRE (ARITHMÉTIQUE). ДЕСЯТИЧНАЯ АРИФМЕТИКА. Смол. ARITHMÉTIQUE.

DÉCADE или DIZAINE. (Ариф.) ДЕСЯТОКЪ. Имямъ слово *décade* рѣдко употребляется въ Математикѣ.

DÉCAGONE. (Геом.) ДЕСЯТИУГОЛЬНИКЪ. Плоская фигура, имѣющая десять сторонъ и столько же угловъ. Когда всѣ стороны и углы равны, то десятиугольникъ называется *правильнымъ* (*décagone régulier*).

Для вписанія правильного десятиугольника въ кругъ, построится слѣдующимъ образомъ

Положимъ что AB (черт. 6 Листъ VII) изображаетъ искомую сторону десятиугольника; проведемъ изъ точекъ A и B радіусы CA и CB , а чрезъ точку B , линію BD , раздѣляющую уголъ ABC пополамъ. Уголъ ACB , какъ десятая часть цѣлой окружности, равенъ 36° , а каждый изъ угловъ CAB и CBA въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC , равенъ 72° . И такъ, уголъ $ABD = DBC = 36^\circ$. Отсюда заключаемъ, что стороны AB и AD треугольника ADB равны между собою, а треугольники DCB и ADB подобны; по этой причинѣ получимъ пропорцію

$$AD : DC = DB : CB;$$

но $DC = DB = AB$, ибо углы DCB и DBC равны между собою: слѣдственно

$$AD : AB = AB : CB.$$

И такъ, если раздѣлимъ радіусъ *въ среднемъ и крайнемъ отношеніи*, то большій отрезокъ изобразитъ сторону вписаннаго въ кругъ десятиугольника. Пусть будетъ r радіусъ даннаго круга, а x упомянутый отрезокъ; получимъ пропорцію

$$r - x : x = x : r,$$

изъ которой выведемъ слѣдующее *алгебраическое* выраженіе для стороны x *правильнаго десятиугольника*:

$$x = \frac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1).$$

Для построенія этого выраженія проводимъ къ радіусу CB перпендикуляръ OE , и выкажъ $CE = \frac{1}{2}CB$, соединимъ точку E съ B . Помогъ, изъ точки E , радіусомъ EC , описываемъ дугу CF . Линія FB будетъ равна x , т. е. искомой сторонѣ вписаннаго въ кругъ десятиугольника. Смол. EXTREME, CONSTRUCTION. Если отъ точки B опложимъ по окружности линію Ba , равную AB , помогъ отъ точки a линію $ab = AB$, и такъ дѣлать до $hA = AB$, то получится десятиугольникъ $ABa^1c^1d^1efgh$, который имѣли въ виду построить.

Очевидно, что соединивъ точку B съ d , помогъ d съ d^1 , d^1 съ e съ h , и h съ B получимъ *правильный* *нашъ* *десятиугольникъ*.

Отсылаетъ читатель къ статьѣ BINOMES (ÉQUATIONS), въ которой показано, какимъ образомъ задача о вписаніи въ кругъ *правильнаго* *многоугольника* приводится къ рѣшенію *двучленнаго* *уравненія*.

Въ заключеніе скажемъ, что сверхъ обыкновеннаго разсматриваемаго *правильнаго* *десятиугольника* существуютъ еще другія, удивительнорѣзкія *общепредлагаемыя* *опредѣленія* *правильныхъ* *многоугольниковъ*. Они означены на чертѣ 7 (Листъ VII). Чтобы построить его, сложимъ только раздѣлить *предварительно* *окружность* на десять частей, какъ было показано выше, и помогъ соединимъ точки дѣленія, пропуская двѣ смежныя. Такимъ образомъ идемъ отъ a къ h , отъ h къ e , отъ e къ d отъ d къ h , отъ h къ f , отъ f къ e , отъ e къ h , отъ h къ g , отъ g къ d и отъ d возвращаемся къ a .

Для дальнѣйшихъ подробностей объ этомъ родѣ *многоугольниковъ*, называемыхъ по виду ихъ *звѣздообразными* (*polygones étoilés*), отсылаетъ читатель къ статьѣ POLYgone.

DÉCAGONE (NOMBRE). (Ариф.) ДЕСЯТИУГОЛЬНОЕ ЧИСЛО. Число вида $n(4n-3)$, гдѣ n изображаетъ какое угодно положительное *цѣлое* *число*. И такъ, 1, 10, 27, 52 и проч. суть *числа десятиугольныя*. Смол. POLYgones (NOMBRES).

DÉCAGRAMME.**DÉCALITRE****DÉCAMÈTRE.**

{ Смот. MÉTRIQUE (NOUVEAU SYSTÈME).

DÉCAN. (Астр.) **ДЕКАНЪ.** Такъ въ древности называли астрономы дугу въ 10 градусоѣ, соотвѣствующую одной иреси зодіакальнаго знака.

DÉCASTÈRE. Смот. MÉTRIQUE (NOUVEAU SYSTÈME).

DÉCHARGE или **TUYAU DE DÉCHARGE.** **ТРУБА ДЛЯ СПУСКА ВОДЫ.**

DÉCHARGEUR. **СТОКЪ.** Труба или колобъ, дѣлаемый въ шлюзахъ для того, чтобы излишки вода, доспавляемая теченіемъ рѣки или ручья, могла стекать по мѣрѣ надобности.

DÉCHET. **УЩЕРБЪ, УБЫЛЬ** воды въ испускникѣ.

Также, *недостатокъ* дѣйствительно вытекающаго количества воды изъ какого либо отверстія, противъ того, которое слѣдовало бы получить по теоріи. Смот. CONTRACTION DE LA VEINE FLUIDE.

DÉCIGRAMME. Смот. MÉTRIQUE (NOUVEAU SYSTÈME).

DÉCIMAL. (Ари.) **ДЕСЯТИЧНЫЙ.** *Calcul décimal; десятичное счисленіе.* Смот. NUMÉRATION. *Arithmétique décimale; десятичная Арифметика.* Смот. ARITHMÉTIQUE. *Échelle décimale; десятичная система.* Смот. ARITHMÉTIQUES (ECHELES).

DÉCIMALE. (Ари.) **ДЕСЯТИЧНАЯ.** Такъ называется каждая изъ цифръ, составляющихъ десятичную дробь, а также и самая дробь. *Pousser l'approximation à quinze décimales. Приблизиться до пятнадцатой десятичной; довести приближеніе до пятнадцатой десятичной цифри.* Смот. ниже.

DÉCIMALE (FRACTION), PARTIE DÉCIMALE, или просто **ДЭСМАЛЕ.** (Ари.) **ДЕСЯТИЧНАЯ ДРОБЬ,** десятичная часть. Такъ называется дробь, имѣющая знаменателемъ свое число 10, возвышенное въ какую нѣсть цѣлую степень, или, что всё равно, единицу съ нѣсколькими нулями. И такъ, дробь $\frac{3}{10}$, $\frac{27}{100}$, $\frac{17}{1000}$ и проч. суть десятичныя. Если бы дробь десятичная писалась въ этомъ видѣ, то все арифметическія дѣйствія можно бы было произвѣсти какъ цѣлыя точно такъ, какъ надъ обыкновенными дробями. Но, основываясь на видѣ

этихъ знаменателей, придумали нѣкоторыя упрощенія, которыя и предлагаются здѣсь.

По условію, принятому въ десятичной системѣ, всякая цѣбра, по правую сторону коморой сдѣлано нуль, получаема значеніе въ десять разъ бѣдшее противъ первоначальнаго. И такъ, чтобы написать *три десятихъ*, приписываемъ съ правой стороны *трехъ* знакъ *нуль*, и получаемъ 30, то есть *тридцать*. По аналогіи очень естественно условиться въ томъ, что если напишемъ нуль съ лѣвой стороны цифры, то она получитъ значеніе въ десять разъ меньшее противъ первоначальнаго. И такъ, для изображенія *трехъ десятихъ*, то есть десятой части отъ *трехъ*, мы можемъ написать 03. Чтобы изобразить *десятую часть отъ трехъ десятихъ*, должно опять приписать нуль съ лѣвой стороны 03, и получимъ 003, то есть *три сотыхъ*, и такъ далѣе. Иско, что руководствуясь этимъ способомъ, мы въ состояніи будемъ изображать всякую десятичную дробь, не имѣя надобности писать знаменателя, который въ такомъ случаѣ подразумевается. Сверхъ того, для обозначенія мѣста простыхъ единицъ, условимся отдѣлять послѣдній нуль съ лѣвой стороны точкою или запятою; и такъ, вмѣсто 03 = $\frac{3}{10}$, напишемъ 0.3 или 0,3; вмѣсто 003 = $\frac{3}{100}$, 0,03; вмѣсто 0003 = $\frac{3}{1000}$, 0,003, и такъ далѣе.

Когда къ десятичной дроби желаетъ присовокупить цѣлое число, то пишемъ единицы сего послѣдняго на мѣсто нуля, отдѣленнаго точкою или запятою отъ дроби. И такъ 42.003 или 42,003 означаютъ 42 цѣлыя единицы и три тысячныхъ.

Если бы желали представить дробь $\frac{275043}{10000}$

въ видѣ десятичной, то замѣнивъ что

$$\frac{275043}{10000} = \frac{270000}{10000} + \frac{5000}{10000} + \frac{40}{10000} + \frac{3}{10000}$$

$$= 27 + \frac{5}{10} + \frac{4}{1000} + \frac{3}{10000},$$

получили бы дробь 27,5043, которая выговаривается слѣдующимъ образомъ: 27 *цѣлыхъ* и 5043 *десяти тысячныхъ*, или еще: 27 *цѣлыхъ*, 5 *десятихъ*, 4 *сотыхъ*, и 3 *тысячныхъ*.

Правила, относящіяся къ арифметическимъ дѣйствіямъ надъ десятичными дробями, выводятся

ся какъ нельзя проще изъ самого опредѣленія этого рода дробей. Предлагаемъ эти правила въ сокращенномъ видѣ.

Для приведенія нѣсколькихъ десятичныхъ дробей къ одному знаменателю, сплотивъ только принятыхъ къ этимъ дробямъ съ правой стороны послѣдней цѣфры столько нулей, сколько нужно для того, чтобы у каждой изъ нихъ было одинаковое число десятичныхъ знаковъ. Напрямѣръ, для приведенія къ одному знаменателю трехъ дробей

1,205, 25,6, 365,5306,
приписываемъ къ первой изъ нихъ *одни нули*,
къ второй *три нуля*, и получаемъ
1,2050, 25,6000, 365,5506;

каждая изъ этихъ дробей имѣетъ знаменатель 10000. Чтобы усмотрѣть справедливость этого правила, сплотивъ только задѣшшивъ, что при присоединеніи нулей къ десятичной дроби, съ правой стороны, не измѣняется ея значеніе; и въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ десятичная дробь 0,6 найдемся послѣдовательно:

$0,6 = \frac{6}{10} = \frac{60}{100} = 0,60, \frac{60}{100} = \frac{600}{1000} = 0,600$, и такъ
дальше.

Сложеніе и вычитаніе десятичныхъ дробей производится точно такъ, какъ сложеніе и вычитаніе цѣлыхъ чиселъ; только, при расположеніи слагаемыхъ чиселъ, должно наблюдать, чтобы единицы стояли подъ единицами, десятые доли подъ десятками, сотые подъ сотыми, и такъ далье. Вотъ примѣры:

Примѣръ сложенія десятичныхъ дробей

Слагаемыя числа: $\left\{ \begin{array}{l} 36,152 \\ 583,05673 \\ 58,3181 \\ 1025,91 \end{array} \right.$
Сумма: 1509,44715

Примѣръ вычитанія десятичныхъ дробей

Изъ 755,8250000
вычтемъ 50,90830762

Разность: 675,9169898

Для умноженія десятичной дроби на другую, такъ десятичную, откидываемъ запятую въ обоихъ, и перемножаемъ ихъ какъ цѣлыя числа; потомъ, въ найденномъ произведеніи, отсѣкаемъ

столько десятичныхъ знаковъ, сколько ихъ находилось въ данныхъ двухъ дробяхъ. Если случится, что произведеніе не имѣетъ достаточнаго числа десятичныхъ знаковъ для отсѣканія ихъ извѣстно, то надобно дополнить это число нулями, приписывая ихъ съ лѣвой стороны найденнаго произведенія. Очевидно, что если бы одно изъ двухъ данныхъ чиселъ было цѣлое, то произведеніе имѣло бы столько десятичныхъ знаковъ, сколько другое число, которое по предположенію есть десятичная дробь. Когда цѣлое число будетъ 10, 100, 1000,..... и вообще 10^n , то умноженіе производимаго пофигуруетъ просто запятую вправо на одинъ, на два, на три..... и вообще на n десятичныхъ знаковъ.

Приведенный способъ умноженія доказывается самымъ простымъ образомъ наблюденіемъ, что если знаменатель одной изъ нихъ будетъ 10^m , а другой, 10^n , то раздѣливъ эти двѣ дроби въ видѣ обыкновенныхъ, и перемноживъ ихъ по извѣстному правилу, получимъ новую дробь, у которой числитель будетъ равенъ произведенію числителей данныхъ двухъ дробей, а знаменатель, $10^m \times 10^n = 10^{m+n}$. Следовательно, откинувъ этого знаменателя, должны получить въ произведеніи столько десятичныхъ знаковъ, сколько есть цѣфръ послѣ запятой, сколько содержится единицъ въ суммѣ $m+n$.

Вотъ несколько примѣровъ.

Примѣры умноженія десятичныхъ дробей.

Найти произведеніе 51,563 x 7,81.

Множимое: 31563
Множитель: 781

31563
252504
220981

Произведеніе: 24650793

Найти произведеніе $6,12 \times 0,0035$.

Множимое: 612
Множитель: 35

3060
1836

Произведеніе: $0,021420 = 0,02142$.

$0,00638 \times 10000 = 63,8$, $65,56 \times 100 = 6556$.

При умноженіи одной десятичной дроби на другую, приписываемъ къ ней изъ нихъ, у которой менше десятичныхъ цифръ, столько дополни-

цельных людей с правой стороны, сколько нужно для того, чтобы у обычных дробей было одинаковое число десятичных знаков; поможем откидываем запятую, и получаем два целых числа, над которыми производим деление по обыкновенным правилам. Очевидно, что таким образом получим искомое частное число, ибо откидывая запятую из обычных дробей, мы в одно время увеличиваем как делитель, так и делимый в 10, во 100, в 1000.... раз, чрез что частное число не перемещается. Когда надобно разделить десятичную дробь на 10, на 100 на 1000,.... то подвигаем только ее запятую в левую сторону на один, на два, на три,.... десятичных знака. Предлагаем несколько примеров.

Примеры деления десятичных дробей:

Разделить 245,30256 на 4,32

$$\frac{24530256}{432000} = 56 \frac{338256}{432000} = 56 \frac{783}{1000} = 56,783.$$

Разделить 0,0196 на 0,55.

$$\frac{196}{5500} = \frac{56}{1000} = 0,056.$$

$$\frac{55,90367}{1000} = 0,05590367; \quad \frac{8361,569}{100} = 83,62569.$$

Когда для умножения или деления даны десятичные дроби с значительным числом десятичных цифр, то определение точного произведения или частного потребует вообще довольно продолжительных выкладок. В подобных случаях обыкновенно довольствуются известным числом десятичных знаков в результате, что приводит к некоторым сокращениям. Вот как каким образом производится сопроценное умножение.

Для краткости речи, изобразим чрез M множимое, а чрез N множитель, и условимся считать их цифры следуя обыкновенному порядку, то есть, от правой руки к правой. Помножим сперва все цифры множимого на первую цифру множителя. Потом помножим на вторую цифру числа N все цифры M , при чем откидываем единицы, получаемые от умножения последней цифры числа M , а десятки придаем к произведению на предпоследнюю цифру множимого; таким образом получится произведение, которое подписываем под предыдущим, наблюдая чтобы последние цифры находи-

лись одна под другою. Далее, берем третью цифру числа N , и помножаем на нее множимое M , начиная умножение с предпоследней цифры числа M ; при таком действии откидываем опять единицы, а десятки придаем к произведению на третью цифру от конца. Получаемое таким образом произведение третьей цифры множителя на множимое подписываем под двумя предыдущими. Продолжаем это действие до тех пор, пока не дойдем до последней цифры множителя; сумма всех найденных частных произведений будет равна искомому произведению, ограниченному известным числом десятичных знаков, которое легко определить приняв в соображение как целый числа сопровождающая множимое и множитель, так и первые их десятичные цифры. Для пояснения этих правил, предлагаем несколько примеров.

	2.)	3.)
96,7654321		
12,5456789	3,0 056	6,23141
.....	5,6,07	0,0003 789
96,7654321		
19,7530864	9 0 158	1869423
29629630	18 034	436199
1.) 3950617	210	49851
493827		5608
59259	108,412	
6915		0,002561081
790		
88		
1219,326300		

Чтобы не сбиваться в цифрах множителя, на который помножаем множимое, а также и в тех, с которых начинаем умножение в множимом, не худо опоминать их точкою по мере того, как дойдешь до них очередь.

Этот сокращенный способ умножения весьма удовлетворителен по своей точности, в чем читатель может удостовериться определив предель суммы откидываемых десятичных знаков, ближайших к последней цифре, сохраняемой в произведении. Сверх того, предель точности уменьшается еще тем, что когда откидываем единицы, и присовокупляем десятки к произведению на предшествующую цифру множимого, то увеличиваем эти десятки единицею, если откидываемых единиц больше 5. И так, во втором примере, произведение

18034 получалось слѣдующимъ образомъ: помно-
жилъ 6 на 6 имѣемъ 36; единицы, т. е. 6 откиды-
ваемъ, а удерживаемъ не 3, а 4, потому что 38
ближе къ 40 чѣмъ къ 30. Далѣе, $6 \times 5 = 30$, 4 въ
уѣтѣ, и того 34; пишу (4), а въ уѣтѣ 3. Помножаю
6 на 0 и придаю 3, и того (3). Помножаю 6 на 0,
получаю (0). Наконецъ $6 \times 5 = 18$; приписываю
(18), и получаю въ произведеніи 18034.

Чтобы читателя могли судить о степени
точности найденныхъ нрѣхъ приближенныхъ
произведеній, приводимъ для сравненія точные
результаты:

- 1.) $98,7654321 \times 12,3456789 = 1219,5235112635269$.
- 2.) $5,0036 \times 36,07 = 108,411992$.
- 3.) $6,25141 \times 0,00037 = 0,002351081249$.

Сокращенное дѣленіе производится на осно-
ваніи тѣхъ же правилъ, которые служатъ для
умноженія. Для примѣра сдѣлаемъ новѣрку 1-го
изъ приведенныхъ выше умноженій, принявъ чи-
сло 1219,523509 за дѣлимое, а 98,7654321 за дѣ-
лителя.

1219326509	987654321
987654321	12,3456789
251671988	
197530864	
54141124	
29629850	
4511494	
3930617	
560877	
495827	
67059	
59259	
7791	
6913	
818	
790	
88	
88	
0	

Вотъ какимъ образомъ произведено это дѣ-
леніе: расположивъ обыкновеннымъ образомъ дѣ-
лимое и дѣлителя, говоримъ: 9 въ 12 содержи-
тся одинъ разъ; нашемъ 1 въ частномъ, а подъ
дѣльнымъ ставимъ произведеніе единицы на дѣ-
лителя, то есть просто дѣлителя; вычитаемъ

его изъ дѣлителя, и получаемъ въ остаткѣ
251671983; далѣе: 9 въ 23, 2 раза, нашемъ 2 въ
частномъ, и помножаемъ дѣлителя на 2; и такъ,
 $2 \times 1 = 2$, двухъ не пишемъ, а продолжаемъ:
 $2 \times 2 = 4$, $2 \times 3 = 6$ и такъ далѣе; получаемое
произведеніе 197530864 вычитаемъ изъ 251671988,
и получаемъ въ остаткѣ 34141124. Говоримъ
опять: 9 въ 34 содержится 3 раза; пишемъ 3 въ
частномъ, и помножаемъ дѣлителя на 3, начиная
уже съ предпоследней его цифры 2. И такъ
 $3 \times 2 = 6$; но 6 ближе къ 10 чѣмъ къ 0, почему
удерживаемъ единицу въ уѣтѣ, и придавъ ее къ
произведенію $3 \times 5 = 9$, получаемъ 10; пишемъ 0,
и удерживаемъ опять въ памяти 1; далѣе,
 $3 \times 4 = 12$ и 1 въ уѣтѣ, 13, пишемъ 3, 1 въ уѣтѣ;
 $3 \times 5 = 15$ и 1, 16, пишемъ 6, а 1 въ уѣтѣ, и такъ
далѣе, пока не дойдемъ до первой цифры дѣлителя;
такимъ образомъ получится произведеніе
29629850, которое вычитаемъ изъ 34141124, и
находимъ въ остаткѣ 4511494. Продолжаемъ дѣ-
леніе на томъ же самомъ основаніи, то есть
для каждой новой цифры въ частномъ число от-
ступаемъ на одинъ знакъ отъ правой руки къ
лѣвой въ дѣлитель, и получаемъ наконецъ въ
остаткѣ 0, а въ частномъ числѣ 12,3456789. Что
касается до числа десятичныхъ знаковъ, то оно
легко опредѣлится принявъ въ соображеніе цѣ-
лыя числа, сопровождающія дѣлимое и дѣлителя,
также ихъ первые десятичные знаки.

Сокращенное дѣленіе можно производить еще
другимъ образомъ: ошмысленъ въ слѣдѣ DIVI-
SION ORDONNÉE.

Для превращенія обыкновенной дроби въ де-
сятичную, приписываемъ къ числителя одну,
два, три... и вообще n нулей, чрезъ что дан-
ная дробь увеличится въ 10, въ 100, въ 1000,
и вообще въ 10^n разъ. Потомъ дѣлимъ числителя,
такимъ образомъ увеличеннаго, на знаменателя
предложенной дроби; очевидно, что частное чи-
сло должно будетъ уменьшиться въ 10, въ 100, въ
1000, и вообще въ 10^n разъ, а этого достигнемъ
подвинувъ запятую въ частномъ на 1, на 2, на
3, ... и вообще на n десятичныхъ знаковъ отъ
правой стороны въ лѣвую. Вотъ нѣсколько при-
мѣровъ:

Превратимъ $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{25}$, $\frac{411}{125}$ въ десятичную дробь.

$$\begin{array}{r|l}
 30 & 4 \\
 \hline
 28 & 0,75 = \frac{3}{4} \\
 \hline
 20 & \\
 \hline
 20 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 60 & 25 \\
 \hline
 50 & 0,24 = \frac{3}{25} \\
 \hline
 100 & \\
 \hline
 100 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 411 & 125 \\
 \hline
 375 & 5,288 = \frac{411}{125} \\
 \hline
 360 & \\
 \hline
 250 & \\
 \hline
 1100 & \\
 \hline
 1600 & \\
 \hline
 1000 & \\
 \hline
 1000 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Легко усмотреть, что не всякая дробь может быть выражена точным образом посредством десятичной. Действительно, пусть будет $\frac{A}{B}$ предложенная дробь, которую предполагаем несокращенною. Если бы дробь $\frac{A}{B}$ могла быть во всяком случае превращена в десятичную, то получили бы $\frac{A}{B} = \frac{D}{10^m}$, где D и m целые числа. Из этого равенства выводим $B \times D = 10^m \cdot A = 2^m \times 5^m \cdot A$, откуда $D = \frac{2^m \times 5^m \cdot A}{B}$.

Но как A и B по предположению не имеют общих делителей, а D целое число, то $2^m \times 5^m$ должно делиться на B . Следовательно, обыкновенная дробь $\frac{A}{B}$ выражается точным образом дробью десятичною только в том случае, когда ее знаменатель B будет или степенью от 2, то есть вида 2^n , или степенью от 5, то есть вида 5^n , или наконец, если этот знаменатель выразится произведением двух степеней от 2 и 5, то есть будет вида $2^n \times 5^m$. Когда B не удовлетворит таким требованиям, то десятичная дробь, выражающая $\frac{A}{B}$, будет простирающаяся в бесконечность. Впрочем очевидно, что по мере увеличения m , величина $\frac{D}{10^m}$ будет меньше и меньше разниться от дробь $\frac{A}{B}$, ибо разделив $10^m \cdot A$ на B , получим частное число D , которое будет меньше прощай надлежащего, а сделается большим, если увеличим его единицею. И так, $\frac{A}{B}$ будет заключаться между двумя числами $\frac{D}{10^m}$ и $\frac{D+1}{10^m}$, которых разность равна $\frac{1}{10^m}$, и следовательно, с увеличением показателя m , можно

быть уменьшена по произволению. Вот некоторые бесконечные десятичные дроби:

$$\frac{1}{3} = 0,333333..., \quad \frac{40}{85} = 1,212121..... \\
 \frac{8}{7} = 1,142857142857....., \quad \frac{5}{18} = 0,250769250769.....$$

Легко доказать, что когда обыкновенная дробь $\frac{A}{B}$ выражается бесконечною десятичною дробью, то эта последняя будет *периодическою* (*fraction decimale périodique* или *circulante*), то есть, некоторые ее цифры будут непрерывно повторяться в одном и том же порядке. И так в дробь $\frac{1}{3}$ повторяющаяся цифра будет 3, в дробь $\frac{40}{85}$ повторяющиеся цифры 2 и 1, то есть число 21, и так далее. Совокупность повторяющихся цифр называется *периодом дроби* (*période de la fraction*). В приведенных примерах периоды будут соответственно: 3, 21; 142857, 250769.

Когда период начинается с первой десятичной цифры, то дробь принимает название *простой периодической*, а если со второй или с дальнейшей, то она называется *смещенною периодическою дробью*.

Мы сказали, что когда число B не подходит под вид $2^n \times 5^m$, то превращая дробь $\frac{A}{B}$ в десятичную, получаем бесконечную периодическую дробь. И действительно, так как по предположению A и B не имеют общих делителей, а B вида отличного от $2^n \times 5^m$, то ясно, что приписав сколько угодно нулей к A , и произведя по нему деление на B , никогда не получим остатка, равного нулю. Сверх того очевидно, что каждый остаток будет меньше делителя B , почему их число и не может превышать $B-1$. И так, предполагая даже, что все эти остатки различны между собою, ясно, что после нескольких делений получим один из прежних остатков, а следовательно и прежний цифра в частном числе; далее, по причине возвращающихся в прежнем порядке остатков, и цифры в частном числе будут повторяться, и составлять период.

Превращение периодической десятичной дроби в обыкновенную не представляет никакого

затрудненіа. Изъ слѣдующихъ двухъ примѣровъ легко усмотрѣть какъ должно поступать вообще.

Пусть данная періодическая дробь будетъ $x = 0,27272727 \dots$. Помножаемъ это равенство на число 10, возвышенное въ степень, равную числу цифръ, заключающихся въ періодѣ, т. е. на $10^2 = 100$; получимъ

$$\begin{array}{r} 100x = 27,272727 \dots \\ \text{вычтя} \quad x = 0,272727 \dots \\ \hline \text{найдемъ} \quad 99x = 27, \\ \text{откуда} \end{array}$$

$$x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

Возьмемъ смѣшанную періодическую дробь

$$x = 5,23165165165 \dots$$

Помножимъ ее сперва на число 10, возвышенное въ степень, равную числу десятичныхъ цифръ, предшествующихъ періоду, сложенному съ числомъ цифръ самого періода, то есть въ степени $2+3=5$; получимъ

$$100000x = 523165,165165165 \dots$$

Далѣе: помножимъ предложенную дробь на число 10, возвышенное въ степень, равную числу десятичныхъ цифръ, предшествующихъ періоду; найдемъ

$$100x = 523,165165165 \dots$$

Вычтя это равенство изъ предыдущаго, получимъ

$$99900x = 522632,$$

откуда

$$x = \frac{522632}{99900} = \frac{87107}{10650}$$

DÉCIMÈTRE. См. MÉTRIQUE (NOUVEAU SYSTÈME).

DÉCISIONS. (По Вѣр.) РѢШЕНІЯ. *Probabilités des décisions rendues à la pluralité des voix; въ полнотѣ справедливости рѣшеній по большинству голосовъ.* См. ASSEMBLÉES, TRIBUNAUX.

DÉCISTÈRE. См. MÉTRIQUE (NOUVEAU SYSTÈME).

DÉCLIC или DÉCLICQ. ПРУЖИНА, ДЕРЖАКА. Такъ называется всякая пружина, препятствующая извѣстному движенію. Напримѣръ, въ машинѣ для вбиванія свай, такая пружина служитъ для удержанія бабы на надлежащей высотѣ; посредствомъ веревки спускають этупру-

жину, и баба падаетъ съ силой на веркъ свай, и углубляетъ ее въ землю.

DÉCLIN. См. DÉCOURS.

DÉCLINAISON. (Астр.) **СКЛОНЕНІЕ.** Угловое разстояніе звѣзды отъ небеснаго экватора, измѣряемое на дугѣ большаго круга, проходящаго чрезъ полюсы міра и чрезъ звѣзду. Склоненіе называется *спернымъ* (*boreale*) или *южнымъ* (*australe*), смотря по тому, въ какомъ полушаріи находится звѣзда — въ сѣверномъ или южномъ. Когда знаемъ высоту полюса, или широту φ мѣста наблюденія, и разстояніе δ звѣзды отъ зенита во время ея прохожденія чрезъ меридіанъ, то склоненіе звѣзды, которое изобразитъ чрезъ δ , опредѣлится разностию $\delta = \varphi - \epsilon$. Если $\varphi > \epsilon$, то склоненіе будетъ одного наименованія съ широтою мѣста. Склоненіе имѣетъ съ прямымъ восхожденіемъ служать къ опредѣленію мѣста звѣзды, и, въ отношеніи къ азимуту, имѣетъ то же значеніе, какъ широта и долгота мѣста на поверхности земной. Склоненіе звѣздъ перемѣняется по причинѣ собственнаго ихъ движенія и отступленія точекъ равноденственныхъ. См. PRÉCESSION.

CERCLE DE DÉCLINAISON. Кругъ склоненія; кругъ, проходящій чрезъ полюсы міра, и на которомъ измѣряется склоненіе.

PARALLÈLES DE DÉCLINAISON. Параллели, параллельные круги склоненія; малые круги небесной сферы, параллельные экватору.

PARALLAXE DE DÉCLINAISON. Параллаксъ склоненія; дуга круга склоненія, измѣряющая число градусовъ, на которое увеличилось или уменьшилось склоненіе отъ дѣйствит. параллакса высоты. См. PARALLAXE.

DÉCLINAISON. СКЛОНЕНІЕ. *Déclinaison d'un plan vertical; склѣненіе вертикальной плоскости.* Въ Гномоникѣ, дуга горизонта, заключающаяся между первымъ вертикальнымъ кругомъ и пересѣченіемъ плоскости квадрата съ горизонтомъ. — *Déclinaison de l'aiguille aimantée; склоненіе магнитной стрѣлки.* Уголъ, на который горизонтальная намагнитенная стрѣлка уклоняется отъ направленія полученной линіи.

DÉCLINANT. (Астр.) **СКЛОНЯЮЩІЙСЯ.** Имя-

дай какое либо склонение; Смол. выше. *Cadrant déclinant*; *скл. наклонный квадрант*.

DÉCLINATEUR или **DÉCLINATOIRE**. (Гном.) **ДЕКЛИНАТОРЪ**. Инструментъ, употребляемый въ Гномоникъ, и посредствомъ котораго опредѣляется склонение и наклонение плоскости квадранта. Читатели найдутъ описаніе этого инструмента въ *Encyclopédie méthodique, Mathématiques* (Томъ 1 стр. 487).

DÉCLINATOIRE. (Практ. Геом.) **ДЕКЛИНАТОРЪ**. Малая буссоль, употребляемая при съемкѣ плановъ, и служащая для приведенія менсулы въ надлежащее положеніе, когда на планѣ означено направленіе магнитной стрѣлки. Этотъ инструментъ дѣлается безъ круга, раздѣленнаго на градусы: на немъ означены только точки сѣвера и юга. — *Деклиноматоръ* называется также граомеръ съ лямбозъ, раздѣленнымъ на градусы, и съ подвижною алидадою, которая снабжена компасомъ.

DÉCLINATORIUM, **ATIGUILLE** или **BOUSSOLE DE DÉCLINAISON**. **КОМПАСЪ СКЛОНЕНИЯ**. Снарядъ, употребляемый для точныхъ наблюдений надъ склоненіемъ магнитной стрѣлки. Описаніе этого инструмента читатели найдутъ почти во всѣхъ курсахъ Физики.

DÉCOMPOSABLE. **РАЗЛОЖИМЫЙ**. *Un nombre décomposable en facteurs; число разложимое на множители. Chaque entier est décomposable en quatre facteurs; всякое целое число можетъ быть разложено на четыре квадрата. Toute fonction réelle rationnelle et entière est décomposable en facteurs réels du premier ou du second degré; всякая вещественная функція, целая и рациональная, можетъ быть разложена на вещественные множители первой и второй степени. Un polyèdre est décomposable en pyramides; многогранникъ можетъ быть разложенъ, разбитъ на пирамиды. Toute force appliquée à un point matériel est décomposable en deux autres agissant à angle droit; всякая сила, приложенная къ матеріальной точкѣ, можетъ быть разложена на два другія, действующія подъ прямымъ угломъ.*

DÉCOMPOSER. **РАЗЛОЖИТЬ**, **РАЗВѢТЬ**. *Décomposer un nombre entier en facteurs simples; разложить, разбить целое число на простые множи-*

тели. Décomposer un polygone en triangles; разложить, разбить многоугольникъ на треугольники. Décomposer une force en deux autres; разложить силу на два другія.

DÉCOMPOSITION. (Ариф. и Алг.) **РАЗЛОЖЕНІЕ**, **РАЗВѢВКА**. Дѣйствіе, посредствомъ котораго число или какое нибудь алгебраическое выраженіе изображается въ другомъ видѣ, болѣе простомъ или удобномъ для предполагаемой цѣли. *Décomposition d'un nombre en facteurs simples; разложеніе числа на простые множители; Смол. DIVISEUR. Décomposition d'une fraction rationnelle en fractions partielles; разложеніе рациональной дроби на частныя дроби; Смол. FRACTION. Décomposition des équations; разложеніе уравненій.* Таково, напримеръ, разложеніе, по способу *Деламбта*, уравненій 4-ой степени на два множителя 2-ой степени; Смол. **ÉQUATION**, **BIQUADRATIQUE**.

DÉCOMPOSITION. (Геом.) **РАЗЛОЖЕНІЕ**, **РАЗВѢВКА**. Раздѣленіе какого нибудь цѣлаго на части. *Décomposition d'un polygone en triangles et d'un polyèdre en pyramides; разложеніе многоугольника на треугольники и многогранника на пирамиды.*

DÉCOMPOSITION DES FORCES. (Мех.) **РАЗЛОЖЕНІЕ СИЛЪ**. Дѣйствіе, посредствомъ котораго данныя силы замѣняются другими, дѣйствующими вообще по направленіямъ, отличнымъ отъ первыхъ; Смол. **PARALLELOGRAMME DES FORCES**. Когда, напротивъ того, приводятся нѣсколько силъ къ меньшему числу, то такое дѣйствіе называется *совокупленіемъ силъ*, Смол. **COMPOSITION DES FORCES**.

DÉCOMPOSITION DES VITESSES. **РАЗЛОЖЕНІЕ СКОРОСТЕЙ**. Замѣненіе данныхъ скоростей другими, нѣющими въ отношеніи къ первымъ другія направленія. Смол. **VITESSE**, **PARALLELOGRAMME DES VITESSES**.

DÉCOURS. (Астр.) **УЩЕРБЪ ЛУНЫ**. Промежутокъ времени между полнолуніемъ и последующимъ новолуніемъ. Время отъ новолунія до полнолунія называется *наращеніемъ луны (croissant)*.

DÉCRÉMENT, то же что **AUGMENT**. Усп. выр. **ПРИРАЩЕНІЕ**. Смол. **ACCROISSEMENT**.

DÉCRIRE. (Геом. и Мех.) **ОПИСЫВАТЬ**. Въ Геометріи говорится, что точка описываетъ прямую или кривую линію, когда воображается что

этой точка движется, и въ движеніи своемъ чертитъ или прямую или кривую линію. Въ томъ же смыслѣ говорить, что линія *описываетъ* поверхность, площадь *описываетъ* тѣло. Смот. GENERATION. Въ Механикѣ *писывать* употребляется въ значеніи глагола *переходить, пересѣкать*. И такъ, говоримъ: *un corps pesant lancé dans le vide décrit une parabole*; тѣлесное тѣло, брошенное въ пустотѣ *простирается, описываетъ* параболу. *Le rayon vecteur décrit des aires proportionnelles au temps*; радиусъ векторъ *простирается* площади, пропорціональныя времени. — На чертить. *Décrire un cercle, une parabole*; нарисовать, описать кругъ, параболу. Смот. DESCRIPTION.

DESCRIVANT. (Геом.) Не употр. **ПРОИЗВОДИТЕЛЬ, ОПИСЫВАЮЩИЙ, ЧЕРТЯЩИЙ.** Смот. GÉNÉRATEUR. Point décrivant; описывающая, чертящая точка.

DÉCROISSANT. (Анал.) **УМЕНЬШАЮЩИЙСЯ, УБЫВАЮЩИЙ, ИСХОДЯЩИЙ.** *Série décroissante*; исходящій рядъ. Смот. CROISSANT.

DÉCROISSEMENT. **УМЕНЬШЕНИЕ, УБЫВАНІЕ.**

DÉCROÎTRE. (Анал.) **УМЕНЬШАТЬСЯ, УБЫВАТЬ.** *Cette quantité restant constamment positive, décroît au-delà de toute limite*; эта величина, оставаясь постоянно положительною, *уменьшается, и дѣлается меньше всякаго данного количества.*

DÉCUPLE. (Ариф.) **ДЕСЯТЬ РАЗЪ ВЗЯТЫЙ, УДЕСЯТЕРЕННЫЙ, ДЕСЯТИЧНЫЙ.** *Rapport décuple*; десятикратное отношеніе. Таково напримѣръ отношеніе 30:3.

DÉCUPLE (RAPPORT) или RAISON DÉCUPLEE. Не употр. **ОТНОШЕНІЕ КОРНЕЙ ДЕСЯТЫХЪ СТЕПЕНЕЙ.** Напримѣръ, отношеніе 3:2 равняется отношенію корней десятихъ степеней чиселъ 3¹⁰ и 2¹⁰, ибо $\sqrt[10]{3^{10}} = 3$ и $\sqrt[10]{2^{10}} = 2$.

DÉCUSSION (POINT DE). (Опти.) **ТОЧКА ПЕРЕСѢЧЕНІЯ ЛУЧЕЙ,** напримѣръ фокусъ зажигательнаго стекла или зеркала.

DÉDOUBLER (SE). **РАЗБИВАТЬСЯ, РАЗЛАГАТЬСЯ НА ДВА.** Напримѣръ, уравненіе $(ax - by)(a'x - b'y - 1) = 0$, разлагается на два слѣдующія:
 $ax - by = 0$ и $a'x - b'y - 1 = 0$.

DÉDUCTION. ВЫВОДЪ, ВЫВОДИМОЕ СЛѢДСТВІЕ.

DÉDUIRE. ВЫВЕСТИ. *Déduire la valeur de l'inconnue*; вывести величину неі вѣстной.

DÉFAILLANT. Смот. DÉFECTIF.

DÉFAUT. (Гидрав.) **РАЗНОСТЬ** между выотою, на которую струя водомета должна бы подняться по теоріи и дѣйствительному ея выотою. Смот. JET D'EAU. — Недостатокъ!

PAR DÉFAUT. По недостатку. *Ces deux nombres diffèrent de la véritable valeur de l'inconnue l'un par excès, et l'autre par défaut.* Одно изъ сихъ чиселъ *разнится* отъ настоящей величины неизвѣстной по избытку, а другое, по недостатку. То есть, одно число болѣе неизвѣстной, а другое менѣе.

DÉFECTIF (NOMBRE) или NOMBRE DÉFICIENT, или еще КОМБЛЕ DÉFAILLANT. (Ариф.) **НЕДОСТАТОЧНОЕ ЧИСЛО.** Смот. ABONDANT.

DÉFECTIVES (HYPERBOLES), или PURVIVOLLES DÉFICIENTES. (Геом.) **НЕСОВЕРШЕННЫЯ ИПЕРБОЛЫ,** иперболы безъ одной асимптоты. Такъ названы *Ньютономъ* кривыя третьяго порядка, имѣющія только одну прямилинейную асимптоту, и слѣдовательно ошлччающіяся въ этомъ отношеніи отъ обыкновенной или Аполлоніевой иперболы, которая имѣетъ двѣ асимптоты.

Кривая, опредѣляемая уравненіемъ

$$xy^2 + y^2 = ax^2 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,$$

обращается въ недостаточную иперболу когда $\alpha < 0$. Дѣйствительно, рѣшивъ предыдущее уравненіе въ отношеніи къ y , получимъ

$$y = -\frac{x}{2\alpha} \pm \sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma + \frac{\delta}{4\alpha^2}};$$

если положимъ $x=0$, то найдемъ $y = -\frac{\delta}{2\alpha} =$ безконечности. Слѣдовательно ось y -овъ будетъ асимптотою разсматриваемой кривой. Положивъ $x=\infty$, найдемъ уравненіе $y = \pm x\sqrt{\alpha}$, которое, по критерію α отрицательнаго, изобразитъ асимптоты мнимыя. И такъ, предложенная кривая третьяго порядка имѣетъ только одну асимптоту, совпадающую съ осью y -овъ.

DÉFERENT (CERCLE), ЭКСЦЕНТРИЧЕСКІЙ

КРУГЪ, описанный около земли центромъ эллипса планеты. Древние астрономы, для объяснения видимыхъ неравенствъ въ движеніи планетъ, предполагали, что каждая планета движется по окружности круга (названнаго имя эллипсолома), кою центръ описываетъ около земли *эксцентрической кругъ* (*cerle portant или différent*) въ то время какъ планета переходитъ свой эллипсусъ. Смол. EPICYCLE.

DÉFICIENT (NOMBRE) или **DÉFECTIF**. Смол. ABONDANT. *Hyperbole déficiente*. Смол. DEFECTIVE (HYPERBOLE).

DÉFICIT. НЕДОСТАТОКЪ.

DÉFINIE (INTÉGRALE). МЕЖДУПРЕДЕЛЬНЫЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЬ. Смол. INTÉGRAL (CALCUL).

DÉFINIR. ОПРЕДЕЛЯТЬ. Смол. DÉFINITION.

Définir une courbe par son équation; стрѣдѣлать кривую уравненіемъ. Смол. COURBE.

DÉFINITIF. ОКОНЧАТЕЛЬНЫЙ. — КОНЕЧНЫЙ. *Résultat définitif; окончательный выводъ. Intégrale définitive; окончательный интегралъ.*

DÉFINITION. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Въ Логикѣ различаютъ два рода опредѣленій: *опредѣленіе слова или именованіе (définition de nom)* и *опредѣленіе вещи или дѣйствительное (définition de chose).*

Именованное опредѣленіе есть объясненіе смысла, который придаетъ употребляемому нами слову. Въ *дѣйствительномъ опредѣленіи* высказываются всѣ признаки, составляющіе сущность опредѣляемой вещи, и отличающіе ее отъ всѣхъ другихъ.

Въ чистомъ Анализѣ, и даже въ Геометріи, употребляются, собственно говоря, только именованія опредѣленія. И такъ, опредѣляя терминъ: *сложене, вычитаніе, дробь, квадратное число, треугольникъ, шаръ* и проч. мы только объясняемъ то, что разумѣемъ подъ этими словами.

Въ предложеніяхъ математическаго анализа къ Естественной Философіи, мы принуждены замѣстовать данныя изъ наблюдений надъ явлениями природы, и въ такомъ случаѣ нѣтъ сомнѣнія въ дѣйствительности опредѣленія, болѣе или менѣе удовлетворительныя. Такъ, напримѣръ, *необходима* природу тѣлъ твердыхъ, жидкихъ и воздухообразныхъ, мы опредѣляемъ каждое изъ

сихъ трехъ состояній, и потому уже на этихъ опредѣленіяхъ основываемъ дальнѣйшія изслѣдованія ихъ свойствъ.

Всякое опредѣленіе состоитъ изъ *простыхъ или первоначальныхъ идей*; простая идея не подлежитъ опредѣленію. Нѣкоторые авторы, и въ особенности лексикографы, пытались опредѣлять понятія о *величинѣ, линіи, пространствѣ, времени* и т. п.; но они не успѣли въ этомъ, потому что подобныя понятія принадлежатъ къ числу простыхъ идей, и не могутъ быть опредѣлены. Отсылаемъ къ сказанному объ этомъ предметѣ въ слѣдующемъ **COURBE**. Не смотря на всѣ наши старанія опредѣлять только такіе слова, которыя подлежатъ опредѣленію, читатели, безъ сомнѣнія, найдутъ въ нашихъ Лексиконахъ нѣкоторыя противуположныя отступленія отъ этого правила; можемъ быть также воспріимчивы оныя и опредѣленія, не совсѣмъ удовлетворительныя. Мы сознаемся въ этомъ недоспаханіи, но вѣдь съ тѣмъ позволяемъ себѣ замѣчаніе, что есть такіе понятія, которыхъ весьма трудно сдѣлать хорошее опредѣленіе.

DÉFLEXION. СОВРАЩЕНИЕ, УКЛОНЕНИЕ.

DÉFORMATION. Смол. ANAMORPHOSE.

DÉGAGEMENT DE L'INCONNUE. (Алг.) ОСВОБОЖДЕНИЕ НЕИЗВѢСТНОЙ. Напримѣръ, изъ уравненія $\frac{5x}{7} + 6 = 18$ получимъ *грезъ освобожденіе неизвѣстной, $x = 14$.*

DÉGAGER L'INCONNUE. ОСВОБОДИТЬ НЕИЗВѢСТНУЮ. Смол. выше.

DÉGRADATION DE LUMIÈRE. (Физ.) ПОСТЕПЕННОЕ УМЕНЬШЕНИЕ, ОСЛАБЛЕНИЕ СВѢТА.

DÉGRÉ. (Геои.) ГРАДУСЪ. 360-ая часть цѣлой окружности круга по шарообразному дѣленію, и 400-ая по новому. Смол. ANGLE, CERCLE, CIRCONFÉRENCE. — **Степень.** *Courbe du second, du troisième degré; кривая второй, третьей степени.* Смол. COURBE.

DÉGRÉ. (Алг.) СТЕПЕНЬ. — ИЗМѢРЕНИЕ. *Degré d'une équation; степень уравненія.* Такъ называется показатель высшей степени неизвѣстной въ алгебраическомъ уравненіи. *Équation du second, du troisième degré; уравненіе второй, третьей степени.* Смол. PUISSANCE, EXPOSANT, EQUATION.

Degré d'homogénéité; степеня, измѣренье однородности. Смол. HOMOGENE (FONCTION), DIMENSION.

DEGRÉ. (Астр.) **ГРАДУСЪ.** *Degré de latitude, de longitude; градусъ широты, долготы.* Смол. LATITUDE, LONGITUDE.

DEGRÉ TERRESTRE. (Астр.) **ЗЕМНОЙ ГРАДУСЪ.** Земная дуга, считаемая по меридиану, и соизмѣщающаяся небесному градусу. И такъ, земной градусъ есть дуга меридиана, при оконечностяхъ которой вертикальныя линіи, то есть линіи перпендикулярныя къ земной поверхности, наклонены одна къ другой подъ угломъ, равнымъ одному градусу. Другую дугу меридиана выражаютъ въ известной мѣрѣ, какъ то въ милахъ, верстахъ, жепрахъ и проч. Что касается собственно до измѣренія земныхъ градусовъ, то омыслимъ по сему предмету къ спашь: MEASURE DE LA TERRE. Смол. также FIGURE DE LA TERRE.

DEGRE DE LATITUDE, DE LONGITUDE, D'ASCENSION, DE DECLINAISON и проч. Градусъ широты, долготы, восхожденія, склоненія и проч. Смол. LATITUDE, LONGITUDE, ASCENSION, DECLINAISON и проч.

DEGRÉ ¹ de certitude. (Неч. Вѣр.) **СТЕПЕНЬ** достовѣрности. *Яковъ Бернулли* употребляетъ это наименованіе въ одномъ смыслѣ съ *вѣроятностію*. Такъ какъ сія послѣдняя выражается всегда дробью, когда принимаешь *достовѣрность* за единицу, то ясно, что *вѣроятность* будетъ нѣкоторою частію достовѣрности, и поэтому можетъ быть названа *степеню достовѣрности*. Впрочемъ это наименованіе, въ приведенномъ сей-часъ значеніи, вышло теперь изъ употребленія. Нынѣ, придають ему слѣдующій смыслъ: *сверхъ достовѣрности математической или абсолютной, разсматривають еще достовѣрность физическую (certitude physique) и достовѣрность вѣроятную или нравственную (certitude morale)*. Подъ этими названіями разумѣютъ не иное что, какъ весьма большія вѣроятности. И такъ, когда человекъ говоритъ, что онъ вѣрнопредубѣжденъ прожить еще одну минуту, то это значить, что вѣроятность его существованія въ продолженіи этой минуты такъ мало разнилась отъ единицы, то есть, отъ аб-

солютной достовѣрности, что разность сію можно пренебречь. Достовѣрности физическія и нравственныя могутъ быть весьма различны, и онѣ тѣмъ болѣе заслуживають названіе достовѣрности, чѣмъ менѣе разишутся отъ достовѣрности математической. Теперь легко понять, что должно разумѣть подъ реченіемъ: *различныя степени достовѣрности*; это выраженіе, въ слѣдствіе сказаннаго выше, не будетъ даже требованъ и объясненія, когда займемъ названіе какъ физической, такъ и нравственной достовѣрности наименованіемъ: *большая вѣроятность*. Для дальнѣйшихъ подробностей омыслимъ къ спашь: PROBABILITE.

DÉINCLINANT или **DÉINCLINÉ (CADRAN).** Не упом. Смол. CADRAN INCLINÉ ET DÉCLINANT.

DÉLIAQUE (PROBLÈME). **ДЕЛИЙСКАЯ ЗАДАЧА** или **ЗАДАЧА ОЪ УДВОЕНІИ КУБА.** Смол. DUPLICATION DU CUBE.

DÉLINÉATION. **ВЫЧЕРЧИВАНІЕ, ЧЕРЧЕНІЕ.**

Изображеніе какой либо фигуры одитипъ линіями.

DEMANDE, или POSTULAT. ТРЕБОВАНІЕ, ПОСТУЛАТЪ, ПОЛОЖЕНІЕ. — Предположеніе, иптеза. Такъ называється очевидное предположеніе, которыми утверждаютъ возможность или невозможность что либо сдѣлать.

Напримѣръ, когда говоримъ, что чрезъ двѣ точки можно провести прямую линію, или что кругъ можетъ быть описанъ изъ какой угодно точки произвольнымъ радіусомъ, то такого рода предположенія называются *постулатами*. Иногда постулаты бывають менѣе очевидны: такъ, напримѣръ, Маркизъ *де л'Оупатъ* основывается своей пракашью *Analysis des Infiniment petits* на слѣдующихъ двухъ положеніяхъ: 1-е Требованіи. Двѣ величины, разишующія между собою количествомъ безконечно малыхъ, могутъ быть принимаемы одна за другую. 2-е Требованіи. Кривая линія можетъ быть принимаема за многоугольникъ, состоящій изъ безконечнаго числа прамолинейныхъ, безконечно малыхъ сторонъ. Впрочемъ, между *иптезою* и *постулатомъ* нѣкоторые полагають по различію, что иптеза можетъ быть не совсемъ ипчая, какъ случается иногда въ наукахъ Физико-математическихъ, между тѣмъ какъ постулаты, по опредѣленію

своему, означаетъ предположеніе, справедливость котораго не подвержена никакому сомнѣнію.

DEMI, HEMI, SEMI. ПОЛУ. Это слово употребляется слѣдственно съ другими, и въ такомъ случаѣ означаетъ половину той величины, которую называютъ. И такъ, говорится: *semi-diamètre, hémisphère, parab. le semi-cubique; полу-диаметръ, полушаріе, полу-кубическая парабола*, или, что все равно, *кубическая парабола второй степени*. Смол. CUBIQUE (PARABOLE). Впрочемъ слова *hemi* и *semi* употребляются весьма рѣдко.

DEMI-CERCLE. (Геом.) Полу-кругъ. Пространство, ограниченное съ одной стороны полу-окружностью круга, а съ другой его перпендикуляромъ.

DEMI-DIAMÈTRE. (Геом.) Полу-поперечникъ, полу-диаметръ, радіусъ. Смол. DIAMÈTRE.

DEMI-ORDONNÉES. Не упот. (Геом.) Полу-ординаты. Подъ этимъ наименованіемъ прежде математиками разумѣли линіи, называемыя нынѣ *ординатами*. Смол. COORDONNÉES.

DEMI-PARABOLE. Не упот. (Геом.) Полу-парабола. Такъ называли некоторые ашторы кривыя линіи, опредѣляемыя уравненіемъ вида $y^m = px^{m-1}$, напр. $y^2 = px^2$, $y^4 = px^3$, и проч. — Нынѣ полу-параболой, полу-эллипсомъ и проч. называютъ половину парабола, эллипса, и вообще кривой, раздѣленной своею осью на двѣ части равныя.

DEMI-CERCLE или **RAPPORTEUR. ТРАНС-ПОРТИРЪ.** Инструментъ для нанесенія какихъ нибудь угловъ на бумагу. Смол. RAPPORTEUR.

DEMI-CROIX. ПОЛУ-КРЕСТЬ. Инструментъ, бывшій въ употребленіи у Голландцевъ для опредѣленія высоты свѣтила на морѣ. Полу-крестъ не иное что какъ половина такъ называемаго *геометрическаго креста*.

DÉMONSTRATION. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, ДО-ВОДЪ. Умствование, посредствомъ котораго основываясь на истинахъ очевидныхъ справедливости какого либо предположенія. Впрочемъ, нынѣ необходимосн восходить во всякомъ случаѣ до первоначальныхъ аксіомъ: достаточно привести доказательство какого либо предположенія къ истинѣ, предварительно доказанной,

то есть, выводимой непосредственно изъ сихъ аксіомъ, или основанной на предположеніяхъ, которыя сами происходятъ изъ первоначальныхъ истинъ. Такимъ образомъ мы значительно сокращаемъ доказательства, не нарушая ихъ строгости, ибо, опъ вспомогательныхъ предположеній всегда можно дойти до истинъ первоначальныхъ.

Всякое доказательство имѣетъ основаніемъ одно изъ слѣдующихъ трехъ началъ: 1°. *Начало противорѣчія и тождества* (*principe de contradiction et d'identité*). 2°. *Начало исключенія* (*principe d'exclusion*) и 3°. *Начало достаточной причины* (*principe de la raison suffisante*). Мы не будемъ останавливаться на разборъ сихъ началъ: подробно-сти по сему предмету принадлежатъ къ Логикѣ. Скажемъ только, что въ *Чистой Математикѣ* и въ *Геометріи* употребляются доказательства, основанныя на первыхъ двухъ началахъ, а въ *Прикладной* пользуются иногда и началомъ достаточной причины. Древніе геометры основывали свои доказательства почти исключительно на началѣ противорѣчія. Смол. ABSURDE (REDUCTION A L').

DÉMONSTRATION A PRIORI. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО A PRIORI; доказательство отъ перваго. Когда, принявъ за точку отправленія первоначальными аксіомы, или уже доказанныя истины, выводимъ справедливости какого либо предположенія, то такой способъ умствования называется доказательствомъ *a priori*. И такъ, доказательство *a priori*, собственно говоря есть *синтетическое*.

DÉMONSTRATION A POSTERIORI. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО A POSTERIORI; доказательство отъ послѣдняго. Когда принимаемъ за точку отправленія ту истину, которую имѣемъ въ виду доказать, и чрезъ рядъ вѣрныхъ и равнообъемлющихъ заключеній доходимъ до другой истины, уже доказанной, или до первоначальныхъ аксіомъ, то такой способъ умствования называется доказательствомъ *a posteriori*. Можетъ также случиться, что принявъ за точку отправленія доказываемую истину, и выводъ изъ нея рядъ вѣрныхъ и равнообъемлющихъ съ нею другихъ истинъ, дойдемъ наконецъ до слѣдствія, раздѣляющагося на несколько предположеній, которыя, влѣтны въ совокупности, равнообъем-

люди съ этихъ слѣдствіемъ. Если каждое изъ упомянутыхъ предположеній приводить къ первоначальнымъ аксіомамъ или къ истиннымъ, уже доказаннымъ, то мы въ правѣ будемъ заключать о справедливости предположенной истины, то есть той, которую имѣли въ виду доказашь. Такое доказательство будетъ также *a posteriori*. Изъ этого опредѣленія видно, что доказательства *a posteriori* принадлежатъ къ числу *аналитическихъ*.

Объяснимъ прихотью сказанное здѣсь о доказательствахъ *a priori* и *a posteriori*. Если бы мыли въ виду доказать *законъ всеобщаго тяготѣнія*, то представились бы на этопо конецъ два способа: 1°. Можно было принять за точку опирающіяся при закона Кеплера, изъ которыхъ, посредствомъ непрерывнаго ряда заключеній, вывели бы выраженіе для ускорительной силы, удерживающей планету въ ихъ орбитѣ. Такимъ образомъ мы доказали бы *a priori* Ньютоновъ законъ. 2°. Можно также допустить этопо законъ, и потомъ выводили изъ него слѣдствія; когда же въ числѣ этихъ слѣдствій найдемъ при закона Кеплера, принимаемыя за неопровержимыя истины, доказанныя наблюденіями, и когда сверхъ того докажемъ, что никакой другой законъ припизанія не приведетъ къ упомянутымъ истинамъ, то въ правѣ будемъ заключить о справедливости первоначальнаго предположенія, то есть, закона всеобщаго тяготѣнія. Такое доказательство будетъ *a posteriori*.

DÉMONSTRATION DIRECTE. Прямое доказательство. Доказательство, происходящее изъ самой сущности разсматриваемаго предмета.

DÉMONSTRATION INDIRECTE. Не прямое доказательство. Доказательство, основанное на истинѣ, являющейся въ разсматриваемаго предмета. Къ этому роду принадлежатъ *доводы къ неистинности*. Для другихъ подробностей объ этомъ предметѣ, описанномъ читателемъ въ статьяхъ: *ANALYSE, EXCLUSION (MÉTHODE D'), EXHAUSTION (MÉTHODE D'), INDIVISIBLES (MÉTHODE DES), INDUCTION, SYNTHÈSE* и проч.

DÉMONSTRATION PAR L'ABSURDE или **DÉMONSTRATION A L'IMPOSSIBLE.** Смот. **ABSURDE (RÉDUCTION A L')**.

DÉMONSTRATION MÉCANIQUE Механиче.

скомъ доказательство. Когда посредствомъ приличныхъ инструментовъ, или геометрическими способами, подтвердятъ справедливости какого либо предположенія, то говоримъ, что доказали *механически* это предположеніе. Напримеръ, если въ прехъ угловъ преугольника, одинъ и тѣмъ же радіусомъ, опишемъ дуги, измѣряющія углы этого преугольника, и потомъ, посредствомъ хорды, нанесемъ эти три дуги на окружности круга, тѣмъ же радіусомъ описаннаго, то увидимъ, что совокупность прехъ дугъ составитъ полу-окружность; отсюда заключаемъ, что сумма прехъ угловъ преугольника равна двумъ прямымъ угламъ. Равнымъ образомъ, доказываемъ *механически* законы паденія тяжѣлыхъ тѣлъ посредствомъ *Атвудовой машинки* Смот. **ATWOOD (MACHINE D')**. Само собой разумеется, что механическія доказательства въ чистомъ Анализѣ и въ Геометріи ни въ какомъ случаѣ не могутъ быть допущены.

DÉMONTER. (Прикл. Мех.) **РАЗБИРАТЬ.** Говоримся преимущественно о машинахъ, составленныхъ изъ частей неспалическихъ. *Démonter une montre; разобрать часы.* Смот. **DÉSASSEMBLER**.

DÉMONSTRER. **ДОКАЗАТЬ.** Смот. **DÉMONSTRATION**.

DÉNAIRE (ARITHMÉTIQUE). Смот. **ARITHMÉTIQUE**.

DENDROMÈTRE. (Практ. Геом.) **ДЕНДРОМЕТРЪ, ДРЕВОМѢРЪ.** Инструментъ посредствомъ котораго измѣряютъ самымъ простымъ образомъ высоты и діаметры деревьевъ. Дендрометръ употребляется также для измѣренія высотъ и разстояній, доступныхъ и недоступныхъ.

DENIER. **ОДНОПРОЦЕНТЫЙ КАПИТАЛЪ.** Капиталъ, съ котораго получается одинъ процентъ. *L'intérêt est à 20 deniers; одинъ процентъ съ 20,* или, что все равно, *5 pourcent sur 100.* Смот. **INTÉRÊT**.

DÉNOMINATEUR. (Ариф.) **ЗНАМЕНАТЕЛЬ.** Знаменателемъ дроби называется число, означающее на сколько частей, по предположенію, раздѣлена единица. Смот. **FRACTION.** *Réduire des fractions au même dénominateur* или *à même dénomination; привести дроби къ одному или къ общему знаменателю.*

DÉNOMINATEUR D'UN RAPPORT или **RAISON**

Не упот. Знаменатель содержания. Смот. RAPPORT.

DÉNOMINATION. Не упот. То же что DÉNOMINATEUR (Смот.). — **ВИДЪ.** Une quantité présentée sous deux dénominations différentes; количество представленное в двух различных видах. Смот. FORME.

DÉNOMINÉS (NOMBRES). (Архе.) Не упот. **ИМЕНОВАННЫМЪ ЧИСЛА.** Смот. COMPLEXE.

DENSITÉ. Мех.) **ПЛОТНОСТЬ.** Частное, получаемое чрезъ раздѣленіе массы какого ни есть тѣла на его объемъ, называется *среднею плотностію* (densité moyenne) этого тѣла. Если, вмѣсто всего тѣла, будемъ разсматривать только какую нибудь часть его, то получимъ среднюю плотность этой части. Напротивъ, если предположимъ, что разсматриваемая частичка тѣла дѣлается безконечно малюю, то частное, о которомъ идетъ рѣчь, изобразитъ среднюю плотность частички. Для другой, безконечно малой же частички, плотность будемъ также другая, и вообще она измѣняется при переходѣ отъ одной частички тѣла къ другой. Пусть будутъ dm, dm', dm'', \dots массы безконечно малыхъ частицъ, составляющихъ тѣло, а dv, dv', dv'', \dots объемы этихъ самыхъ частицъ; плотности сихъ послѣднихъ выразятся соотвѣстственно чрезъ $\frac{dm}{dv}, \frac{dm'}{dv'}, \frac{dm''}{dv''}, \dots$ Если означимъ чрезъ M массу всего тѣла, а чрезъ V объемъ его, то дробь

$$\frac{dm + dm' + dm'' + \dots}{dv + dv' + dv'' + \dots} = \frac{M}{V}$$

изобразитъ *среднюю плотность* тѣла, а это названіе весьма свойственно, ибо дробь $\frac{M}{V}$ действительно выражаетъ среднюю между дробями $\frac{dm}{dv}, \frac{dm'}{dv'}, \frac{dm''}{dv''}, \dots$ Когда всѣ эти дроби равны между собою, то тѣло принималось названіе *однороднаго*; въ такомъ случаѣ средняя его плотность, одинаковая для всѣхъ составляющихъ частицъ, называется просто *плотностію*. Изъ этого слѣдуетъ, что за плотность тѣла однороднаго можно принять массу единичнаго его объема. Читатели найдутъ почти во всѣхъ трактатахъ о физикѣ таблицы, показывающія численныя значенія этой массы для многихъ

однородныхъ веществъ. Чтобы найти массу какого ни есть объема, споможъ только помножить на число, которое изображаетъ эту объѣмъ, показаніе таблицы, соотвѣствующее разсматриваемому веществу. Смот. MASSE, PESANTEUR SPÉCIFIQUE.

DENT. (Мех.) **ЗУБЕЦЪ.** Зубцами называются выдающіяся части, которыми усажены ободъ колеса, а промежутки между зубцами именуется *тадинами* (creux de la roue). Самое же колесо въ такомъ случаѣ принимаетъ названіе *зубчатого* (roue dentée). Къ валу (arbre, axe) колеса A (черт. 8 Листъ VII) обыкновенно прикрѣпляется наглухо другое зубчатое колесо a , меньшаго размѣра, именуемое *шестернею* (ignon); зубцы шестерни называются *кулаками*, а иногда *крыльями* (ailes). Кулаки шестерни, задыная за зубцы втораго колеса B , сообщаютъ ему послѣднему вращательное движеніе около его оси, и такъ далѣе.

Пусть будутъ P и Q двѣ силы, приложенныя къ разсматриваемой системѣ зубчатыхъ колесъ. Положимъ, что сила P направляется по касательной MT (черт. 8) къ первому колесу, а Q дѣйствуетъ посредствомъ веревки, навѣвающейся на валъ послѣдняго колеса. Для равновѣсія этихъ двухъ силъ, сила P должна относиться къ сопротивленію Q , какъ произведеніе радиусовъ всѣхъ шестеренъ a, b, c, \dots къ произведенію радиусовъ всѣхъ колесъ A, B, C, \dots Смот. TOUR.

И такъ, когда имѣемъ нѣч колесъ, какъ означено на чертѣ 8, то для равновѣсія сила P и Q должны быть

$$P \cdot Q : rr' : :: RR'R''$$

или

$$P = Q \cdot \frac{rr'}{RR'R''}$$

гдѣ r, r' и r'' соотвѣстственно изображаютъ радиусы круговъ a, b и c , а R, R' и R'' радиусы колесъ A, B и C .

Въ большихъ машинахъ употребляютъ часто вѣсно шестеренъ *барабанъ* (lanternes). На чертѣ 9 (Листъ VII), CD изображаетъ барабанъ, который состоитъ изъ нѣсколькихъ жердочекъ, называемыхъ *ульками* (fuseaux); онѣ параллельны между собою, и скрѣплены посредствомъ двухъ кружковъ m и n . Цѣвка барабана, при его обращеніи около оси EF , задвѣиваетъ за зубья

колеса *AB*, которое шакимъ образомъ и приводится въ движеніе. Смол. *ALUCHONS*.

Зубчатые колеса употребляютъ въ болѣе части машинъ, гаприжър въ мельницахъ, часахъ и проч. Главное назначеніе зубчатыхъ колесъ состоятъ въ томъ, чтобы передать вращательное движеніе другому колесу и въѣсти съ нѣмъ измѣнить угловую его скорость. Для дальнѣйшихъ подробностей описываемъ къ спашьямъ: *ENGRENAGES*, *(THEORIE DES)*, *TOUR*.

DENTÉ. (Мех.) **ЗУБЧАТЫЙ.** *Roue dentée; зубчатое колесо.* Смол. *DENT*, *ROUE*.

DÉPASSER. **ПРЕВЫШАТЬ, ПРЕВОСХОДИТЬ.**

L'équation finale ne dépassera pas le cinquième degré; окончательное уравненіе будетъ не выше пятой степени.

DÉPENDANCE. **ЗАВИСИМОСТЬ, ПОДЧИНЕННОСТЬ.**

Ces deux quantités sont dans une dépendance mutuelle; между силъ двуиъ количествами существуетъ взаимная зависимость, подчиненность.

DÉPENDANTE (VARIABLE). (Анал.) **ПЕРЕМѢННАЯ ЗАВИСИМАЯ.**

Когда перемѣнныя величины связаны между собою такъ, что по данной одной или нѣсколькимъ изъ нихъ, всѣ остальные величины опредѣляются, то сіи послѣднія называются *перемѣнными или зависимыми*. И такъ, въ уравненіи $z = f(x, y)$, величина z можетъ быть принимаема за *перемѣнную зависимую*, ибо она зависитъ отъ численныхъ значеній, приписываемыхъ извѣстнымъ величинамъ x и y , которыя, въ этомъ случаѣ, называющаея уже *переменными независимыми* (*variables indépendantes*). Смол. *FONCTION, VARIABLE*.

DÉPENDRE. **ЗАВИСѢТЬ.** *Cette quantité dépend de plusieurs autres; эта величина зависитъ отъ нѣсколькихъ другихъ.* Смол. выше.

DÉPENSE. (Гидрав.) **РАСХОДЪ.** *Расходомъ воды называется количество воды, вытекающей въ определенное время изъ водохранилища чрезъ трубку, извѣстнаго діаметра.*

DÉPLACEMENT. (Мех.) **ПЕРЕМѢЩЕНІЕ, ПЕРЕ-**

ДВИЖЕНІЕ. Перемѣщеніе тѣла или матеріальной точки есть перемѣна занимаемаго мѣста эиимъ тѣломъ или точкою; въ такомъ смыслѣ перемѣщеніе одно и то же что движеніе. Премлу-

щесивенно же модъ *перемѣщеніемъ* разумиють движеніе, соопѣствующее весьма малому времени, или, такое движеніе, въ продолженіи котораго переѣнное проспранство весьма мало.

DÉPLACEMENTS ABSOLUS. Абсолютныя перемѣщенія. Движенія, происходящія въ абсолютномъ проспранствѣ, и соопѣствующія весьма малому времени.

DÉPLACEMENTS RELATIFS. Относительныя перемѣщенія. Движенія, соопѣствующія также весьма малому времени, но разсатриваемыя относительно каковаго нѣ есть тѣла, коего положеніе жѣтвенно.

DÉPLACEMENTS VIRTUELS OU POSSIBLES. Возможныя перемѣщенія. Такія перемѣщенія, которыя тѣла системы могутъ получить безъ нарушенія связи, существующей между сими тѣлами. Смол. *VIRTUEL*.

DÉPLACEMENTS IMPOSSIBLES. Невозможныя перемѣщенія. Движенія, несоавѣстныя съ прѣпятствіями, которыя существуютъ въ системѣ.

DÉPLACEMENTS EFFECTIFS OU ACTUELS. Дѣйствительныя перемѣщенія, то есть тѣ, которыя система дѣйствительно имѣетъ. Должно ошлчѣть дѣйствительныя перемѣщенія отъ перемѣщеній возможныхъ: послѣднія могутъ произойти и не отъ силъ, приложенныхъ къ системѣ, а первыя происходятъ всегда отъ силъ, дѣйствующихъ на систему.

DÉPLACEMENTS INSTANTANÉS. Мгновенныя перемѣщенія суть такія передвиженія, которыя происходятъ мгновенно, то есть въ безконечно малый прожезуютокъ времени.

Чпашатели могутъ обратиться къ спашьямъ: *CURVILIGNE (MOUVEMENT), ÉQUILIBRE, FORCE, MOUVEMENT, VIRTUELLES (PRINCIPE DES VITESSES)*, въ которыхъ они увидѣтъ употребленіе сихъ различныхъ родовъ перемѣщеній.

DÉPLACEMENT. (Гидрост.) **ВОДОНЪМѢЩЕНІЕ.**

Количество вытѣсненной воды при погруженіи въ нее каковаго либо тѣла. Въ этомъ смыслѣ говоримъ *водонѣмѣщеніе корабля*.

DÉPLACER. **ВЫТѢСНЯТЬ, ВЫТѢСНЯТЬ.** *Un corps plongé dans un fluide, y perd une partie de son poids, égale au poids du fluide qu'il déplace.*

Тѣло, погруженное въ жидкость, тереть въ ней часть своего веса, равную весу вытѣщенной жидкости.

DÉPRESSION DE L'HORIZON. (Астр.) **ПОНИЖЕНИЕ ГОРИЗОНТА.**

Положимъ что наблюдатель, находящійся выше поверхности моря, направи́ръ на корабль, опредѣляеть высоту светила. Пусть будетъ $FBDG$ (черт. 10 Листъ VII) земная поверхность, A мѣсто наблюденія, а S наблюдаемое светило. Искомый уголъ, то есть высота светила, будетъ EAS , принимая линію AE перпендикулярною къ радіусу земли, или, что всё равно, къ направленію AC . Но наблюдатель, употребляя отражательный углоизмѣрный аппаратъ, опредѣлитъ непосредственно не находящійся уголъ EAS , но уголъ DAS , составленный лучемъ зрѣнія AS , идущимъ къ светилу, и лучемъ AD , касающимся къ предѣлу виднаго горизонта моря, и следовательно касательнымъ въ точкѣ D къ поверхности земной. Уголъ EAD , который должно отнять отъ наблюдаемаго SAD для полученія высоты EAS светила, называется *угломъ пониженія*, или просто *пониженіемъ горизонта* (*angle de dépression de l'horizon*). Для опредѣленія этого угла замѣтимъ, что предположивъ радіусъ земли $BC = r$, возвышеніе наблюдателя $AB = h$, пониженіе горизонта $EAD = \varphi$, получимъ во первыхъ, по причинѣ угла EAC прямого, уголъ $EAD =$ углу ACD , а изъ прямоугольнаго треугольника ACD выведемъ пропорцію

$$\sin \varphi : AD :: \cos \varphi : CD \text{ или } \sin \varphi : \sqrt{AC^2 - CD^2} :: \cos \varphi : CD.$$

Но $AC = r + h$, $CD = r$; следовательно

$$\sin \varphi : \sqrt{(r+h)^2 - r^2} :: \cos \varphi : r,$$

откуда

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{(r+h)^2 - r^2}}{r} = \sqrt{\frac{2h}{r} + \frac{h^2}{r^2}}.$$

Такъ какъ отношеніе $\frac{h^2}{r^2}$ будетъ всегда количествомъ весьма малое по причинѣ незначительности величины h въ разсужденіи радіуса земли r , то отбрасывая это отношеніе, получимъ

$$\tan \varphi = \sqrt{\frac{2h}{r}}.$$

Вотъ формула, опредѣляющая уголъ φ или пониженіе горизонта; но этотъ уголъ долженъ еще быть исправленъ, ибо дѣйствіемъ преломленія свѣта увеличиваются высоты предметовъ

надъ землею поверхностію. И такъ, луть зрѣнія, который по нашему предположенію направляется по прямой AD , опишетъ дѣйствительно кривую Aed , и следовательно уголъ пониженія будетъ не EAD , но EAD' , составленный горизонтальною прямою AE съ касательною AD' къ кривой Aed въ точкѣ A . Найдено изъ наблюдений, что уголъ EAD' , который изобразимъ чрезъ φ' , равенъ $0,929 \times \varphi$. Следовательно, принявъ въ соображеніе, что шагенсы весьма малыхъ угловъ чувствительнымъ образомъ пропорціональны самымъ угламъ, получимъ окончательно

$$\tan \varphi' = 0,929 \sqrt{\frac{2h}{r}}.$$

DÉPRESSION DU MERCURE DANS LE BAROMÈTRE. Пониженіе ртути въ барометрѣ.

DÉRIVATION. ДЕРИВАЦИЯ. ПРОИСХОЖДЕНИЕ. Смол. ниже.

DÉRIVATIONS (CALCUL DES). ДЕРИВАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

Такъ назывъ *Арбогастъ*, профессоръ математики въ Страсбургѣ, придумавшій имъ общій способъ для разложенія въ ряды различныхъ видовъ функций объ одной или несколькихъ переменныхъ. Сочиненіе его подъ заглавіемъ: *Du Calcul des Dérivations, par L. F. Arbogast, à Strasbourg, An VIII (1800)*, in-4^o, содержитъ въ себѣ подробное изложеніе цѣлывъ этого исчисленія и множество весьма примѣчательныхъ приложений, свидѣтельствующихъ о плодovitости и о пользѣ теоріи, о которой говорить. Непонятно почему способъ Арбогаста не имѣлъ общаго успѣха, котораго въ правѣ было ожидать: можетъ быть невниманіе болѣе части математиковъ къ его книгѣ произошло оттого, что она, не смотря на ясное изложеніе, по многочисленности новыхъ знаменитостей, требовала тщательнаго изученія, а следовательно и не мало времени.

Чтобы объяснить сущность Деривационнаго Исчисленія приводимъ здѣсь слова Арбогаста, которыми замѣствуемъ изъ его предисловія къ упомянутому выше сочиненію:

„Чтобы составить себѣ понятіе о деривацияхъ, замѣтимъ, что количества или функции, выводимыя одни изъ другихъ посредствомъ единопобразныхъ дѣйствій, суть количества произвольныя: наковы, напримеръ, послѣдовательные

дифференциалы. Можно распространить это понятие рассматривая количества, выводимые одни из других не относительно их значений, но только в рассуждении действий, которые соединяют и связывают их, при чем самая количественная предполагаемая произвольная, независимыми между собою. И такъ, допуская, что изъ нескольких различных буквъ, только первая входитъ въ некоторую функцию, между ними какъ двѣ первыя входятъ известнымъ образомъ въ ея производную, при первомъ, но по тому же закону, въ производную этой производной, и такъ далѣе, получимъ производныя функций въ томъ обширномъ смыслѣ, въ которомъ я разумѣю ихъ. Здѣсь уже количества, изображенныя различными буквами, не производятся одни отъ другихъ; я рассматриваю производныя преимущественно въ смыслѣ производныхъ отъ действий, чѣмъ производныхъ отъ количествъ. Подобнымъ образомъ и Алгебра занимается болѣе действиями, которые должны быть произведены надъ величинами, нежели самыя вычисленія этихъ величинъ."

"Деривация есть действие, посредствомъ котораго выводятъ производную изъ предшествующей ей, или изъ функции. Способъ Дериваций состоитъ вообще въ опредѣленіи закона, который связываетъ между собою различные совокупленія какихъ нѣ естъ количествъ, и въ его употребленія для перехода отъ одной производной къ другой."

Чтобъ ознакомить сколько нибудь нашихъ читателей съ самыми приемами Деривационнаго Исчисления, предлагаемъ въ самомъ краткомъ видѣ нѣкоторыя изъ основныхъ его началъ; при этомъ изложеніи будемъ придерживаться первой главы сочиненія Арбогаста.

§ 1. Пусть будетъ $f(a+x)$ какая нѣ естъ функция двучленного количества $a+x$. Известно, что получился рядъ вида

$$(1) \quad f(a+x) = a + bx + \frac{c}{1.2} x^2 + \frac{d}{1.2.3} x^3 + \frac{e}{1.2.3.4} x^4 + \text{и проч.}$$

въ которомъ $a = f(a)$, b выводится изъ a или $f(a)$, c изъ b , d изъ c и проч. по одному и тому же закону. И такъ, зная какимъ образомъ b выводится изъ a или изъ $f(a)$, мы будемъ въ состояніи вывести c изъ b , d изъ c и проч.

Если изобразимъ характеристикою D действие,

которое должно произвести надъ $f(a)$ чтобъ получить b , то очевидно будетъ $b = Df(a)$, $c = DDf(a) = D^2f(a)$, $d = D^3f(a)$ и проч. Следовательно рядъ (1) можетъ быть представленъ въ видѣ.

$$(2) \quad f(a+x) = f(a) + \frac{Df(a)}{1} x + \frac{D^2f(a)}{1.2} x^2 + \frac{D^3f(a)}{1.2.3} x^3 + \dots$$

Но мы знаемъ [См. Т. TAYLOR (THÉORÈME DE)], что приравъ a [за переименуя, имѣемъ

$$Df(a) = \frac{df(a)}{da}, D^2f(a) = \frac{d^2f(a)}{da^2}, D^3f(a) = \frac{d^3f(a)}{da^3}, \text{ и пр}$$

гдѣ da изображаетъ произвольную постоянную величину. Приравъ $da = 1$, получимъ просто $Df(a) = df(a)$, $D^2f(a) = d^2f(a)$, $D^3f(a) = d^3f(a)$,... а отсюда заключаемъ, что правила для опредѣленія дериваций въ томъ случаѣ, который рассматривается теперь, одинаковы съ правилами для дифференцированія.

Для разложенія функции $f(a+x)$ стоитъ только измѣнить x въ βx въ уравн. (2), въ слѣдствіе чего получимъ

$$(3) \quad f(a+\beta x) = f(a) + \frac{Df(a)\beta}{1} x + \frac{D^2f(a)\beta^2}{1.2} x^2 + \frac{D^3f(a)\beta^3}{1.2.3} x^3 + \dots$$

Въ этомъ разложеніи можно рассматривать степень β какъ бы происшедшимъ отъ действий, произведенныхъ надъ функцией $f(a)$. Действительно, положимъ что a естъ такая функция $f(a)$ переименуя a , что $df(a) = \beta$, а $da = 1$; въ такомъ предположеніи $Df(a)$ обратится въ $\frac{df(a)}{da} \cdot \frac{da}{da} = \frac{df(a)}{da} df(a) = Df(a)$. Но такъ какъ, по приравъ $da = 1$, имѣемъ $Df(a) = df(a) = \beta$ и $D^2f(a) = d^2f(a) = 0$, то стоитъ только взять $f(a) = \beta a$, разумѣя подъ β величину постоянную.

Чтобъ омычлить это новое состояніе дериваций $Df(a)$ отъ первого, въ которомъ $da = 1$ и $D = d$, Арбогастъ ставитъ точку послѣ буквъ D ; и такъ $D.f(a) = Df(a)$. Въ слѣдствіе этого условія $D.f(a)$ будетъ производная отъ функции $f(a)$, въ которой a принимается за переименуя, имѣющую свою производную $D.a = \beta = df(a)$; что касается до заключенія $Df'a$, безъ точки послѣ D , то оно изображаетъ производную отъ $f(a)$, гдѣ a принимается также за переименуя, производная которой равна $D.a = 1 = d$.

Если надъ деривациею $Df(a) = Df(a) \cdot D.a = Df(a) \cdot 1$ произведемъ то же дѣйствіе, какое произвели надъ функциею $f(a)$, то положивъ $D.a = 1$ постояннымъ, получимъ $D^2f(a) = D(Df(a) \cdot D.a) = D^2f(a) \cdot (D.a)^2 = D^2f(a) \cdot 1^2$; точно такимъ образомъ найдемъ $D^3f(a) = D(D^2f(a) \cdot (D.a)^2) = D^3f(a) \cdot (D.a)^3 = D^3f(a) \cdot 1^3$, и такъ далѣе. Слѣдовательно рядъ (5) приметъ видъ

$$f(a) + \frac{Df(a)}{1}x + \frac{D^2f(a)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{D^3f(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

§ 2. Чтобы перейти отъ разложенія функций двучленныхъ количествъ къ многочленнымъ, возьмемъ функцию q объяснить частней уравненіемъ (4); получимъ

$$qf(a+x) = q\left(f(a) + \frac{Df(a)}{1}x + \frac{D^2f(a)}{1 \cdot 2}x^2 + \dots\right),$$

и, сверхъ того, подставивъ въ формулу (4) qf вмѣсто f ,

$$qf(a) + \frac{Dqf(a)}{1}x + \frac{D^2qf(a)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{D^3qf(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

И такъ, положивъ $f(a) = a$, $Df(a) = D.a$, $D^2f(a) = D^2.a$ и проч. получимъ

$$(5) \left\{ \begin{aligned} q\left(a + \frac{D.a}{1}x + \frac{D^2.a}{1 \cdot 2}x^2 + \dots\right) \\ = q(a) + \frac{Dq(a)}{1}x + \frac{D^2q(a)}{1 \cdot 2}x^2 + \dots \end{aligned} \right.$$

Остается только разложить дериваціи.... $Dq(a)$, $D^2q(a)$, $D^3q(a)$ Для этого вспомнимъ, что $Dq(a) = Df(a) \cdot D.a$; но такъ какъ въ настоящемъ случаѣ $D^2.a$, $D^3.a$,.... не равны нулю, то дериваціи $D^2q(a)$, $D^3q(a)$,.... не будутъ соотвѣтственно равны величинамъ.... $D^2q(a) \cdot (D.a)^2$, $D^3q(a) \cdot (D.a)^3$,....; къ этимъ членамъ должно еще прибавить другіе, происходящіе отъ извѣстности деривацій $D.a$, $D^2.a$ и проч.

Для опредѣленія $D^2q(a)$ надобно произвести надъ $Dq(a) = Df(a) \cdot D.a$ то самое дѣйствіе, какое производили надъ функциею $f(a)$, когда выводили изъ нея $Dq(a)$, принимая при томъ $D^2.a$ за производную отъ $D.a$. Но такъ какъ правила для нахождения деривацій и для дифференціаловъ одинаковы, то и получимъ:

$$\begin{aligned} D^2q(a) &= D(Dq(a) \cdot D.a) \\ &= Dq(a) \times D(D.a) + D(Dq(a)) \times D.a \\ &= Dq(a) \cdot D^2.a + D^2q(a) \cdot (D.a)^2; \end{aligned}$$

подобнымъ образомъ найдемъ:

$$\begin{aligned} D^3q(a) &= D(D^2q(a) \cdot (D.a)^2) \\ &= D\{D^2q(a) \cdot D^2.a + D^2q(a) \cdot (D.a)^2\} \\ &= D^3q(a) \cdot D^2.a + D^2q(a) \cdot D.a \cdot D^2.a \\ &\quad + D^2q(a) \cdot 2D.a \cdot D^2.a + D^3q(a) \cdot (D.a)^3 \\ &= D^3q(a) \cdot D^2.a + 3D^2q(a) \cdot D.a \cdot D^2.a + D^3q(a) \cdot (D.a)^3; \end{aligned}$$

и такъ далѣе.

Изъ этого легко усмотрѣть, что коэффициенты послѣдовательныхъ степеней x во второй части уравненія (5) происходятъ одинъ изъ другихъ и изъ перваго члена $q(a)$ по одному и тому же закону. Этому законъ, собственно говоря, одинаковъ съ тѣмъ, по которому составляются послѣдовательные члены разложенія функции $f(a+x)$; одно только различіе, что въ $f(a+x)$ производная $D.a = 1$, между тѣмъ какъ въ разсмотрѣнномъ нами случаѣ производная $D.a$ есть величина переменная, которой производная равна $D^2.a$, и проч.

§ 3. Положимъ теперь что ищемъ функцию q многочленного выраженія

$$a + bx + \frac{c}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{d}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \text{и проч.},$$

въ которомъ ни b не зависитъ отъ a ни c отъ b , ни d отъ c , и гдѣ, однимъ словомъ, всѣ коэффициенты a , b , c , d ,.... изображаютъ количества совершенно произвольныя. Если вообразимъ что величины a , b , c , d ,.... произвольныя одѣ отъ другихъ, то получимъ какъ и выше

$$(6) \left\{ \begin{aligned} q\left(a + bx + \frac{c}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{d}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots\right) \\ = q(a) + Dq(a) \cdot x + \frac{D^2q(a)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{D^3q(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \end{aligned} \right.$$

съ тѣмъ условіемъ, чтобы по составленіи деривацій $Dq(a)$, $D^2q(a)$, $D^3q(a)$,.... переименовъ $D.a$ на b , $D^2.a$ на c , $D^3.a$ на d и проч.

Дѣйствительно, вторая часть уравн. (6), до подстановленія b на мѣсто $D.a$, c на мѣсто $D^2.a$, d на мѣсто $D^3.a$,.... равна второй части уравн. (5); но, по разложеніи деривацій $Dq(a)$, $D^2q(a)$, $D^3q(a)$,... въ той формулѣ (5), получимъ шожестественное уравненіе, то есть такое, въ которомъ деривація $D.a$, $D^2.a$, $D^3.a$,... могутъ быть принимаемы независимыми между собою, почему и можно будетъ въ уравн. (5), по составленіи деривацій, написать b вмѣсто $D.a$, c вмѣсто $D^2.a$, d вмѣсто $D^3.a$, и проч. И такъ получимъ слѣдующую теорему:

Изобразимъ чрезъ a, b, c, d, \dots какія ни есть количества, и положимъ что требуется разложить функцию

$$q\left(a + bx + \frac{c}{1.2}x^2 + \frac{d}{1.2.3}x^3 + \dots\right)$$

въ рядъ вида

$$A + Bx + \frac{C}{1.2}x^2 + \frac{D}{1.2.3}x^3 + \dots + \frac{A_n}{1.2.3\dots n}x^n + \text{и пр.}$$

Коэффициенты A, B, C, D, \dots этого разложения определяются слѣдующими формулами:

$$A = q(a), B = D_1 q(a), C = D_2 q(a), D = D_3 q(a), \dots$$

и вообще $A_n = D^n q(a)$, съ тѣми условіями, что бы по разложению сихъ дериваций въ предположеніи $D a, D^2 a, \dots$ перемѣнились, поставили b на мѣсто $D a$, c на мѣсто $D^2 a$ или $D b$, d на мѣсто $D^2 a$ или $D c$, и проч.

§ 4. Чаше случается, что многочленное выражение представляется въ видѣ

$$a + f x + x^2 + \lambda x^3 + \dots + c_n x^n + \text{и проч.}$$

то есть, безъ численныхъ коэффициентовъ

$$\frac{1}{1.2}, \frac{1}{1.2.3}, \frac{1}{1.2.3.4}, \dots; \text{ въ такомъ случаѣ должно предположить}$$

$$q(a + f x + x^2 + \lambda x^3 + \dots + c_n x^n + \text{и проч.})$$

$$= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots + A_n x^n + \text{и проч.}$$

Опредѣленіе коэффициентовъ A, B, C, D, \dots

не представляя никакаго затрудненія: дѣй-

ствительно, мы приводимъ предыдущій рядъ къ преждевзвѣсному положенію

$$\gamma = \frac{f}{1.2}, \delta = \frac{\lambda}{1.2.3}, \dots, c_n = \frac{a'_n}{1.2.3\dots n},$$

$$C = \frac{C'}{1.2}, D = \frac{D'}{1.2.3}, \dots, A_n = \frac{A'_n}{1.2.3\dots n},$$

въ слѣдствіе чего онъ приметъ видъ

$$q\left(a + f x + \frac{f'}{1.2}x^2 + \frac{f''}{1.2.3}x^3 + \dots + \frac{a'_n}{1.2.3\dots n}x^n + \text{и проч.}\right)$$

$$= A + Bx + \frac{C'}{1.2}x^2 + \frac{D'}{1.2.3}x^3 + \dots$$

$$+ \frac{A'_n}{1.2.3\dots n}x^n + \text{и проч.}$$

Опредѣливъ величины $A, B, C', D', \dots, A'_n$ по обыкновеннымъ выше правиламъ, и подставляя попомню

$$1.2 f \text{ мѣсто } f', 1.2.3 \delta \text{ мѣсто } f'', \dots, 1.2.5\dots n c_n \text{ мѣсто } a'_n$$

$$1.2 C \text{ мѣсто } C', 1.2.3 D \text{ мѣсто } D', \dots, 1.2.5\dots n A_n \text{ мѣсто } A'_n$$

получимъ разложеніе функции $q(a + f x + x^2 + \dots)$.

Можно также поступить другимъ образомъ: прямо искать дериваций $D_1 q(a), D^2 q(a), D^3 q(a), \dots$ и попомню подставляя въ нихъ

$$\beta \text{ мѣсто } D a, 1.2 \gamma \text{ мѣсто } D^2 a,$$

$$1.2.3 \delta \text{ мѣсто } D^3 a, \dots, 1.2.3\dots n c_n \text{ мѣсто } D^n a,$$

$$B \text{ мѣсто } D A, 1.2 C \text{ мѣсто } D^2 A,$$

$$1.2.3 D \text{ мѣсто } D^3 A, \dots, 1.2.5\dots n A_n \text{ мѣсто } D^n A.$$

Легко усмотрѣть, что если будемъ вычислять послѣдовательно коэффициенты A, B, C, D, \dots , дѣлая въ то же время сокращенія, то надобно будетъ подставить

$$\beta \text{ мѣсто } D a, 2 \gamma \text{ мѣсто } D \beta,$$

$$3 \delta \text{ мѣсто } D \gamma, \dots, n c_n \text{ мѣсто } D a_{n-1}$$

$$B \text{ мѣсто } D A, 2 C \text{ мѣсто } D B,$$

$$3 D \text{ мѣсто } D C, \dots, n A_n \text{ мѣсто } D A_{n-1}.$$

Что касается до правилъ для опредѣленія дериваций $D_1 q(a), D^2 q(a), D^3 q(a)$ и проч., то они, для разсмотрѣннаго нами случая, совершенно одинаковы съ правилами, по которымъ находятъ дифференціалы $d q(a), d^2 q(a), d^3 q(a)$ и проч. въ предположеніи количества a и послѣдовательныхъ его дифференціаловъ $d a, d^2 a, d^3 a, \dots$ перемѣнныхъ. Если сверхъ этого замѣтимъ, что деривации, означаемыя характеристическою D безъ точки, то есть заключенія $D f(a), D^2 q(a), D^3 f(a), \dots$, соответственно изображаютъ выраженія $d f(a), d^2 q(a), d^3 q(a), \dots$, въ которыхъ da принимается за единицу, то получимъ

$$D_1 q(a) = D f(a) \times D a$$

$$D^2 f(a) = D f(a) \times D^2 a + D^2 f(a) \times (D a)^2$$

$$D^3 q(a) = D f(a) \times D^3 a + 3 D^2 f(a) \times D a \times D^2 a + D^3 q(a) \times (D a)^3$$

или, написавъ β мѣсто $D a, 1.2 \gamma$ мѣсто $D^2 a, 1.2.3 \delta$ мѣсто $D^3 a, \dots$

$$(7) \begin{cases} D f(a) = D f(a) \cdot \beta \\ D^2 q(a) = D f(a) \cdot 1.2 \gamma + D^2 f(a) \cdot \beta^2 \\ D^3 q(a) = D f(a) \cdot 1.2.3 \delta + 3 D^2 f(a) \cdot \beta \cdot (1.2 \gamma)^2 + D^3 q(a) \cdot \beta^3 \end{cases}$$

Первый членъ $q(a)$, изъ котораго выводится всѣ послѣдующіе, Арбогастъ называетъ началомъ дериваций (origine des dérivations)

§ 5. Для объясненія приведенныхъ здѣсь правилъ Деривационнаго Печисленія, предлагается нѣсколько примѣровъ.

Примарь I. Разложим логарифмическую функцию

$$\log(a + \epsilon x + x^2 + \epsilon x^3 + \epsilon x^4 + \dots)$$

въ рядъ вида

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots$$

Если положимъ $x=0$, то найдемъ $A = \log a$; изъ этого перваго члена, на основаніи сказаннаго въ §§ 3 и 4, выводимъ послѣдовательные коэффициенты B, C, D, E, \dots . Возьмъ подробности этихъ вычисленій:

$$A = \log a$$

$$B = D \log a = \frac{D \cdot a}{a} = a^{-1} \cdot \beta$$

$$2C = D \cdot (a^{-1} \cdot \beta) = a^{-1} \cdot 2\beta - a^{-2} \cdot \beta^2, \text{ откуда}$$

$$C = a^{-1} \cdot \gamma - \frac{a^{-2} \cdot \beta^2}{2}; \text{ взявъ деривацію, получимъ}$$

$$5D = a^{-1} \cdot 5\delta - a^{-2} \cdot 3\gamma - \frac{a^{-3}}{4} \cdot 2\beta \cdot 2\gamma + \frac{3a^{-3}}{2} \cdot \beta \cdot \beta^2,$$

или, по сокращеніи

$$D = a^{-1} \cdot \delta - \frac{a^{-2}}{2} \cdot 2\gamma + \frac{a^{-3}}{8} \cdot \beta^2; \text{ взявъ опять деривацію, найдемъ}$$

$$4E = a^{-1} \cdot 4\epsilon - a^{-2} \cdot 3\delta - \frac{a^{-3}}{2} (2\gamma \cdot 3\delta + 2\beta \cdot \gamma^2)$$

$$+ \frac{3a^{-3}}{2} \cdot \beta \cdot 2\gamma + \frac{a^{-4}}{8} \cdot 3\beta^2 \cdot 2\gamma - \frac{3a^{-4}}{8} \cdot \beta^4,$$

откуда по сокращеніи,

$$E = a^{-1} \cdot \epsilon - \frac{a^{-2}}{2} (2\gamma \delta + \gamma^2) + \frac{a^{-3}}{8} \cdot 5\gamma^2 - \frac{a^{-4}}{4} \cdot \beta^4,$$

и такъ далѣе. Если положимъ $\gamma = \delta = \epsilon = \dots = 0$, то получимъ

$$(8) \log(a + \epsilon x) = \log a + \frac{\beta x}{a} - \frac{\beta^2 x^2}{2a^2} + \frac{\beta^3 x^3}{3a^3} - \dots \text{ и проч.}$$

Этотъ же способъ приводить самымъ простымъ образомъ къ опредѣленію коэффициентовъ A, B, C, D, E, \dots въ *возвратномъ видѣ* (*en termes récurrents*), то есть помощью формулъ, заключающихъ въ себѣ коэффициенты, предшествующіе тому, который опредѣляется. Въ напомнимъ случаѣ имѣемъ $A = \log a$, откуда

$$D \cdot A = \frac{D \cdot a}{a} \text{ или } B = \frac{\beta}{a}. \text{ И такъ, получимъ}$$

$$A = \log a;$$

$$Ba = \beta;$$

взявъ деривацію, найдемъ

$$2Ca + B = 2\gamma;$$

или

$$Ca + \frac{1}{2}B = \gamma;$$

$$5Da + C\gamma + \frac{1}{2}2C\gamma + \frac{1}{2}B \cdot 2\gamma = 3\delta,$$

или

$$D\alpha + \frac{1}{2}C\gamma + \frac{1}{4}B\gamma = \delta;$$

$$4E\gamma + D\gamma + \frac{1}{2}5D\gamma + \frac{1}{2}C \cdot 2\gamma + \frac{1}{4}2C\gamma + \frac{1}{4}B \cdot 5\delta = 4\epsilon,$$

а по сокращеніи

$$E\gamma + \frac{1}{2}D\gamma + \frac{1}{2}C\gamma + \frac{1}{4}B\gamma = \epsilon,$$

и такъ далѣе. Изъ этихъ уравненій выводимъ какъ нельзя проще каждый изъ коэффициентовъ C, D, E, \dots посредствомъ предшествующихъ коэффициентовъ.

Примарь II. Разложимъ тригонометрическую функцию

$$\sin(a + \epsilon x + x^2 + \epsilon x^3 + x^4 + \dots)$$

въ рядъ вида

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots$$

Положимъ $x=0$ получимъ $A = \sin a$, откуда, посредствомъ правилъ Дериваціоннаго Ичисленія,

$$A = \sin a$$

$$B = \cos a \cdot \beta$$

$$C = \cos a \cdot \gamma - \frac{\sin a}{1 \cdot 2} \cdot \beta^2$$

$$D = \cos a \cdot \delta - \frac{\sin a}{1 \cdot 2} \cdot 2\beta\gamma - \frac{\cos a}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 5\beta^3$$

$$E = \cos a \cdot \epsilon - \frac{\sin a}{1 \cdot 2} (2\gamma\delta + \gamma^2) - \frac{\cos a}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 5\gamma^2\beta + \frac{\sin a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \beta^4$$

§ 6. Арбогастъ, изложивъ способъ для опредѣленія коэффициентовъ A, B, C, D, E, \dots въ томъ видѣ, въ которомъ онъ предложенъ здѣсь, переходить къ его упрощенію. Онъ показываетъ какимъ образомъ изъ опредѣленнаго коэффициента выводиться непосредственно слѣдующій за нимъ въ самомъ простомъ видѣ, то есть со всѣми возможными сокращеніями какъ относительно подобныхъ членовъ, такъ и численныхъ коэффициентовъ. И такъ, въ I-омъ примарѣ, вѣсто величинъ

$$4E = a^{-1} \cdot 4\epsilon - a^{-2} \cdot 3\delta - \frac{a^{-3}}{2} (2\gamma \cdot 3\delta + 2\beta \cdot \gamma^2)$$

$$+ \frac{3a^{-3}}{2} \cdot \beta \cdot 2\gamma + \frac{a^{-4}}{8} \cdot 3\beta^2 \cdot 2\gamma - \frac{3a^{-4}}{8} \cdot \beta^4,$$

по сокращенію получимъ непосредственно

$$E = a^{-1} \cdot \epsilon - \frac{a^{-2}}{2} (2\gamma\delta + \gamma^2) + \frac{a^{-3}}{8} \cdot 3\gamma^2\beta - \frac{a^{-4}}{4} \cdot \beta^4$$

Правила, предлагаемая на этотъ конецъ Арбогастомъ, доводя въ вычисленіе коэффициентовъ A, B, C, D, E, \dots до возможной степени простоты; нахожденіе ихъ, по его способу, и съ надлежащими навыками, едва ли пребудетъ боль-

шаго времени, какъ сколько нужно для того, чтобы писать ихъ. Предѣлы нашего Лексикона не позволяютъ намъ привести этого сокращеннаго способа, требующаго довольно подробнаго изложенія; отсылаемъ по сему предмету къ сочиненію Арбогаста.

§ 7. Въ заключеніе предложимъ еще одинъ приемъ разложенія, приводящаго къ опредѣленію суммъ n -ыхъ степеней всѣхъ корней какого нѣ есть алгебраическаго уравненія въ функціи его коэффициентовъ, и независимо отъ сумм низшихъ степеней.

Пусть предложенное уравненіе будетъ

$$x^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \dots = 0, \\ \text{и } \alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots \text{ его корни; следовательно} \\ x^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \dots \\ = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta) \dots$$

Если положимъ $x = \frac{1}{z}$, то это уравненіе приметъ видъ

$$1 + bz + cz^2 + dz^3 + \dots \\ = (1 - \alpha z)(1 - \beta z)(1 - \gamma z)(1 - \delta z) \dots;$$

взявъ логарифмы обѣихъ частей, получимъ

$$\log(1 + bz + cz^2 + dz^3 + \dots) = \\ \log(1 - \alpha z) + \log(1 - \beta z) + \log(1 - \gamma z) + \log(1 - \delta z) + \dots$$

Но если въ формулѣ (8) положимъ $\alpha = 1$, $\beta = -m$, $x = z$, то найдемъ

$$\log(1 - mz) = -mz - \frac{m^2}{2}z^2 - \frac{m^3}{3}z^3 - \frac{m^4}{4}z^4 - \dots;$$

следовательно

$$\log(1 + bz + cz^2 + dz^3 + \dots) = \\ -(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots)z \\ -(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \dots)\frac{z^2}{2} \\ -(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \dots)\frac{z^3}{3} \\ - \dots \\ -(\alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n + \dots)\frac{z^n}{n} \\ - \dots$$

Итакъ, положимъ

$$B = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots \\ C = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \dots \\ D = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \dots \\ \dots \\ A_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n + \dots$$

предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$(9) \left\{ \begin{aligned} &\log(1 + bz + cz^2 + dz^3 + \dots) = \\ &-Bz - \frac{C}{2}z^2 - \frac{D}{3}z^3 - \dots - \frac{A_n}{n}z^n - \dots \end{aligned} \right.$$

Для опредѣленія величинъ B, C, D, \dots въ функціи коэффициентовъ b, c, d, \dots предложеннаго уравненія, сполнимъ только разложить первую часть уравн. (9) по степенямъ переменной z . Чтобы удобнѣе произвести это разложеніе, поставимъ a вѣсно перваго члена 1; итакъ, $\log a$ будетъ первымъ членомъ второй части уравн. (9); но итакъ какъ $a = 1$, то $\log a = 0$, что и должно быть. По объясненнымъ выше правиламъ получимъ послѣдовательно:

$$(-B) = a^{-1}b \\ 1.2 \left(-\frac{C}{2}\right) = a^{-1}.1.2.c - a^{-2}b^2 \\ 1.2.3 \left(-\frac{D}{3}\right) = a^{-1}.1.2.3.d - 6a^{-2}bc + 2a^{-3}b^3$$

опкуда

$$B = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots = -b \\ C = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \dots = -2c + b^2 \\ D = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \dots = -3d + 3bc - b^3$$

Что касается до общаго члена A_n , то основываясь на сокращенномъ способѣ, о которомъ упоминаемо было выше, Арбогастъ найдетъ

$$A_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n + \dots = \\ -\frac{n}{1} \frac{D}{C} \alpha^{n-1} \beta + \frac{n}{2} \frac{D}{C} \alpha^{n-2} \beta^2 + \dots \\ \pm \frac{n}{n-1} \frac{D}{C} \alpha^{n-1} \beta^{n-1} \pm \frac{n}{n} \beta^n,$$

или, написавъ члены въ обратномъ порядкѣ,

$$A_n = \mp \frac{n}{n} \frac{D}{C} \beta^n \pm \frac{n}{n-1} \frac{D}{C} \alpha \beta^{n-1} \mp \frac{n}{n-2} \frac{D}{C} \alpha^2 \beta^{n-2} \\ \pm \frac{n}{n-3} \frac{D}{C} \alpha^3 \beta^{n-3} \mp \dots \mp \frac{n}{1} \frac{D}{C} \alpha^{n-1} \beta.$$

Законъ этой формулы очевиденъ: буква α , составляющая для сокращенія подъ характеристикою D , означая знаменателя, равнаго произведенію цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до порядка дѣриваціи. И такъ

$$\frac{D^2 \beta^{n-2}}{C^2} = \frac{D^2 \beta^{n-2}}{1.2}, \quad \frac{D^3 \beta^{n-3}}{C^3} = \frac{D^3 \beta^{n-3}}{1.2.3} \\ \frac{D^{n-1} \beta}{C^{n-1}} = \frac{D^{n-1} \beta}{1.2.3 \dots (n-1)}.$$

Легко также опредѣлить коэффициенты B, C, D, E, \dots въ возвратномъ видѣ; дѣйствуя какъ показано было выше, найдемъ

$$\begin{aligned} B &= -b \\ C &= -bB - 2c \\ D &= -bC - cB - 3d \\ E &= -bD - cC - dB - 4e \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Вотъ самое краткое изложеніе началъ *Деривационнаго Истисленія*. Можно почерпнуть обширныя свѣдѣнія объ этомъ предметѣ въ сочиненіи Арбогаста. Но чтобы показать какимъ образомъ въ Анализѣ можно служить способъ, о которомъ-говоримъ, мы опишемъ неизвѣстныя познавательныя читателямъ нашимъ съ содержаніемъ этой книги. Сочиненіе Арбогаста раздѣлено на семь слѣдующихъ главъ: 1°. Легкій и общій способъ для разложенія въ ряды функций какихъ ни есть полиномій, и для вычисления каковаго ни есть члена этого разложенія, независимо отъ другихъ членовъ. 2°. Разложеніе въ ряды функций двухъ или нѣсколькихъ полиномій, расположенныхъ по степенямъ одной и той же буквы. 3°. Разложеніе функций одной или нѣсколькихъ полиномій, простирающихся по степенямъ и производившихъ-двухъ или нѣсколькихъ различныхъ буквъ въ ряды, расположенные тѣмъ же образомъ. 4°. Приложенія *Деривационнаго Истисленія* къ возвратнымъ рядамъ, простымъ, двойнымъ, тройнымъ и вообще каковаго ни есть порядка. 5°. Приложенія *Деривационнаго Истисленія* къ обращенію рядовъ (*retour des suites*). 6°. Употребленіе *Дериваций* въ *Дифференціальномъ Истисленіи*. Объ обратныхъ *Деривацияхъ* и приложеніе ихъ къ *Интегральному Истисленію*. 7°. Приложенія *Деривационнаго Истисленія* къ другимъ отраслямъ *теоріи рядовъ*.

DÉRIVÉE. ПРОИЗВОДНАЯ. Смол. ниже.

DÉRIVÉES (FONCTIONS). (Анал.) **ПРОИЗВОД-**

НЫЯ ФУНКЦИИ. Когда разлагаемъ въ рядъ какую ни есть функцию одной или нѣсколькихъ переменныхъ, то получаемъ въ разложеніи новыя функции, которыя *Лагранжъ* называетъ *производными*. Чтобы показать въ немъ соединеніе теоріи производныхъ функций, изображимъ чрезъ $f(x)$ какую ни есть функцию переменной x , и положимъ что h получило произвольное приращеніе h ; въ такомъ предположеніи $f(x)$ измѣнится въ $f(x+h)$. Можно доказать, что рядъ, въ который разложится функция $f(x+h)$ при неопределен-

номъ x , не будетъ заключать въ себѣ ни отрицательныхъ, ни дробныхъ степеней приращенія h . Сверхъ того, легко видѣть, что членъ разложенія, независимый отъ h , будетъ не иное что, какъ первоначальная функция $f(x)$. Смол. TAYLOR (THÉORÈME DE). И такъ, можно предположить

$$f(x+h) = f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + sh^4 + \dots$$

Въ этомъ ряду количесва p, q, r, s, \dots зависятъ отъ переменной x и отъ вида функции, означенной характеристическою f ; для опредѣленія этой зависимости, положимъ что x получило новое приращеніе i , независимое отъ h , въ слѣдствіе чего функция $f(x+h)$ обратится въ $f(x+i+h)$. Но очевидно, что получился на самую величину $f(x+i+h)$, когда въ функци $f(x+h)$ подставимъ $h+i$ вместо h . Пусть будутъ

$$f(x) + f'(x)i + \dots$$

$$p + p'i + \dots$$

$$q + q'i + \dots$$

$$r + r'i + \dots$$

$$s + s'i + \dots$$

первые члены разложенія функций $f(x), p, q, r, s, \dots$, въ которыхъ замѣнимъ x суммою $x+i$. Въ слѣдствіе сдѣланнаго сей-часъ замѣнанія, найдемъ слѣдующее уравненіе:

$$\begin{aligned} &f(x) + f'(x)i + \dots \\ &+ (p + p'i + \dots)h + \dots \\ &+ (q + q'i + \dots)h^2 + \dots \\ &+ (r + r'i + \dots)h^3 + \dots \\ &+ (s + s'i + \dots)h^4 + \dots \end{aligned} = f(x) + p(h+i) + q(h+i)^2 + r(h+i)^3 + s(h+i)^4 + \dots$$

Такъ какъ это равенство должно имѣть мѣсто при всякихъ величинахъ для h и i , то сравнивая коэффициенты передъ i, hi, h^2i, h^3i, \dots , получимъ

$$p = f'(x), 2q = p', 3r = q', 4s = r', \dots$$

Функция $f'(x)$, изображающая коэффициентъ у первой степени h въ разложеніи $f(x+h)$, называется *первою производною* функци $f(x)$; очевидно что p' выводится изъ p точно такъ, какъ $f'(x)$ изъ $f(x)$, почему и будетъ *первою производною* функци p ; q' — функци q ; r' — функци r , и такъ далѣе. Для единообразія изобразимъ чрезъ $f''(x)$ первую производную функци $f'(x)$, чрезъ $f'''(x)$ первую производную функци $f''(x)$, \dots ; получимъ

$p=f'(x), q=\frac{1}{2}f''(x), r=\frac{1}{2.3}f'''(x), s=\frac{1}{2.3.4}f^{(4)}(x), \dots$, следовательно

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{1.2}h^2+\frac{f'''(x)}{1.2.3}h^3+\frac{f^{(4)}(x)}{1.2.3.4}h^4+\dots$$

Функция $f(x)$ в отношении к функциям $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots$, называется *первообразною функцией* (*fonction primitive*), а функции $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots$ — *производными функциями* (*fonctions dérivées*). Первая из них, $f'(x)$, принимается название *первой производной* или *производной первого порядка* (*fonction prime* или *dérivée du premier ordre*); вторая, $f''(x)$, называется *второй производной* или *производной второго порядка* (*fonction seconde* или *dérivée du second ordre*); третья, $f'''(x)$, *третьей производной* или *производной третьего порядка* (*fonction tierce* или *dérivée du troisième ordre*), и так далее.

Если изображать первообразную функцию $f(x)$ чрез y , то последующие из нее производные могут быть означены чрез $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$ или еще чрез $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$, так что

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}$$

$$f''(x)=y''=\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$f'''(x)=y'''=\frac{d^3y}{dx^3}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(x)=y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}$$

Для дальнейших подробностей о производных функциях, отсылаем к сочинению Лагранжа: *Théorie des fonctions analytiques*, а также к трактатам о Дифференциальном и Интегральном Исчислении. В списке DIFFÉRENTIEL (CALCUL) много Лексикона читателя найдут какими образом по данной функции определяются последовательные производные. ÉQUATIONS DÉRIVÉES. Производные уравнения. Уравнения, получающиеся чрез составление производных всех членов первообразного уравнения. И так, имея уравнение $xy^2 - y^3 + x^2y - x^3 - a = 0$, найдем для его производного $y^2 + 2xy - 3x^2 - 3y^2 + x^2y' = 0$ Équations dérivées du premier ordre, du second ordre и проч.; производные уравнения перво-

второго порядка и проч. Такие уравнения, которыми могут быть составлены посредством какого либо соединения первообразного уравнения с первыми производными (*équation prime*), с вторыми производными (*équation seconde*) и так далее. См. ARBITRAIRES (ÉLIMINATION DES CONSTANTES).

DÉRIVÉES PARTIELLES. Частный производный. См. § 6 статьи: DIFFÉRENTIEL (CALCUL).

DÉRIVER. ПРОИСХОДИТЬ. FAIRE DÉRIVER; ПРОИЗВОДИТЬ. Ces quantités dérivent les unes des autres; эти количества производятся одни из других.

DERNIER QUANTITÉ. (Астр.) ПОСЛЕДНЯЯ ЧЕТВЕРТЬ. Говорится о луне. См. PHASE. DERNIÈRE VALEUR. ПОСЛЕДНЯЯ ВЕЛИЧИ-

НА. Когда переменное количество, непрерывно приближается к нулю, и наконец совсем уничтожается, то значение сей переменной, непосредственно предшествующее нулю, называется *последнею ее величиною*. Действительно, когда переменная совсем исчезнет, то она не будет иметь никакого значения, а до исчезновения получит некоторую величину, которая будет последнею, если между нею и нулем не заключается никакой другой величины; если же рассматриваемая величина может еще более приблизиться к нулю, то она не будет последнею. Для объяснения сказанного, положим что какое нибудь тело движется с уменьшающеюся скоростью, и наконец совсем останавливается. Последняя скорость этого тела не будет нуль, ибо нуль не изображает никакой скорости; но последняя скорость будет та, послѣ которой непосредственно тело остановится. Ясно, что эта скорость, какова бы она ни была, непременно существует. — Напротив того, если переменное количество, обратясь в нуль, получает потом непрерывный ряд значений, положительных или отрицательных, то величина сего, непосредственно следующая за нулем, называется *первою величиною* (*première valeur*). Когда имеем двѣ переменныя, которыя обѣ приближаются к нулю, или послѣ изчезанія начинаютъ последовательныя значенія, положительныя или отрицательныя, то отношеніе *не имѣетъ*

величинъ смѣхъ двухъ переменныхъ называется *последнимъ содержаніемъ* (*dernière raison*), а отношеніе *первыхъ ихъ величинъ*, — *первымъ содержаніемъ* (*première raison*). Какъ последнее такъ и первое содержаніе называютъ иногда *предѣльными* (*rapport limite*). Если двѣ переменныя, о которыхъ говоримъ, измѣняются въ одно время, такъ что извѣстному измѣненію одной соотвѣтствуетъ извѣстное же измѣненіе другой изъ нихъ, то *последнее* и *первое* ихъ содержанія будутъ величинами совершенно опредѣленными. Разысканіе смѣхъ содержаній составляетъ предметъ способа Флюкцій или Дифференціального Искисленія.

Положимъ теперь примѣрами сказанное здѣсь о послѣднихъ содержаніяхъ. Положимъ, что имѣемъ кривую *AMB* (черт. 11 Листъ VII), на которой разсматриваются двѣ точки *M* и *N*, соединенныя прямою *NMS*. Опустимъ изъ смѣхъ точекъ на ось *OX* перпендикуляры *MP* и *NQ*, а изъ *M* проведемъ параллельную этой оси линію *MR*; такимъ образомъ составится треугольникъ *MRN*, котораго одна сторона, *MR*, изображаетъ приращеніе абсциссы *OP*, а другая, *RN*, приращеніе ординаты *PM*. Если допустимъ теперь, что точка *N* приближается постепенно къ точкѣ *M*, которую предполагаемъ неподвизною, то сѣкущая *NS*, обращалась около *M*, будетъ болѣе и болѣе приближаться къ касательной *MT* къ кривой, и вмѣстѣ съ тѣмъ уменьшающійся треугольникъ *MRN* будетъ стремиться къ подобію съ треугольникомъ *TPM*. Следовательно, отношеніе $\frac{MP}{TP}$ есть предѣлъ, къ которому неопредѣленно приближается содержаніе $\frac{NR}{MR}$. Когда *MR* и *NR* получаютъ *послѣднія величины*, то очевидно $\frac{NR}{MR} = \frac{MP}{TP}$. И такъ $\frac{MP}{TP}$, то есть отношеніе подкасательной кривой къ ея ординатѣ, будетъ *послѣднимъ содержаніемъ* выраженія $\frac{NR}{MR}$, которое изображаетъ отношеніе приращенія ординаты кривой къ приращенію ея абсциссы.

Положимъ еще, что ищемъ последнее отношеніе хорды къ синусу. Изобразимъ чрезъ *x* синусъ-версусъ, и предположимъ радіусъ круга рав-

нымъ единицѣ, получить *хорда* $= \sqrt{2x}$, *синусъ* $= \sqrt{2x - x^2}$. И такъ

$$\frac{\text{хорда}}{\text{синусъ}} = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x - x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - x}}$$

Но, по предположенію, $\sqrt{2x}$, а поэтому и переменная *x*, уменьшалася неопредѣленно, и приближалась къ нулю; следовательно, когда предположимъ что *x* получаетъ послѣднюю величину, то знаменатель $\sqrt{2 - x}$ обратится въ $\sqrt{2}$, а самое отношеніе $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - x}}$, по причинѣ неизмѣняемости числителя, будетъ равно *единицѣ*. И такъ, единица изобразитъ последнее содержаніе хорды къ синусу.

Способъ послѣднихъ и первыхъ содержаній, употребленный *Ньютономъ* въ его *Philosophiæ naturalis principia Mathematica*, основанъ на однихъ началахъ съ способомъ предѣловъ; но часно первый имѣетъ предъ собой то преимущество, что облегчаетъ предскавленіе разныхъ понятій, дѣлая ихъ, такъ сказать, осязательными. По аналогіи предметовъ отсылаемъ читателей къ слѣдующимъ: LIMITE, EXHAUSTION (MÉTHODE D'), INDIVISIBLES (MÉTHODE DES), DÉRIVÉE, DIFFÉRENTIEL (CALCUL).

DÉROULÉE. (Геом.) Усп. сл. **КРИВАЯ РАЗВЕРТЫВАНІЯ, РАЗВЕРТКА.**

Вариантъ въ Разсужденіи своемъ: *Nouvelle formation des spirales* (Mémoires de l'Académie Royale de Sciences, 1740 г.), разсматривая особаго рода разверзаніе спиральныхъ линій, и далъ этому разверзанію названіе *déroulée*.

DÉROULEMENT. (Геом.) Усп. вып. **РАЗВЕРТЫВАНІЕ.** Смол. выше.

DÉROULER. РАЗВЕРНУТЬ. Найти разверзаніе.

DÉSASSEMBLER. (Мех.) **РАЗНИМАТЬ, РАЗБИРАТЬ.** Говорится о деревянныхъ сооруженіяхъ. *Désassembler les pièces d'une machine; разобратъ машину по частямъ.* Смол. DEMONTER.

DESCARTES (FOLIUM DE). (Геом.) **ДЕКАРТОВЪ ЛИСТЪ, ФОЛІЙ.** Кривая прѣмѣй степени, опредѣляемая уравненіемъ $x^3 + y^3 = 3axy$. Смол. FOLIUM.

OVALES DE DESCARTES. **ДЕКАРТОВЫ ОВАЛЫ.** Такъ названы нѣкоторыя кривыя линіи че-

твердаго порядка, исследованием которых занимался Декарт. Смолт. OVALES DE DESCARTES.

DESCARTES (RÈGLE DE — POUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS DU 4-МЕ DEGRÉ). Смолт. BIQUADRATIQUE.

DESCARTES (RÈGLE DES SIGNES DE). (Алг.)

ДЕКАРТОВО ПРАВИЛО ЗНАКОВЪ, называемое также некоторыми авторами ГАРРИОТОВОЮ ТЕОРЕМОЮ. Правило, открытое Декартомъ, и служащее для нахождения предѣла числа положительных и отрицательныхъ корней алгебраическаго уравненія посредствомъ знаковъ, сопровождающихъ его коэффиціенты. Декартъ, въ своей Геометріи, предлагаетъ это правило въ слѣдующемъ видѣ:

Если въ данномъ уравненіи

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0,$$

или, что все равно, въ ряду коэффиціентовъ

$$1, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$$

осчитаемъ число переменъ и повтореній знаковъ между последовательными его членами, то окажется, что предложенное уравненіе можетъ имѣть столько корней положительныхъ, сколько переменъ знаковъ, и столько корней отрицательныхъ, сколько повтореній знаковъ.

Роберваль возмущалъ пропавъ справедливости правила Декарта; возраженія его основывались на ложномъ смыслѣ, который онъ придавалъ номеру сего математика. По недоразумѣнію или по другой причинѣ, ему казалось будто Декартъ утверждалъ, что уравненіе *имѣетъ* (Декартъ говорилъ только *можетъ имѣть*) именно столько положительныхъ корней, сколько находится переменъ знаковъ между последовательными его коэффиціентами, и столько отрицательныхъ, сколько повтореній знаковъ. Въ опроверженіе этого правила Роберваль предлагалъ уравненія, которыми, сверхъ вещественныхъ корней, имѣли корни мнимые. Удовлетворительные опыты Декарта не могли побѣдить насмѣйливости его противника.

Послѣ Роберваль Валисъ и Роллъ возобновили прежніе неосновательныя возраженія противъ теоремы Декарта.

Впослѣдствіи, Декартово правило знаковъ было доказано многими математиками; самымъ удовлетворительнымъ доказательствомъ сей теоремы

было предложено Гауссомъ и Коши. Первое помѣщено въ Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von A. L. Crelle, dritter Band, 1828, а второе, въ Cours d'Analyse par A. L. Cauchy 1-ère Partie, Analyse algébrique, 1821. Предлагаемъ здѣсь второе изъ этихъ доказательствъ, сдѣлавъ въ немъ некоторыя измѣненія, на которыя мы были наведены упомянутыми сей-часъ способомъ Гаусса.

Пусть будетъ уравненіе

$$(1) \quad x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0,$$

въ которомъ $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$ означаютъ данныя величины, положительныя или отрицательныя. Если ни одна изъ членовъ ряда

$$(2) \quad 1, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$$

не равенъ нулю, то число переменъ и повтореній знаковъ будетъ совершенно определено; такъ направимъ въ уравненіи

$$x^5 - x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 6x - 8 = 0,$$

или, что все равно, въ ряду

$$+1, -1, +2, +7, -6, -8$$

имѣемъ три переменъ, именно отъ $+1$ къ -1 , отъ -1 къ $+2$ и отъ $+7$ къ -6 , и два повторенія: отъ $+2$ къ $+7$ и отъ -6 къ -8 .

Но когда въ ряду (2) недостаетъ некоторыхъ членовъ, то ясно, что сдѣлавъ ихъ нулями, положительными или отрицательными, число переменъ и повтореній знаковъ будетъ зависѣть какъ отъ числа недостающихъ членовъ, такъ и отъ порядка, въ которомъ размѣняютъ знаки передъ ними. Впрочемъ это число можетъ достигнуть наибольшей и наименьшей величины. Легко усмотрѣть, что число переменъ сдѣлается наибольшимъ, когда будемъ принимать каждый изъ умножающихся членовъ со знакомъ противоположнымъ тому, который сопровождается предшествующій ему членъ, а наименьшимъ, если будемъ брать каждый умножающійся членъ съ одинакомъ знакомъ съ предшествующимъ же ему членомъ. И такъ, въ ряду

$$+1, 0, 0, -1, 0, -1,$$

получится наибольшее число переменъ, когда напишемъ его въ видѣ

$$+1, -0, +0, -1, +0, -1, \dots \text{ пять переменъ,}$$

а наименьшее, когда напишемъ

$$+1, +0, +0, -1, -0, -1, \dots \text{ одна переменъ.}$$

Ясно, что наибольшее число повтореній соответствующее наименьшему числу переменъ, а

полиномию (4), не можешь превышать наибольшего числа перемѣн знаковъ, существующихъ въ полиномѣ (3).

Изъ этого предположенія выводилъ какъ слѣдствіе, что если помножимъ какую нѣ осьмъ полиномию на сколько угодно линейныхъ множителей $x + a$, $x + \beta$, $x + \gamma$, ..., то не увеличимъ наибольшаго числа перемѣн знаковъ между новыми коэффициентами послѣдовательныхъ степеней количества x .

Теперь уже легко доказать слѣдующую теорему, которая заключаетъ въ себѣ, но въ видѣ болѣе опредѣлительнаго, Декартова правило знаковъ, приведенное въ началѣ этой статьи:

Теорема. Пусть будъ для полиноміи $f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m$ и наименьшее число повтореній, а v наименьшее число перемѣн знаковъ между коэффициентами послѣдовательныхъ степеней x . Въ такомъ предположеніи 1° число отрицательныхъ корней уравненія

$$f(x) = 0$$

будетъ равно или меньше μ ; 2° число положительныхъ его корней равно или меньше ν ; 3° число мнимыхъ корней равно или больше разности $m - \mu - \nu$.

Слѣдствіе. Если данное уравненіе не имѣетъ корней мнимыхъ, то число отрицательныхъ его корней будетъ равняться наибольшему числу повтореній знаковъ, а число положительныхъ корней, наименьшему числу перемѣн знаковъ между послѣдовательными коэффициентами этого уравненія.

Чтобы доказать первую часть теоремы, замѣтимъ, что если изобразимъ чрезъ a , β , γ , ..., отрицательные корни уравненія $f(x) = 0$, то $f(x)$ будетъ дѣлиться на дѣло на $(x + a)(x + \beta)(x + \gamma) \dots$ нулей будетъ

$$\frac{f(x)}{(x + a)(x + \beta)(x + \gamma) \dots} = X.$$

Но, въ слѣдствіе доказаннаго выше, наибольшее число перемѣн знаковъ въ полиномѣ $f(x)$ будетъ равно или меньше наибольшаго числа перемѣн знаковъ, соотвѣтствующаго полиному X , то есть равно или менѣе степени этой полиноміи X . Слѣдовательно, наибольшее число повтореній знаковъ въ $f(x)$ будетъ равно или бо-

льшее разности между числомъ m и степенью частнаго X , а эта разность, по предположенію, изображаетъ число отрицательныхъ корней уравненія $f(x) = 0$.

Для доказательства второй части теоремы стоимъ только замѣнить, что написать въ $f(x)$, — x на мѣсто x , перемѣнитъ положительные корни уравненія $f(x) = 0$ въ отрицательные, а вычтетъ съ тѣмъ же перемѣн знаковъ въ повторенія, и наоборотъ.

Третья часть теоремы есть непосредственное слѣдствіе двухъ первыхъ частей, ибо, известно, что всякое уравненіе m -ой степени имѣетъ m корней, считая вещественные и мнимые.

Для примѣра приведемъ двучленное уравненіе $x^m + 1 = 0$.

Если m четное число, то получимъ $\mu = 0$ и $\nu = 0$; для m нечетнаго имѣемъ $\mu = 1$, $\nu = 0$. Отсюда заключаемъ, что предположенное уравненіе не имѣетъ корней вещественныхъ когда будетъ четной-степени, а имѣетъ одинъ корень вещественный, именно отрицательный, когда это уравненіе нечетной степени.

Такъ какъ правило Декарта имѣетъ довольно близкую связь съ способомъ опредѣленія корней, предложеннымъ Бури и Штурмомъ, то, для сличенія, опишемъ кратко къ нимъ слѣдующія: FOURIER (ANALYSE DES ÉQUATIONS DÉTERMINÉES), STURM (THÉORÈME DE).

DESCARTES (GÉOMÉTRIE DE). ДЕКАРТОВА ГЕОМЕТРІЯ. Такъ называли послѣ Декарта предложеніе Алгебры въ Геометрію, и преимущественно способа выраженія кривыхъ линій посредствомъ уравненій. Иначе, собственно говоря, Декартова Геометрія есть такая Аналитическая Геометрія; См. ГЕОМЕТРІЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ. Декартъ, которому наука обязана изобрѣтеніемъ этого способа, предложилъ его въ своей Геометріи, написанной въ 1637 году; См. COURBE. — Въ томъ же смыслѣ употребляли наименованіе: Анализъ Декарта.

DESCENDANT. (Мех.) ПАДАЮЩІЙ, ОПУСКАЮЩІЙСЯ.

DESCENDENTES (SÉRIES). (Анал.) НИСХОДЯЩІЕ РЯДЫ. См. ASCENDANTE.

PUISSANCES DESCENDANTES. Нисходящія

степеням. Когда имеем рядъ, состоящий изъ конечнаго или бесконечнаго числа членовъ, и который просматривается по уменьшающимся степенямъ переменнаго количества, то говоримъ, что рядъ расположенъ по *нисходящимъ степенямъ* переменной. Вотъ примѣръ:

$$x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + \dots = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots$$

DESCENSION. (Астр.) Не упот. **НИСХОЖДЕНИЕ.**

Угловое разстояние между полюскою весенняго равноденсія и полюскою экватора, заходящею въ одно время со звѣздой, называлось *прямимъ* или *косвеннымъ нисхожденіемъ* звѣзды (*descension droite, oblique*) смотря по тому, относилось ли это разстояние къ прямой или косвенной сферѣ. Разность между прямымъ и косвеннымъ нисхожденіемъ называлась *разностію нисхожденій* (*différence descensionnelle*). Нынѣ въѣсто нисхожденій употребляютъ только *восхожденія*. Смощ. ASCENSION, а также DÉCLINAISON.

DESCENTE или **CHUTE DES CORPS.** (Мех.)

ПАДЕНІЕ ТѢЛЪ. Прямое или косвенное движеніе *падеющихъ тѣлъ* къ земной поверхности. Смощ. CHUTE DES GRAVES.

DESCENTE (COURBE DE LA PLUS COURTE или DE LA PLUS VITE). **КРИВАЯ НАИКОРАЙШАГО СКАТА.** Смощ. BRACHYSTOCHRON.

DESCRIPTION. (Геом.) **ОПИСЫВАНІЕ, ЧЕРЧЕ-**

НІЕ. Дѣйствіе, посредствомъ котораго черпимъ какую нибудь линію, фигуру и проч. *Description d'une ellipse, d'une parabole; черченіе эллипса, параболы.* — *Description d'une courbe par points; черченіе или построеніе кривой линіи по точкамъ.* Когда, помощью какихъ либо геометрическихъ дѣйствій, опредѣлимъ нѣкоторое число точекъ кривой линіи, довольно близкихъ между собою и соединимъ попарно, глазомерно или посредствомъ лѣкала, всѣ эти точки непрерывною линіею, то говоримъ, что *построили кривую по точкамъ*. Смощ. ELLIPSE, PARABOLE и проч.; также CONTINU (MOUVEMENT).

DESCRIPTIVE (GÉOMÉTRIE). **НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРІЯ.** Смощ. GÉOMÉTRIE

DÉSIGNATION, то же что **NOTATION** (Смощ.)

ОЗНАЧЕНІЕ, ЗНАКОПОЛОЖЕНІЕ, НАИМЕ-

НОВАНИЕ. En employant les mêmes désignations ou aura и проч. Употребилъ тѣ же знакоположенія, тѣ же наименованія, посылки и проч.

DÉSIGNÉ (DIVISEUR). (Ариф.) **СОКРАЩЕННЫЙ ДѢЛТЕЛЬ.** Смощ. DIVISION ORDONNÉE.

DÉSIGNER. **ОЗНАЧИТЬ, ОБОЗНАЧИТЬ, ИЗЪВѣСТИТЬ, ПРЕДСТАВИТЬ, НАЗВАТЬ** En désignant par x l'inconnue, l'on aura l'équation и проч. *Означить, изобразить неизвѣстную чрезъ x , посылить уравненіе и проч.*

DÉTACHÉ (POINT), POINT ISOLÉ, POINT CONJUGUÉ. (Геом.) **ОТДѢЛЬНАЯ, СОПРЯЖЕННАЯ ТОЧКА.** Смощ. CONJUGUÉ.

DÉTACHER. **ОТДѢЛИТЬ.** En détachant un facteur $a+b$ de $(a+b)^m$, on obtient $(a+b)^{m-1}(a+b) = a(a+b)^{m-1} + b(a+b)^{m-1}$; отдѣливъ множителя $a+b$ отъ степенн во выраженіи $(a+b)^m$, получимъ $(a+b)^{m-1}(a+b) = a(a+b)^{m-1} + b(a+b)^{m-1}$.

DÉTAILS. **ПОДРОБНОСТИ. — ДЕТАЛИ.** *Détails d'une levée topographique; подробности топографической съемки. Détails d'une épreuve; подробности гравюры, этюры. Détails d'un calcul; подробности вычисленія.*

DÉTENDRE UN RESSORT. (Примк. Мех.) **СПУСТИТЬ ПРУЖИНУ.**

DÉTERMINANT D'UNE FORME. (Теор. Чис.)

ОПРЕДѢЛИТЕЛЬ ВИДА. Различныя свойства трехчленнаго выраженія $ax^2 + 2bxy + cy^2$, гдѣ всѣ буквы изображаютъ цѣлыя числа, зависящія преимущественно отъ числа $b^2 - ac$, которое и названо Гауссомъ *опредѣлителемъ вида* $ax^2 + 2bxy + cy^2$. Такъ какъ выраженіе $ax^2 + 2bxy + cy^2$ можетъ быть представлено въ видѣ

$$\frac{(ax + by + y\sqrt{b^2 - ac})(ax + by - y\sqrt{b^2 - ac})}{a},$$

то ясно, что его опредѣлитель будетъ не иное что какъ число, находящееся подъ квадратными корнями въ каждомъ изъ двухъ линейныхъ множителей, на которые предложенное выраженіе разлагается. Для нѣкоторыхъ подробностей о видахъ второй степенн, отсылаемъ къ слѣдѣ: **FORMES (THEORIE DES)** Для полнаго же изученія теоріи видовъ, читатели могутъ обратиться къ извѣстному сочиненію Гауса: *Disquisitiones arithmeticae*. Тамъ найдутъ они любо-

пытными исследованиями об этом предмете, а также объяснение различия, полагаемого между *определяемыми* *правилами* (*déterminants réguliers*) и *неправильными* (*irréguliers*).

DÉTERMINATION. ОПРЕДЕЛЕНИЕ, нахождение, разыскание. — Значение. Смол. VALEUR. — Под словом *détermination* разумею также совокупность суждений, посредством которых показываюшь в каком случае и какими образом какая либо задача можетъ бытъ решена, а также, сколько она допускаетъ решений Смол. DIORISME.

DÉTERMINÉ. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ. *Problème déterminé; определённая задача.* Задача, допускающая одно или вообще конечное число решений. Говорится въ противоположность тѣмъ задачамъ, которыя допускають безконечное число решений. Смол. ALGÈBRE, ÉQUATION. INDÉTERMINÉE (ANALYSE).

ANALYSE DÉTERMINÉE. Определённый Анализъ. Анализъ, занимающийся решениемъ определённыхъ задачъ; Смол. выше.

DÉTERMINER. ОПРЕДЕЛЯТЬ, найти, вывести, сыскать, разыскать. *Déterminer la valeur d'une inconnue; определить, найти значение неизвестной.*

DÉTURBATRICE (FORCE). Такъ назывъ *Ла-Халл* (*La Caille*) въ своихъ *Leçons d'Astronomie* силу, перпендикулярную къ плоскости орбиты возмущенной планеты. Смол. PERTURBATIONS.

DEUX. ДВА. Deuxième; второй.

DÉVELOPPABLE (SURFACE). (Геом.) **РАЗВЕРТЫВАЮЩАЯСЯ, РАЗВЕРЗАЮЩАЯСЯ ПОВЕРХНОСТЬ.** Отличительное свойство развертывающихся поверхностей состоятъ въ томъ, что онѣ могутъ бытъ выпрямлены въ плоскость безъ разрыва и безъ складокъ. Таковы напиримѣръ поверхности *цилиндрическая, коническая*; Смол. CYLINDRIQUES (SURFACES), CONIQUES (SURFACES). Развертывающаяся поверхность происходитъ отъ движенія прямой линіи, которая, во всѣхъ своихъ положеніяхъ, остается касательною къ данной кривой линіи двойкой кривизны Отсюда видно, что отъ этой кривой, называемой *возвратными ребромъ*, зависить видъ образуемой поверхности. Легко видѣть, что харак-

теристики этого рода поверхностей будутъ прямыми линіи.

Выведемъ теперь уравненіе развертывающейся поверхности. Означимъ чрезъ α, β, γ координаты возврата ребра, и чрезъ $\beta = q(\alpha), \gamma = \psi(\alpha)$ его уравненія. Пусть x, y, z изображають координаты касательной къ возвратному ребру. Уравненія этой касательной будутъ

$$y - q(\alpha) = \frac{d\beta}{d\alpha}(x - \alpha) \text{ и } z - \psi(\alpha) = \frac{d\gamma}{d\alpha}(x - \alpha),$$

или

$$(1) \quad y - q(\alpha) = q'(\alpha)(x - \alpha) \text{ и } z - \psi(\alpha) = \psi'(\alpha)(x - \alpha).$$

Если изъ двухъ послѣднихъ уравненій исключить величину α , то получимъ уравненіе развертывающейся поверхности.

Очень легко получить общее уравненіе развертывающихся поверхностей, независимо отъ произвольныхъ функций q и ψ . Действительно, замѣтивъ, что въ силу уравненій (1), α есть некоторая функция отъ x и y , дифференцируемъ уравненія (1) сперва по извѣстности x , а потомъ по извѣстности y , и получаемъ

$$(2) \quad \begin{cases} 0 = q'(\alpha) + (x - \alpha)q''(\alpha)\frac{d\alpha}{dx} \\ 1 = (x - \alpha)q''(\alpha)\frac{d\alpha}{dy} \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dz}{dx} = \psi'(\alpha) + (x - \alpha)\psi''(\alpha)\frac{d\alpha}{dx} \\ \frac{dz}{dy} = (x - \alpha)\psi''(\alpha)\frac{d\alpha}{dy} \end{cases}$$

Если въ уравненія (3) подставимъ величины для $(x - \alpha)\frac{d\alpha}{dx}$ и для $(x - \alpha)\frac{d\alpha}{dy}$, выведенныя изъ формулъ (2), то $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$ выразятся чрезъ произвольныя функции одной переменной; следовательно, мы въ правѣ положить

$$\frac{dz}{dx} = \chi\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

разумѣя подъ χ произвольную функцию, або видѣя зависить отъ произвольныхъ же функций q и ψ . Дифференцируя послѣднее уравненіе сперва по x , а потомъ по y , получимъ

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \chi'\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{d^2z}{dy^2}$$

$$\frac{d^2z}{dx dy} = \chi'\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{d^2z}{dy^2}.$$

Исключивъ $\chi'\left(\frac{dz}{dy}\right)$ изъ этихъ двухъ уравненій, найдемъ окончательно

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 = 0.$$

Вотъ уравненіе въ частныхъ дифференціалахъ, принадлежащее всемъ развернутающимся поверхностямъ; оно найдено *Дйлеромъ*.

DEVELOPPANTE. (Геом.) РАЗВЕРЗАЮЩАЯ, РАЗВЕРТЫВАЮЩАЯ.

Такъ называемая кривая, проходящая отъ развертыванія другой кривой линіи, которая, въ отношеніи къ первой, именуется *эволютою*; Смол. ниже.

DEVELOPPÉE. (Геом.) ЭВОЛЮТА, РАЗВЕРЗАЮЩАЯСЯ, РАЗВЕРТЫВАЮЩАЯСЯ, РАЗВЕРТКА.

Одна изъ примѣчательнѣйшихъ теорій, обогатившихъ Геометрію послѣ Декарта, есть, безъ сомнѣнія, *теорія эволюты*, изобрѣтенная *Гу겐сомъ*. Правда, что еще за два столѣтія до Р. Х. Аполлоній предложилъ нѣкоторыя понятія о развѣрзаніи кривыхъ: но основанное имъ объ этомъ предметѣ такъ незначительно, что нельзя отказать Гугенсу въ первенствѣ сего открытія. Эта важная теорія изложена въ третьей главѣ извѣстнаго его сочиненія *Horologium oscillatorium*, напечатаннаго въ 1673 году.

Положимъ, что кривая *ANF* (черт. 12 Лислѣ VII) обернута гнѣкою и нераспаяжимою линіею, которой одинъ конецъ укрѣпленъ въ точкѣ *F*, а другой выплунуть по направленію касательной *AO*. Если будемъ разгибать линію и натягивать ее отъ *O* къ *M*, то по мѣрѣ того какъ она спланируется онадѣлается отъ кривой *ANF*, конецъ *O* опишетъ нѣкоторую кривую *OMC*, называемую *разверзающею* (*développante*) кривой *ANF*; линія же *ANF* въ отношеніи къ *OMC*, принимается названіемъ *эволюты*. Черт. 12, а, б, образуютъ заключаетъ, что во всякой точкѣ *M* направленіе *MN* линіи будетъ нормально къ разверзающей, дѣйствительно, если прижмемъ эволюту за нѣкоторомыя, состоящей изъ бесконечнаго числа элементовъ, то легко будетъ усмотрѣть, что конецъ *M* линіи *NM* описываетъ радіусомъ *NM*, около точк. *N* какъ около центра, бесконечно малую круговую дугу *MM'*, сливающуюся съ элементомъ разверзающей. Подобнымъ образомъ элементъ *M'M''* можетъ быть принимаемъ за бесконечно малую круговую дугу, описанную изъ точк. *N'* радіусомъ *N'M'*, и

такъ далѣе. Слѣдовательно, эволюта кривой *OMC* будетъ не иное что, какъ геометрическое мѣсто пересѣченій каждыхъ двухъ смежныхъ нормалей, проведенныхъ къ предложенной кривой *OMC*. На основаніи этого опредѣленія эволюты, мы покажемъ ниже выводъ ея уравненія. Линія *NM*, по свойству разверзанія, будетъ очевидно касательною къ эволютѣ въ точкѣ *N*; линія *NM* называется *радіусомъ эволюты* (*rayon de la développée*), или, въ отношеніи къ разверзающей, *радіусомъ кривизны* (*rayon de courbure*). Смол. OSCULATEUR (CERCLE), CONTACT. Легко также усмотрѣть, что разность *NM* — *AO* двухъ радіусовъ равна спрямленной дугѣ *AN* эволюты.

Часто эволюту опредѣляютъ другимъ образомъ: эволютою кривой называютъ геометрическое мѣсто центровъ сопрягающихся круговъ данной кривой линіи. Смол. OSCULATEUR (CERCLE).

Прислушавъ шенерь къ выводу уравненія эволюты и къ аналитическому доказательству различныхъ ея свойствъ.

Пусть, будемъ *OMC* (черт. 12 Лислѣ VII) данна кривая а *ANF* ея эволюта. Опшесемъ оба кривыя къ двумъ прямоугольнымъ осямъ *OX*, *OY*, и положимъ *OP* = *x*, *PM* = *y*, *OQ* = *a* и *QN* = *β*. Зависимость между *x* и *y* будетъ извѣстна; надобно найти уравненіе между *a* и *β*, которое будетъ принадлежать эволютѣ.

Изобразимъ чрезъ

$$(1) \quad f(x, y) = 0$$

уравненіе предложенной кривой *OMC*, а чрезъ

$$(2) \quad g(a, \beta) = 0$$

уравненіе ея эволюты *ANF*. Мы сказали выше, что эволюта есть геометрическое мѣсто пересѣченій каждыхъ двухъ смежныхъ нормалей разверзающей. Если означимъ чрезъ *X* и *Y* пересѣченія координаты нормали *MN*, проходящей чрезъ точк. *M* и *N*, соотвѣстственно опредѣленнымъ координатамъ (*x*, *y*) и (*a*, *β*), то получимъ

$$X - x + \frac{dy}{dx}(Y - y) = 0.$$

Смежная нормаль *MN* проходитъ чрезъ точк. *M*(*x* + *dx*, *y* + *dy*) и чрезъ *N*(*a*, *β*); и такъ, означивъ чрезъ *X'* и *Y'* ея пересѣченія координаты, получимъ уравненіе

$$X' - x - dx + \frac{d(y+dy)}{d(x+dx)}(Y' - y - dy) = 0.$$

Но точка N , определяемая координатами α и β , будет общей для обоих парабол; следовательно, для определения координат этой точки, должно положить $X = X' = \alpha$, $Y = Y' = \beta$, и два последних уравнения принять вид

$$\alpha - x + \frac{dy}{dx}(\beta - y) = 0$$

$$\alpha - x - dx + \frac{dy + d^2y}{dx + dx}(\beta - y - dy) = 0.$$

Если принять dx постоянным, то d^2x обратится в нуль; сверх того, второе из двух последних уравнений сократится в силу первого из них, и, отбросив бесконечно малое количество первого порядка $\frac{d^2y}{dx^2} dy$, получим

$$(5) \quad \begin{cases} x - \alpha + (y - \beta) \frac{dy}{dx} = 0 \\ 1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - \beta) \frac{d^2y}{dx^2} = 0. \end{cases}$$

Уравнения (3) в совокупности с уравн. (1) определяют точку N эволюты; действительно, исключив из этих трех формул две переменные x и y , получим уравнение, в состав которого войдут только координаты α и β ; найденное таким образом уравнение будет принадлежать эволюте, и будет тождественно с формулой (2).

Положим, напротив, что ищем эволюта обыкновенной параболы, определяемой уравнением $y^2 = px$. Так как в этом случае $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{2y^3} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{p^2}{4y^5}$, то уравнения (1) и (3) примут вид

$$\begin{aligned} y^2 &= px \\ x - \alpha + (y - \beta) \frac{p}{2y} &= 0 \\ 1 + \frac{p^2}{4y^5} + (y - \beta) \frac{p^2}{4y^5} &= 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство доставляет $y = -\sqrt[3]{\frac{p^2}{4}}$

или $\beta = -\frac{4y^3}{3}$; подставляя во второе уравнение эту величину для β , найдем

$$x - \alpha + \left(y + \frac{4y^3}{3}\right) \frac{p}{2y} = x - \alpha + \frac{p}{2} + \frac{2y^2}{p} = 0;$$

но $\frac{2y^2}{p}$, по уравнению параболы, равно $2x$; следовательно $x = \frac{1}{3}\left(\alpha - \frac{p}{2}\right)$. Наконец, если подста-

вить найденные величины для x и для y в уравнение $y^2 = px$, то получим

$$\sqrt[3]{\frac{p^4}{16}} = \frac{p}{3} \left(\alpha - \frac{p}{2}\right),$$

или

$$\left(\alpha - \frac{p}{2}\right)^3 = \frac{27}{16} p^{\frac{1}{2}}.$$

Возьмем уравнение эволюты обыкновенной параболы. И так как, как мы видели, эволюта кубической параболы второй степени, имеющая одну и ту же ось с своею развернутою, а вершину в точке A (черт. 12), находящейся от вершины O первоначальной кривой на расстоянии OA , то если в роль параметра p . Параметр эволюты равняется $\frac{27}{16}$ параметра развернутой. Часть ANF есть эволюта части OMC данной параболы, а часть MEF , равная и пропорциональная дуге ANF , служит эволютой нижней части OKC .

Мы сказали выше, что линия MN будет касательною к эволюте; это свойство легко доказывается аналитически. Действительно, если возьмем дифференциал первого из уравнений (3), приняв в нем за величины за функции переменной x , то получим

$$1 - \frac{da}{dx} + \frac{dy^2}{dx^2} - \frac{d\beta}{dx} + \frac{dy}{dx} + (y - \beta) \frac{d^2y}{dx^2} = 0;$$

или, в силу выбора из уравнений (3),

$$-\frac{da}{dx} - \frac{d\beta}{dx} + \frac{dy}{dx} = 0,$$

откуда

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{da}{dy} = -\frac{da}{d\beta}.$$

Если изобразить через X и Y перевернутые координаты направления нормали MN , которая, по определению эволюты, должна проходить чрез точку $N(\alpha, \beta)$, то получим уравнение

$$X - \alpha + \frac{dy}{dx}(Y - \beta) = 0;$$

подставляя $-\frac{da}{d\beta}$ на место $\frac{dy}{dx}$ найдем уравнение

$$Y - \beta = \frac{d\beta}{da}(X - \alpha),$$

которое, как известно, принадлежит касательной эволюты.

Докажем теперь свойство эволюты, относящееся къ ея спрямлению. Если изобразимъ чрезъ ρ радиусъ NM , то, по причинѣ $\overline{MN}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{RN}^2$, получимъ

$$(5) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2;$$

мы написали разность $y - \beta$, а не сумму $y + \beta$ потому что β само по себѣ есть количественно отрицательное. Изъ уравненій (5) выводимъ

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} x - \alpha &= \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{dy}{dx} \\ y - \beta &= -\frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}; \end{aligned} \right.$$

подставляя эти величины въ формулу (5), получимъ

$$(7) \quad \rho = \pm \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Вотъ выраженіе радиуса эволюты, или, что все равно, радиуса кривизны разверзающей OMC въ точкѣ M . Если возьмемъ дифференціалъ уравн. (5) принимая всѣ величины за функціи перемѣнной x , то получимъ уравненіе

$$(x - \alpha) - (x - \alpha) \frac{d\alpha}{dx} + (y - \beta) \frac{d\beta}{dx} - (y - \beta) \frac{d\beta}{dx} = \rho \frac{d\rho}{dx},$$

которое, въ слѣдствіе перваго изъ уравненій (5), приметъ видъ

$$-(x - \alpha) \frac{d\alpha}{dx} - (y - \beta) \frac{d\beta}{dx} = \rho \frac{d\rho}{dx},$$

или, по раздѣленіи на $\frac{d\alpha}{dx}$

$$-(x - \alpha) - (y - \beta) \frac{d\beta}{d\alpha} = \rho \frac{d\rho}{d\alpha}.$$

Исключимъ теперь изъ этой формулы при величинахъ $x - \alpha$, $y - \beta$ и ρ ; для этого подставимъ въ уравненія (6) и (7) — $\frac{d\alpha}{d\beta}$ на мѣсто $\frac{dy}{dx}$; найдемъ

$$\frac{1 + \frac{d\alpha^2}{d\beta^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{d\alpha}{d\beta} + \frac{1 + \frac{d\alpha^2}{d\beta^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = \pm \frac{\left(1 + \frac{d\alpha^2}{d\beta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{d\rho}{d\alpha},$$

или

$\left(1 + \frac{d\alpha^2}{d\beta^2}\right) \left(\frac{d\alpha}{d\beta} + \frac{d\beta}{d\alpha}\right) = \pm \left(1 + \frac{d\alpha^2}{d\beta^2}\right) \sqrt{1 + \frac{d\alpha^2}{d\beta^2}} \cdot \frac{d\rho}{d\alpha};$
по сокращеніи, это уравненіе приметъ слѣдующій весьма простой видъ:

$$d\rho = \pm \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}.$$

Изобразимъ теперь чрезъ σ дугу эволюты, считаемую отъ какой угодно ея точки, напримеръ отъ A ; по извѣстной формулѣ будетъ $d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}$ (См. ARC); слѣдовательно

$$d\sigma = \pm d\rho.$$

Изъ этого равенства заключаемъ, что σ и ρ суть функціи такого свойства, что дифференціалы ихъ равны между собою; такого рода функціи, какъ извѣстно изъ начальныхъ основаній Дифференціального Искисленія, могутъ разсчитываться одна отъ другой только постоянною величиною; изобразивъ ее чрезъ C , получимъ

$$\sigma = \pm \rho + C.$$

Пусть будетъ $\sigma =$ дуга AN , $\rho =$ радиусу NM . Если положимъ $\sigma' =$ дуга $A'N'$, $\rho' =$ радиусу $N'M'$, то подобнымъ образомъ найдемъ

$$\sigma' = \pm \rho' + C;$$

вычитая изъ этого уравненія предыдущее, получимъ

$$\sigma' - \sigma = \pm (\rho' - \rho).$$

Изъ этой формулы заключаемъ, что дуга эволюты $N'M'$ равна разности между радиусами ρ и NM , соотвѣствующими крайнимъ точкамъ разсчитываемой дуги. Это примѣчательное свойство, по которому опредѣляется длина какой нибудь дуги кривой ANF , и называется *спрямленіемъ эволюты* (*rectification de la développée*).

Пусть, для примѣра, ищемъ длину дуги AN (черт. 12) кубической параболы второй степени. Изобразивъ эту дугу чрезъ s , найдемъ

$$s = \overline{NM} - \overline{AO}.$$

Для опредѣленія радиусовъ \overline{NM} и \overline{AO} употребимъ выраженіе (7); такъ какъ разверзающая разсчитываемой эволюты есть обыкновенная параболла, опредѣляемая уравненіемъ $y^2 = px$, то получимъ $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^{\frac{3}{2}}}{4y^{\frac{3}{2}}}$; слѣдовательно

$$\begin{aligned} \rho = \overline{NM} &= \pm \frac{\left(1 + \frac{p^2}{4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{p^{\frac{3}{2}}}{4y^{\frac{3}{2}}}} = \mp \frac{(p^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2} \\ &= \mp \frac{(p + 4x)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{p}}. \end{aligned}$$

Чтобы получить радиус \overline{AO} , сповить толь-
ко въ предыдущемъ выраженіи положить $x=0$;
такимъ образомъ найдемъ

$$\overline{AO} = \mp \frac{p^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{p}},$$

и слѣдовательно, принявъ дугу s положительною.

$$s = \frac{1}{2\sqrt{p}} \left[(p + 4x)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}} \right].$$

Читатели найдутъ примѣры опредѣленія эво-
лютъ въ другихъ мѣстахъ нашего Лексикона, и
между прочимъ въ статьяхъ: CYCLOIDE, SPI-
RALE LOGARITHMIQUE.

Легко доказавъ, что всякая плоская кривая,
сверхъ найденной плоской эволюты, имѣетъ без-
численное множество другихъ эволютъ двойкой
кривизны. Дѣйствительно, пусть будетъ AB
(черт. 13 Лекс. VII) данная кривая линія, а CD
плоская ея эволюта. Если изъ всѣхъ точекъ
 $N, N', N'', N''' \dots$ кривой CD проведемъ линіи
 $NQ, N'Q', N''Q'', \dots$, перпендикулярныя къ
ея плоскости, то совокупность сихъ перпенди-
куляровъ образуетъ цилиндрическую поверх-
ность; плоскость MNE , проходящая чрезъ нор-
маль MN кривой AB и перпендикуляръ NQ , оче-
видно будетъ перпендикулярна къ предложенной
кривой AB . То же самое должно разумѣть и о
плоскостяхъ $M'N'E', M''N'E'', M'''N'E''' \dots$
Теперь легко видѣть, что всякая точка, впадая
на перпендикуляръ NQ , наприимръ точка E , бу-
детъ равно удалена отъ всѣхъ точекъ элемента
 MM' , принимаемаго за бесконечно малую круго-
вую дугу, описанную изъ центра N радиусомъ
 NM . Равнымъ образомъ, произвольная точка пер-
пендикуляра $N'Q'$ будетъ равно удалена отъ
всѣхъ точекъ бесконечно малой круговой дуги
 $M'M''$, описанной изъ центра N' радиусомъ $N'M'$,
и такъ далѣе. На этомъ основаніи заключаемъ,
что точка E можетъ быть принимаема за одинъ
изъ центровъ дуги MM' , а линія EM за одинъ
изъ радиусовъ кривизны кривой AB , соотвѣст-
ствующій точкѣ M . Наименьшій изъ сихъ ради-
усовъ будетъ радиусъ NM , заключающійся въ пло-
скости данной кривой и ея плоской эволюты.

Цилиндрическая поверхность $NN''N''' \dots$
 $QQ'Q'' \dots$, заключающая въ себѣ плоскую эволюту
 $NN''N''' \dots$, будетъ, вмѣстѣ съ тѣмъ, гео-
метрическимъ мѣстомъ безчисленнаго множества

другихъ неплоскихъ эволютъ первоначальной кри-
вой AB . Дѣйствительно, если вѣрно цилиндри-
ческой поверхности будетъ разсматривать при-
зму, состоящую изъ бесконечнаго числа граней
 $NN''QQ', N'N''Q'Q'', N''N'''Q''Q''', \dots$, и возъ-
мемъ на какой-нибудь ребрѣ, наприимръ на NQ ,
произвольную точку E , то продолживъ радиусъ
 ME до встрѣчи E' съ смежнымъ ребромъ $N'Q'$, и
соединивъ потомъ точку E' съ M' получимъ двѣ
новые смежные радіуса ME и $M'E'$; продолживъ
 $M'E'$ до встрѣчи съ ребромъ $N''Q''$, и такъ далѣе,
составимъ косою многоугольникомъ $EE'E'E'' \dots$,
при разверзаніи котораго опишущся бесконечно
малыя дуги $MM', M'M'', M''M''' \dots$ принимаемыя
за круговыя. Легко понять, что если выпянемъ
ниги по направленію ME , и спланиемъ потомъ
обвивавшъ ею призму $NN''N''' \dots QQ'Q'' \dots$, то имѣмъ
совмѣстившися съ многоугольникомъ $EE'E'E'' \dots$
Вѣсто точки E мы могли бы взять всякую
другую точку на ребрѣ NQ , и получали
бы другую эволюту. Отсюда слѣдуетъ, что
всякая плоская кривая AB , сверхъ плоской
эволюты CD , имѣетъ безчисленное множество
эволютъ двойкой кривизны, которыя при раз-
верзаніи цилиндрической поверхности, ихъ заклю-
чающей, обращаются въ вѣ прямые линіи...

Основываясь на такихъ же соображеніяхъ
можно доказывать различныя предложенія, отно-
сящіяся къ разверзанію кривыхъ двойкой кривиз-
ны. Если обогнемъ плоскую кривую линію
натию, укрѣпленную однимъ концомъ къ какой-
нибудь точкѣ этой кривой, и спланиемъ потомъ
разгибавъ натию, напятивая ее по направленію
касательной, то другой конецъ нати опишетъ
нѣкоторую кривую, называемую *разверзающею*
первой, а первая, въ разсужденіи *разверзающей*,
принимаетъ названіе *эволюты*. И въ этомъ слу-
чаѣ касательная къ эволютѣ будетъ нормальна
къ разверзающей. Должно замѣтить, что всякая
кривая двойкой кривизны имѣетъ безчисленное
множество эволютъ; геометрическое мѣсто
всѣхъ ихъ будетъ нѣкоторая поверхность, при-
надлежащая къ роду *линейчатыхъ*. Сюи. RÈ-
GLÈES (SURFACES). Для подробностей по
сему предмету отсылаемъ читателей къ пер-
вой части сочиненія: *Leçons sur les applications*
du Calcul Infinitésimal à la Géométrie; par A. L.
Cauchy 1826.

Определение разверзающей по данной эволюте составляет *обратную задачу эволюты*. Для решения этого вопроса сподой только подставить в уравн. (2) величины α и β , выведенные из формулы (6). Изобразив чрез y' и y'' дифференциальные коэффициенты $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, получим

$$(8) \quad q \left(x - \frac{1+y'^2}{y''}, y + \frac{1+y'^2}{y''} \right) = 0.$$

Вот дифференциальное уравнение разверзающей. Если, для краткости, удержим α и β , а функцию означим просто характеристической q , то взяв дифференциал последнего уравнения, найдем

$$(9) \quad \frac{dq}{d\alpha} \left[1 - (1+y'^2) - y' \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1+y'^2}{y''} \right) \right] + \frac{dq}{d\beta} \left[y' + \frac{d}{dx} \left(\frac{1+y'^2}{y''} \right) \right] = 0,$$

или, по сокращении,

$$\left[y' + \frac{d}{dx} \left(\frac{1+y'^2}{y''} \right) \right] \left(\frac{dq}{d\beta} - y' \frac{dq}{d\alpha} \right) = 0.$$

И так, должно быть

$$y' + \frac{d}{dx} \left(\frac{1+y'^2}{y''} \right) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dp}{d\beta} - y' \frac{dp}{d\alpha} = 0.$$

Первое из этих двух уравнений, не заключающее в себя функций q , приводит сперва к интегралу

$$y + \frac{1+y'^2}{y''} = C,$$

потом к уравнению

$$(y - C)y' + x - C' = 0,$$

из которого выводим

$$(x - C')^2 + (y - C)^2 = C''^2,$$

разумя под C, C' и C'' постоянные количества.

Найденное уравнение очевидно принадлежит кругу кривизны, ибо $C = \beta, C' = \alpha, C'' = r$ [Смолт. уравн. (5), а также снатым QSCULATÉUR (CERCLE)].

Что касается до уравнения

$$(10) \quad \frac{dp}{d\beta} - y' \frac{dp}{d\alpha} = 0,$$

то оно изображает частное решение (solution particulière) уравнения (9). Если из уравнений (8)

и (10) исключим отношение $\frac{1+y'^2}{y''}$, то получим дифференциальное уравнение 1-го порядка относительно переменных x, y , и оно будет принадлежать некоей разверзающей. Постоянное количество, входящее в интеграл этого

уравнения, будет зависеть от положения точки O (черт 12), которое определяется длиной конца нити AO .

Легко усмотреть, что вместо уравнений (8) и (10), можно прямо употребить следующую при формулы:

$$q(\alpha, \beta) = 0$$

$$(x - \alpha) + \frac{dy}{dx}(y - \beta) = 0$$

$$\frac{d q(\alpha, \beta)}{d \beta} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d q(\alpha, \beta)}{d \alpha} = 0;$$

исключение величин α и β из этих уравнений приведет к тому же дифференциальному уравнению разверзающей.

Здесь вместо упомянутой также о некоторых кривых, принадлежащих к роду эволюты, и размышлением которых занимался Яков Бернулли (Acta Eruditorum за 1692 год). Положим, что кака-ни есть кривая CM_1 (черт 14 Лист VII) касалась по прямой ей кривой OM_2 . При таком движении точки A , произвольно взятой в плоскости производящей кривой CM_1 , опишет кривую EAB , которую, но ее родству с циклоидою, Бернулли называет *циклоидальною*. Кривую же OM_2 , по которой касалась производящая, он называет *основною* (epposita). Кривая OB_1 , разверзанием которой описывается основная OB_2 , именуется *эволютою* сей последней. Она, как мы уже видели выше, будет геометрически в некотором центре соприкасающихся кругов основной кривой. И так, прямая MB изображает радиус кривизны кривой OM_2 , соприкасающийся точкой M . Далее, Бернулли употребляет следующие наименования: он называет *зажигательною* из точки O (caustica ex puncto O) кривую OI_2 , образуемую последовательными пересечениями отраженных от основной кривой по направлению MI лучей OM , исходящих из какой-либо точки O , а *противо-зажигательною* (anti-caustica), геометрическое место точек, которые получаются когда продолжим направление отраженного луча IM , до A , и возьмем $MA = MO$, и так, на чертеже 14, противо-зажигательная есть кривая EAB . Если же падающий на основную OM_2 луч OM будет продолжен до i , так что $Mi = MI$, то точка i будет принадлежать кривой DiB именуемой *пере-зажигательною* (peri-caustica).

Наконец, если продолжим радиус кривизны BM до b , такъ чтобы $BM \perp Mb$, то точка b будетъ принадлежать кривой FbT , которая названа Бернуллиемъ *противо-эволютою* (*anti-evoluta*, *anti-développée*).

Бернулли, разсматривая *противо-зажигательную*, *перезажигательную* и *противо-эволюту* какъ линіи оптическія, приписывалъ имъ слѣдующія значенія: первая изъ нихъ опредѣляетъ мѣсто изображенія A свѣтящейся точки O , усматриваемой изъ точки I зажигающей $OI2$ чрезъ отраженіе; вторая есть изображеніе цѣлой зажигающей въ зеркалѣ $OM3$, видимое изъ точки O ; наконецъ, третья есть мѣсто изображенія глаза, видящаго себя изъ эволюты въ зеркалѣ $OM3$.

Бернулли, занимаясь изслѣдованіемъ сихъ кривыхъ, вывелъ многа любопытныя ихъ свойства; одно изъ примѣчательнѣйшихъ опусносится къ *логарифмической спирали*: онъ доказалъ, что эта кривая пожегшеся съ своею эволютою, зажигающей, *противо-эволютою* и *перезажигающей*. Это свойство показало особенно издѣльнымъ и удивительнымъ Якову Бернулли; припомнивъ обычай времени Архимедовыхъ, онъ сожалѣлъ, что не могъ заставить чпобъ на его гробницѣ вырѣзали логарифмическую спираль съ надписью: *садетъ тѣмъ Гелиога (исчезнувшимъ, возрождаются всегда въ одномъ видѣ)*.

Окончивъ эту статью указаніемъ на одно весьма примѣчательное свойство последовательныхъ плоскихъ эволютъ. Если на какой нѣ есть кривой линіи возьмемъ дугу, ограниченную двумя касательными, взаимно перпендикулярными, и построимъ плоскую эволюту этой дуги, потомъ эволюту первой найденной эволюты, и такъ далѣе, то видъ последовательныхъ эволютъ будетъ сдвигаться къ *циклоидальному*, и если бы возможно было продолжитъ это дѣйствіе въ безконечность, то послѣдняя эволюта была бы, въ строгомъ смыслѣ, обыкновенная циклоида. Сія теорема принадлежитъ *Иоану Бернулли* (Смол. Jo. Bernoulli opus, томъ IV). Числители найдутъ Эйлерю доказавшемъ это же предположеніе въ X томѣ *Novi Comment. Acad. Petrop.*, и еще другія доказательства въ *Exercices de Calcul Intégral*, соч. Лежандра.

DÉVELOPPÉE IMPARFAITE. Несовершен-

ная эволюта. Такъ называлъ Фонтенель нѣкоторый родъ эволюты, которая разсматривалась математикомъ *Ремонсомъ* въ *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 1709 г.

Если предположимъ, что чрезъ безконечно близкія точки m , m' , m'' , m''' , кривой AB (черт. 15 Листъ VII) проведены линіи r , r' , r'' , r''' , составляющія съ касательными rt , $r't'$, $r't''$, $r't'''$, углы постоянные, но только не прямыя какъ въ обыкновенной эволютѣ, то геометрическое мѣсто CD точекъ пересѣченія m , m' , m'' , каждаго двухъ смежныхъ радиусовъ r и r' , r' и r'' , r'' и r''' , будетъ изображать *несовершенную эволюту* предложенной кривой AB .

Ланкре (Lancret), во вступивъ томъ изданія: *Mémoires présentés à l'Institut par divers sçavans*, 1811 г. предлагая разнымъ изслѣдованію объ несовершенныхъ эволютахъ, которыя онъ называетъ *développées*. Числители найдутъ въ его Разсужденіи многа любопытныя замѣчанія какъ объ самыхъ кривыхъ этого рода, такъ и о поверхностяхъ, на которыя онѣ могутъ быть начерчены.

DÉVELOPPÉMENT. (Геом.) РАЗВЕРТЫВАНІЕ, РАЗВЕРЗАНІЕ. Дѣйствіе, посредствомъ котораго развертываютъ кривую линію или поверхность. Смол. DÉVELOPPÉE, DÉVELOPPABLE. (SURFACE). — Въ Начальной Геометріи, а также и въ Начертательной, подъ этимъ словомъ разумѣютъ плоскую фигуру, представляющую развернутую поверхность какого нибудь тѣла. Таковы напримеръ фигуры $ABCDEF$ (черт. 16 Листъ VII) и $ABCDE$ (черт. 17 Листъ VII); первая изображаетъ *развернутое цилиндрическое*, а вторая, *половину развернутого коническаго тѣла*.

DÉVELOPPÉMENT. (Алг.) РАЗЛОЖЕНІЕ, РАЗВЕРТЫВАНІЕ, РАСКРЫТІЕ. — РАДЪ, СТРОКА. Такъ называютъ дѣйствіе, посредствомъ котораго выражаютъ какую нибудь функцию конечной или безконечной строкою. *Développement d'une fraction, d'un radical, d'une fonction trigonométrique en série; développement d'un radical, d'une fonction trigonométrique en série; développement d'une fonction en série.* — Слѣдъ строки часто называется такъ

же разложение.м. — *Développement d'un calcul; подробности вычисления, выкладки.*

DÉVELOPPEMENT (MÉTHODE DE). См. CULTÉLLATION.

DÉVELOPPER. (Анал. и Геом.) **РАЗЛОЖИТЬ, РАЗВЕРНУТЬ, РАЗВИТЬ, РАСКРЫТЬ.** См. DÉVELOPPEMENT. *Développer un logarithme en série; разложить логарифм в ряд. Développer un cône, un cylindre; развернуть конус, цилиндр. Développer un calcul; произвести вычисление со всеми подробностями.*

DÉVELOPOIR. См. DÉVELOPPEE IMPARFAITE.

DÉVERSOIR или **REVERSOIR.** (Гидрав.) **ВОДОСЛИВЪ.** *Водосливами* называются каменные плосины, служащая для скопления проточной воды и для удержания слъ на известном горизонтѣ.

DÉVIATION. (Мех.) **УКЛОНЕНИЕ.** *Dévation du fil à-plomb; отклоненіе отвѣса отъ вертикальнаго направленія.* См. ATTRACTION DES MONTAGNES. *Dévation ou inflexion de la lumière; отклоненіе света.* См. LUMIÈRE.

DÉVIATION или **NUTATION.** (Астр.) **КОЛЕБАНІЕ.** См. NUTATION

DI

DIABÈTE или **TANTALE.** **ДИАБЕТЪ, ТАНТАЛЬ, ГИДРАВЛИЧЕСКАЯ РЮМКА.** Чертежъ 1 (Листъ VIII) представляетъ гидравлическую рюмку; внутри этого сосуда находится согнутая стеклянная трубка, состоящая изъ двухъ частей *ab* и *bc* съ открытыми концами. Короткая часть *ab* почти примыкаетъ ко дну *EF*, а длинная проходитъ сквозь всю длину ложки *EFGD*, и оканчивается при основаніи *CD* сосуда. При такомъ устройствѣ, если налить воды въ сосудъ *ABEF* до некотораго уровня, не достигающаго высоты *LK* согнутой части сифона, то вода останется въ сосудѣ; но какъ скоро уровень воды достигнетъ высоты *LK*, то вода начнетъ вытекать изъ сосуда чрезъ сифонъ *abc*, и вытечетъ вся. Изобрѣтеніе гидросматической рюмки приписываютъ Герону Александрийскому, который и назвалъ ее *диабетомъ*. Этотъ сосудъ называютъ также

DI

иногда *танталомъ* потому что его прежде дѣлали съ изображеніемъ тантала, нагибающагося для утоленія своей жажды: вода подымалась въ сосудѣ, и едва доходила до губъ эгирки, какъ начинала опускаться, и вся вытекала.

DIACAUSTIQUE. (Опш.) **ДИАКОСТИКА.** *Surface, courbe diacaustique* или *caustique par réfraction; диакостическая поверхность, линія; зажигающая чрезъ преломленіе.* Въспъ образованіе диакостической кривой:

Вообразимъ безконечное число лучей, исходящихъ изъ свѣщающейся точки *O* (черт. 2 Листъ VIII), и падающихъ въ точкахъ *m*, *m'*, *m''*, на данную кривую *Lmn'm''M*. Положимъ, что эти лучи преломляются приближаясь или удаляясь отъ нормали къ кривой, и при этомъ такъ, что отношеніе синуса угла паденія къ синусу угла преломленія останется постояннымъ. Напримѣръ, если допустимъ что лучъ *OA*, падающій въ точкѣ *m* на предложенную кривую, пойдетъ по направленію *mn*, составляя уголъ *Bmn = q'* съ нормалью *mB*, то синусъ угла паденія *BmA = φ* долженъ относиться къ синусу угла преломленія *Bmn*, какъ данное число *k*, къ данному же *h*. Однимъ словомъ, для каждой точки расширяемой кривой должно быть $\frac{\sin \varphi}{\sin q'} = k$, разумѣя подъ *k* величину постоянную. Кривая *Lmn'm''K*, образуемая послѣдовательными пересѣченіями преломленныхъ лучей *mn*, *m'n'*, *m''n''*, называется *диакостикой* или *каустической кривою чрезъ преломленіе*.

На этомъ основаніи, и соображаясь съ этимъ, что сказано въ слѣдѣ CAUSTIQUE (См.), легко будетъ вывести уравненіе диакостики для какой ни есть кривой линіи.

DIACENTROS. (Астр.) Такъ назыв. *Кеплеръ* именную ось, или, что все равно, *кратчайшій диаметръ* эллиптической планетной орбиты. Это наименованіе совсѣхъ вышло изъ употребленія

DIACOUSTIQUE или **DIAPHONIQUE.** **ДИАКУСТИКА** или **ДИАФОНКА.** Часть Акустики, изучающая предметомъ явленія, сопровождающія переходъ звуковъ изъ рѣдчайшихъ средъ въ плотнѣйшія, или наоборотъ; и такъ, *Диакустика* занимается теоріею преломленныхъ звуковъ.

DIAGONALE. (Геом.) **ДИАГОНАЛЬ, ДИАГОНАЛЬНАЯ ЛИНИЯ.** Так называется прямая, соединяющая вершины двух не смежных угловъ въ какой нѣ есть прямолинейной «фигурѣ» или въ многогранникѣ. Таковыя линіи AC и AD (черт. 3 Листъ VIII) въ пятиугольникѣ $ABCDE$ и линія OU въ параллелограммѣ LM . — Нѣкоторые авторы называли также діагональ *diametrale* или *diametrale figure* (*diamètre* или *diamétral de la figure*). Эти наименованія вышли теперь изъ употребленія.

DIAGONALEMENT, ДИАГОНАЛЬНО, ПО ДИАГОНАЛИ. По направленію діагонали.

DIAGRAMME. Не упот. **ЧЕРТЕЖЪ, ФИГУРА, НАЧЕРТАНИЕ, ПОСТРОЕНИЕ.** Смот. FIGURE.

DIALYTIQUE (LUNETTE). (Опти.) **ДИАЛИТИЧЕСКАЯ ТРУБА.** Предметное стекло астрономическихъ, такъ называемыхъ *ахроматическихкихъ* трубъ, составлено изъ двухъ, разнородныхъ по составу своему стеколъ, извѣстныхъ подъ названіями *флинтъ-стекла* и *крупнъ-стекла*. Приготовленіе такихъ стеколъ большого размера, совершенно прозрачныхъ, безъ полосъ или спуръ и безъ пузырьковъ, сопряжено съ большими затрудненіями, въ особенности же флинтъ-стекла, который, по причинѣ заключающейся въ немъ примѣсь свинца, рѣдко можетъ быть полученъ въ однородной массѣ. Этого недостатка, а съ другой стороны и малое различіе упомянутыхъ стеколъ въ отношеніи къ разности преломленія лучей краснаго и фиолетоваго, — ибо найдено, что эти разности преломленія въ крупнъ-стеклѣ и флинтъ-стеклѣ содержатся почти какъ 1,5 къ 1,6, — побуждалъ оптичковъ мыслить о составленіи другаго рода стеколъ, который бы удобнѣе изготовлялись, и, сверхъ того, имѣли бы большую разность отношенія преломленія крайнихъ лучей. Предположивъ стеклу весьма омычаннымъ отъ прежнихъ въ разсужденіи упомянутой разности преломленія лучей краснаго и фиолетоваго, имѣли, неосредствомъ аналитическихъ вычисленій, что двѣ четверти, изъ которыхъ составляется предметное стекло, не должны находиться въ сопряженіи, но въ довольно значительномъ разстояніи одна отъ

другой, такъ что, при благоприятныхъ обстоятельствахъ, вторая четверть должна находиться почти въ серединѣ телескопа. По причинѣ раздѣленія двухъ четвертей, зрительныя трубы, устроенныя по этому способу, называются *диалитическими* (отъ Греческ. *diá* и *lōg*, *разлагаю*).

Вѣсикій оптикъ *Плессель* приспособилъ много такихъ телескоповъ; оны, по свидѣтельству знающихъ, оказались весьма удовлетворительными, и превзошли *Доллонды* ахроматическія трубы, одинаковаго съ ними размера.

DIAMÉTRAL D'UNE FIGURE. Смот. DIAGONALE.

DIAMÉTRAL. (Геом.) **ДИАМЕТРАЛЬНЫЙ, ПОПЕРЕЧНЫЙ.** *Section diamétrale; диаметральное, поперечное сѣченіе. Plan diamétral; диаметральная плоскость.* Плоскость, проходящая чрезъ центръ кривой поверхности. — Въ болѣе точномъ смыслѣ плоскость, раздѣляющая пополамъ систему параллельныхъ хордъ; когда диаметральная плоскость пересѣкаетъ свою систему параллельныхъ хордъ подъ прямымъ угломъ, то она называется *главною* (*plan diamétral principal*).

PLANS DIAMÉTRAUX CONJUGUÉS. Сопряженные диаметральныя плоскости. Три плоскости называющіяся *сопряженными диаметральными* относительно кривой поверхности, когда каждая изъ нихъ раздѣляетъ пополамъ систему хордъ, параллельныхъ пересѣченію двухъ остальныхъ плоскостей. Сказанное въ снѣзхъ **DIAMETRES CONJUGUES** легко можетъ быть распространено и на сопряженные диаметральныя плоскости.

SURFACE DIAMÉTRALE. Диаметральная поверхность. Геометрическое мѣсто серединъ всѣхъ параллельныхъ хордъ разсматриваемой поверхности. Когда геометрическое мѣсто, о которомъ говоримъ, обращается въ плоскость, то сія послѣдняя принимаетъ названіе *диаметральной*.

DIAMÉTRAL (NOMBRE). (Ариф.) Не упот. **ДИАМЕТРАЛЬНОЕ ЧИСЛО.** Произведеніе такихъ двухъ множителей цѣлыхъ, коихъ квадраты, сложенные вмѣстѣ, дають также квадратное чи-

сло Напрямить $3 \times 4 = 12$, $5 \times 12 = 60$ суть диаметральныя числа, ибо $3^2 + 4^2 = 5^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2$. Легко доказать, что такого рода чисел существует безчисленное множество. Смол. DIOPHANTE (PROBLÈMES DE).

DIAMÉTRALEMENT. ДИАМЕТРАЛЬНО, ПОПЕРЕЧНО. *Diamétralement opposé; прямо-противоположно.*

DIAMÈTRE. (Геом. Онь Греческ. δ.σ. *поперек и мѣромъ, мѣра.* **ДИАМЕТРЪ, ПОПЕРЕЧНИКЪ.** Такъ называють въ Начальной Геометріи прямую линію, проходящую чрезъ центръ круга, и ограниченную съ двухъ сторонъ его окружностію. *Rapport du diamètre à la circonférence; отношение диаметра къ окружности.* Смол. CIRCONFÉRENCE. — Вообще, *диаметромъ* какой нибудь кривой или поверхности называется прямая, проходящая чрезъ центръ сей кривой или поверхности. Смол. CENTRE. Подъ *диаметромъ* разумѣютъ также определенную длину прямой, проведенной чрезъ центръ и ограниченной съ обѣихъ сторонъ очертаніемъ кривой линіи. — Въ болѣе тѣсномъ значеніи, *диаметромъ* называютъ прямую, ограниченную съ обѣихъ сторонъ очертаніемъ кривой, и раздѣляющую пополамъ систему параллельныхъ хордъ той самой кривой. Въ этомъ смыслѣ, многія кривыя, не имѣющія центра, могутъ имѣть не только одинъ, но и безчисленное число диаметровъ, какъ напримѣръ *парабола*. Когда диаметръ перпендикуляренъ къ хордамъ, которыя раздѣляетъ пополамъ, то онъ принимается названіе *главной диаметровой оси*, или, просто *оси*. Смол. АХЕ.

DIAMÈTRE D'UNE SPHÈRE. Диаметръ, поперечникъ шара. Прямая, проходящая чрезъ центръ шара, и ограниченная съ обѣихъ сторонъ его поверхностію.

DIAMÈTRES CONJUGUÉS. Сопряженные диаметры Два диаметра плоской кривой называются *сопряженными*, когда каждый изъ нихъ раздѣляетъ пополамъ систему хордъ, параллельныхъ другому диаметру. Изъ этого опредѣленія легко усмотрѣть, что если примемъ два сопряженные диаметра за координатныя оси, и отнесемъ къ нимъ осямъ разсматриваемую кривую, то ея уравненіе будетъ заключать въ себя толь-

ко *тѣмъ* степенямъ координатъ. Действительно, изъ опредѣленія сопряженныхъ диаметровъ слѣдуетъ, что каждой абсциссѣ соотвѣствующъ двѣ ординаты равныя, но съ противоположными знаками, почему уравненіе кривой и должно быть четной степени въ отношеніи къ ординатѣ; то же самое можно сказать и объ абсциссѣ. Слѣдовательно, если изобразить чрезъ x' и y' перемѣнныя координаты разсматриваемой кривой, отнесенной къ системѣ двухъ сопряженныхъ диаметровъ, то ея уравненіе будетъ вида $f(x'^2, y'^2) = 0$.

Для объясненія сказаннаго здѣсь о сопряженныхъ диаметрахъ, разсмотримъ ихъ въ *коническихъ сгенідахъ*.

Начнемъ съ *эллиса*. Прежде всего замѣтимъ, что всѣ диаметры этой кривой пересѣкаются въ центрѣ; слѣдовательно, для опредѣленія всѣхъ системъ сопряженныхъ диаметровъ эллиса, должно разсмотрѣть общее его уравненіе относительно хосоугольныхъ осей, принимая центръ за начало координатъ.

Принявъ центръ эллиса за начало координатъ, а оси этой кривой за координатныя, получимъ уравненіе

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

въ которомъ a и b изображаютъ полу оси эллиса, а x и y прямоугольныя его координаты. Чтобы измѣнить направленіе координатныхъ осей, не измѣняя начала, сдвинемъ только положимъ

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha + y' \sin \alpha, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \end{aligned}$$

разумѣя подъ x' и y' новую систему координатъ, а подъ α и β углы, составляемые новыми осями x' -овъ и y' -овъ со старою осью абсциссъ; Смол. TRANSFORMATION DES COORDONNÉES. Подставляя предыдущія величины x и y въ уравн.

(1), получимъ

$$(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha) x'^2 + (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha) y'^2 + 2(a^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta + b^2 \cos \alpha \cdot \cos \beta) x' y' = a^2 b^2.$$

Чтобы система координатныхъ осей совпадала съ системою сопряженныхъ диаметровъ, преобразованное уравненіе должно быть четной степени, и слѣдовательно, оно не должно заключать въ себя члена $x'y'$; и такъ

$$(2) \quad a^2 \sin \gamma \cdot \sin \beta + b^2 \cos \gamma \cdot \cos \beta = 0,$$

из следствия чего получимъ

$$(3) \quad \frac{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}{a^2 b^2} \gamma^2 + \frac{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}{a^2 b^2} \gamma^2 = 1.$$

Уравнение (2), изъ котораго выводимъ

$$(4) \quad \tan \gamma \cdot \tan \beta = -\frac{b^2}{a^2},$$

показываетъ, что для всякаго эллипса существуютъ безчисленное множество косоугольныхъ системъ сопряженныхъ диаметровъ. Идѣйствительно, давая какое угодно направление одному диаметру, то есть выбирая по произволу уголъ α , направление другаго диаметра найдется уже изъ уравненія (4), которое опредѣляетъ уголъ β . Легко видѣть, что эллипсъ имѣетъ только одну систему прямоугольныхъ сопряженныхъ диаметровъ, а именно, систему своихъ осей; въ самомъ дѣлѣ, чтобы оси x' -овъ и y' -овъ пересѣкались подъ прямымъ угломъ, должно быть $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$, откуда $\sin \beta = +\cos \alpha$ и $\cos \beta = -\sin \alpha$; подставляя эти величины въ уравн (2), получимъ

$$(a^2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

Чтобы удовлетворить этому уравненію, должно положить $\sin \alpha = 0$ или $\cos \alpha = 0$; первое предположеніе доставляетъ $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$, а второе $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = \frac{3\pi}{2}$. Въ обоихъ случаяхъ сопряженные диаметры совпадаютъ съ осями эллипса.

Уравненіе $(a^2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha = 0$ удовлетво- рится независимо отъ угла α , когда $b = a$, то есть, когда эллипсъ обращается въ кругъ. Следовательно, кругъ допускаетъ безчисленное множество системъ прямоугольныхъ сопряженныхъ диаметровъ, что и очевидно.

Уравненіе (4) показываетъ, что два диаметра, соответственно параллельные двумъ дополнительнымъ хордамъ въ эллипсѣ, будутъ сопряженны между собою, и что два какіе ни есть сопряженные диаметра соответственно параллельны двумъ дополнительнымъ хордамъ. На этомъ свойствѣ основанъ способъ для проведенія касательной къ эллипсу. См. *CORDES SUPPLÉMENTAIRES*

Выведемъ изъ уравн. (3) величины сопряженныхъ диаметровъ; если положимъ въ немъ послѣдовательно $\gamma = 0$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, то получимъ разстоя-

нія центра эллипса отъ точекъ, въ которыхъ кривая пересѣчется направлениемъ сопряженныхъ диаметровъ. Изобразимъ эти разстоянія, то есть полу-диаметры, чрезъ a' и b' , найдешь формулы

$$(5) \quad a'^2 = \frac{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}, \quad b'^2 = \frac{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha},$$

въ слѣдствіе которыхъ уравн. (3) приметъ видъ

$$\frac{a'^2}{a^2} + \frac{b'^2}{b^2} = 1$$

Параметромъ диаметра $2a'$ (paramètre du diamètre $2a'$) называется третья пропорціональная къ атому диаметру и его сопряженному; и такъ $\frac{2a'}{b'}$

и $\frac{2b'}{a'}$ изображаютъ соответственно параметры диаметровъ $2a'$ и $2b'$

Если перемножимъ между собою уравненія (5), то получимъ

$$a'^2 b'^2 = \frac{a^4 b^4}{a^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + a^2 b^2 (\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha) + b^4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \frac{a^4 b^4}{a^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + a^2 b^2 (\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha) + b^4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}$$

знаменатель этой дроби можетъ быть изображенъ суммою двухъ членовъ

$$(a^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta + b^2 \cos \alpha \cdot \cos \beta)^2 + a^2 b^2 \sin^2 (\beta - \alpha),$$

изъ которыхъ первый, въ силу уравн. (2), равенъ нулю. Следовательно

$$(6) \quad a'^2 b'^2 = \frac{a^4 b^4}{\sin^2 (\beta - \alpha)} \quad \text{или} \quad ab = a'b' \sin (\beta - \alpha).$$

Послѣдняя формула показываетъ, что площадь параллелограмма, построеннаго на двухъ сопряженныхъ диаметрахъ эллипса, равна прямоугольнику, составленному на осяхъ этой кривой

Уравненія (4) и (5) могутъ быть написаны въ видѣ

$$a^2 \tan \alpha \tan \beta + b^2 = 0$$

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + \tan^2 \alpha)}{a^2 \tan^2 \alpha + b^2}$$

$$b'^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + \tan^2 \beta)}{a^2 \tan^2 \beta + b^2};$$

исключая изъ сихъ уравненій $\tan \alpha$ и $\tan \beta$, получимъ формулу

$$(7) \quad a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2,$$

которая показываетъ, что сумма квадратовъ двухъ сопряженныхъ диаметровъ эллипса, равна суммѣ квадратовъ двухъ осей этой кривой.

Уравненія (4), (6) и (7), разсмотрѣнные въ совокупности, опредѣляютъ три какія ни есть изъ шести величины a, b, a', b', c, ρ , когда три остальныхъ известны

Перейдем теперь къ сопряженным диаметрам гиперболы. Если опишемъ эту кривую къ ея осямъ принявъ центръ за начало координатъ, то получимъ уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

гдѣ x и y изображаютъ прямоугольныя координаты, а a и b полу-оси; очевидно, что выведенныя формулы для сопряженных диаметровъ эллипса, будутъ прилчествовать и сопряженнымъ диаметрамъ гиперболы, лишь бы только замѣнили въ нихъ b и b' нѣмыми выраженіями $b\sqrt{-1}$ и $b'\sqrt{-1}$, а b^2 и b'^2 , величинами $-b^2$ и $-b'^2$, ибо уравненіе гиперболы различается отъ уравненія эллипса только знакомъ передъ b^2 . И такъ, для гиперболы, формулы (4), (6) и (7), примутъ видъ

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \epsilon \cdot \operatorname{tang} \beta &= \frac{b^2}{a^2} \\ ab &= a' b' \sin(\beta - \epsilon) \\ a'^2 - b'^2 &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

Первое изъ сихъ уравненій показываетъ, что можно провести черезъ крайнія точки осей 2а двѣ дополнительные хорды, соответственно параллельныя другъ другу каковыя ли есть сопряженнымъ диаметрамъ гиперболы. Сюзи. CORDES SUPPLÉMENTAIRES.

Изъ втораго уравненія усматриваемъ, что параллелограммъ, построенный на двухъ сопряженныхъ диаметрахъ гиперболы, равенъ прямоугольнику, построенному на ея осяхъ.

Наконецъ, прѣше уравненіе показываетъ, что разность квадратовъ, построенныхъ на сопряженныхъ диаметрахъ, равна разности квадратовъ, построенныхъ на осяхъ гиперболы. Изъ той же формулы видимъ, что одна равносторонняя гиперболы имѣетъ равные сопряженные диаметры, ибо полагая $b' = a'$ найдемъ $b = a$, и наоборотъ.

Легко видѣть что парабола не имѣетъ ни одной системы сопряженныхъ диаметровъ; и въ самомъ дѣлѣ, уравненіе этой кривой ни въ какомъ случаѣ не можетъ заключать въ себѣ только квадраты координатъ съ постояннымъ членомъ, что составляетъ необходимое условіе для существованія сопряженныхъ диаметровъ въ кривыхъ второго порядка. Но можно предположить себѣ

вопросъ, найми такія системы косоугольныхъ координатныхъ осей, относительно которыхъ уравненіе параболы будетъ заключать въ себѣ только квадраты одной изъ координатъ, напримѣръ, квадраты ординатъ. Въ такомъ предположеніи новая ось абсциссъ очевидно будетъ диаметромъ этой кривой, ибо она раздѣляетъ пополамъ систему хордъ, параллельныхъ новой оси ординатъ.

И такъ, возьмемъ уравненіе

$$(8) \quad y^2 = px,$$

принадлежащее параболѣ, описанной къ прямоугольнымъ осямъ, пересѣкающимся въ ея вершинѣ; здѣсь предполагается, что ось x -овъ совпадаетъ съ осью параболы, коей параметръ изображенъ чрезъ p .

Для измѣненія системы координатныхъ осей, должно положить

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha + y' \sin \alpha + a \\ y &= x' \sin \alpha + y' \sin \beta + b, \end{aligned}$$

гдѣ ϵ , β , x' , y' имѣютъ прежнія значенія, а a и b изображаютъ координаты новаго начала. Подставивъ эти величины x и y въ уравн. (8) получимъ

$$(9) \quad \begin{cases} y'^2 \sin^2 \beta + 2x'y' \sin \alpha \sin \beta + x'^2 \sin^2 \alpha \\ + 2x' \sin \alpha + 2y' \sin \beta - p \cos \alpha - p' \cos \beta + 2x' \sin \alpha + 2y' \sin \beta - pa = 0. \end{cases}$$

Чтобы это уравненіе не заключало въ себѣ первой степени ординаты y' , надобно положить

$$(10) \quad \sin \alpha \sin \beta = 0 \text{ и } 2b \sin \beta - p \cos \beta = 0;$$

изъ втораго уравненія выводимъ $\operatorname{tang} \beta = \frac{p}{2b}$; следовательно $\operatorname{tang} \beta$, а равно и $\sin \beta = \frac{\operatorname{tang} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \beta}}$

$= \frac{p}{\sqrt{p^2 + 4b^2}}$, не могутъ обратиться въ нуль, ибо ордината b не должна быть бесконечною. И такъ, первое изъ уравненій (10) доставитъ $\sin \alpha = 0$, откуда $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$, а это показываетъ, что новая ось абсциссъ параллельна старой, то есть параллельна самой оси параболы.

На этомъ основаніи уравненіе (9) приметъ видъ

$$y'^2 \sin^2 \beta - px' + b^2 - pa = 0$$

или, по причинѣ $\sin^2 \beta = \frac{p^2}{p^2 + 4b^2}$,

$$(11) \quad y'^2 = \frac{p^2 + 4b^2}{p} \cdot x' - \frac{p^2 + 4b^2}{p^2} (b^2 - pa).$$

Выведенное выше выражение $\tan \gamma = \frac{p}{2b}$ определяет направление новой оси ординатъ; но $\frac{p}{2b}$ изображаетъ тригонометрический тангенсъ угла, составляемаго касательною въ точкѣ параболы, которая опредѣляется ординатою b ; следовательно, для опредѣленія новыхъ осей, беремъ въ плоскости параболы произвольную точку O , и проводимъ чрезъ нее линію, параллельную оси параболы; эта линія будетъ новая ось абсциссъ. Если продолжимъ новую ось абсциссъ до ея пересѣченія M съ параболою, а чрезъ точку M проведемъ касательную, то линія, проходящая чрезъ новое начало O , и параллельная касательной, изобразитъ новую ось ординатъ. По свойствамъ новыхъ координатныхъ осей, всѣ хорды параболы, параллельныя оси ординатъ, будутъ раздѣлены пополамъ осью абсциссъ.

Уравненіе (11) приметъ весьма простой видъ, когда возьмемъ новое начало координатъ на самой параболѣ; действительно, въ этомъ предположеніи $b^2 = pa$, и следовательно

$$y^2 = p'x'$$

гдѣ для краткости положили $\frac{1}{p} + \frac{4b^2}{p} = p'$. Замѣтимъ, что это уравненіе одинаковаго вида съ уравн. (8). Легко доказать, что параметръ p' параболы, отнесенной къ разсѣпанной системѣ координатъ, равенъ удвоенному разстоянію фокуса отъ новаго начала. И действительно, по приняты $b^2 = pa$, находимъ

$$p' = p + \frac{4b^2}{p} = p + 4a = 4\left(a + \frac{p}{4}\right);$$

но $a + \frac{p}{4}$ изображаетъ разстояніе фокуса отъ точки параболы, определяемой координатами a и b , ибо это разстояніе выражается ради-
КАТОМЪ

$$\sqrt{b^2 + \left(a - \frac{1}{4}p\right)^2},$$

который, по приняты $b^2 = pa$, доставляетъ

$$\sqrt{pa + \left(a - \frac{1}{4}p\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{ap}{2} + \frac{p^2}{16}} = a + \frac{1}{4}p.$$

СОТРЕ ДІАМЕТРЪ. Противо-діаметръ, противо-поперечникъ. Такъ называлъ бражелонъ *Brageleone* такую ось абсциссъ, отнесенную къ которой равняютъ и

противоположныя абсциссамъ, соответствующія равныя и противоположныя величинныя ординаты. И такъ, если бы кривая была отнесена къ такой оси x -овъ, что для $x = a$ имѣли бы $y = b$, а для $x = -a$, получили бы $y = -b$, какова бы ни была величина a , то такая ось абсциссъ была бы *противо-діаметромъ* кривой.

ДІАМЕТРЕ СЪРВИЛІОНЕ. Криволинейный діаметръ. Кривая, раздѣляющая пополамъ систему параллельныхъ хордъ какой нѣ есть кривой линіи. Напримеръ, если опишемъ кривую CdB черт. 4 Листъ VIII, къ прямоугольнымъ осямъ OX , OY , то получимъ *криволинейный ея діаметръ* ADE , который будетъ дѣлить пополамъ въ точкахъ P , P' , P'' каждую изъ хордъ MN , $M'N'$, $M''N''$

ДІАМЕТРЕ. (Mex.) **ДІАМЕТРЪ, ПОПЕРЕЧНИКЪ.** *Diamètre de gravité; diamètre тяжести.* Прямая, проходящая чрезъ центр тяжести тела. *Diamètre de rotation; diamètre вращения.* Прямая линія, около которой обращается тело.

ДІАМЕТРЕ. (Астр.) **ДІАМЕТРЪ, ПОПЕРЕЧНИКЪ.** *Diamètre des apsides; диаметръ апсидовъ.* Такъ называли прежде астрономы часть линіи апсидовъ, ограниченную съ обѣихъ сторонъ окружностію эллипса. Смол. **APSIDE, EPICYCLE.**

ДІАМЕТРЕS DES PLANETES Въ Астрономіи разсѣпанную *видимую и истинную діаметры планетъ*. Видимымъ діаметромъ (*diamètre apparent*) называется уголъ, составляемый двумя лучами зрѣнія, проведенными отъ глаза наблюдателя къ концамъ поперечника планеты, то есть къ концамъ линіи, проходящей чрезъ центр той планеты, и ограниченной ея окружностію. Такъ какъ эти углы весьма малы для всѣхъ планетъ, то видимые діаметры можно принимать за хорды круговъ, имеющихъ общій центромъ глазъ наблюдателя, а радиусами, различныя разстоянія планетъ отъ мѣста наблюденія. Но известно, что эти разстоянія перемѣняются для одной и той же планеты по причинѣ ея движенія; следовательно и видимый діаметръ планеты долженъ также перемѣняться, не выходя впрочемъ

изъ известныхъ предѣловъ. Очевидно, что видимый діаметръ одной и той же планеты обратно пропорціоналенъ ея разстоянію отъ наблюдателя.

Видимые діаметры служатъ къ опредѣленію истинныхъ, когда разстоянія планетъ отъ наблюдателя известны. Истиннымъ діаметромъ (*diamètre réel*, планеты называется истинная величина ея, выраженная въ известной мѣрѣ, напримеръ въ миляхъ, верстахъ, мѣрахъ и проч. или еще, отношеніе діаметра планеты къ діаметру земли, полагая ея известнымъ, и принявшаго за единицу.

Слѣдующая таблица, которую заимствуемъ изъ книги: *Theoretische und praktische Astronomie* von Littrow, содержитъ въ себѣ 1°. Видимые діаметры древнихъ планетъ для средняго разстоянія солнца отъ земли. 2° Наибольшій и наименьшій ихъ діаметры, усматриваемые съ земли, и 3°. Истинные поперечники планетъ, выраженные въ поперечникъ земли, который принять за единицу. Что касается до діаметровъ новыхъ, такъ называемыхъ *телескопическихъ* планетъ, то они еще не опредѣлены съ точностію, почему и не внесены въ таблицу. Эти планеты представляются намъ какъ звѣзды отъ 7-ой до 12-ой величины.

	Видимый поперечникъ для средняго разстоянія солнца отъ земли	Поперечники, видимые съ земли:		Истинные поперечники
		Наиб.	Наим.	
Меркурій.	6".6	11".5	5".0	0.584
Венера.	16".5	59".8	9".6	0.939
Земля.	17".2	—	—	1.000
Марсъ.	8".9	17".1	3".6	0.517
Юпитеръ.	186".8	44".5	30".1	10.860
Сатурнъ.	171".7	20".1	16".3	9.982
Уранъ.	74".5	4".1	3".7	4.331
Солнце.	1922".0	32".36"	31".51"	111.740

Чтобы выразить діаметры планетъ въ известной мѣрѣ, напримеръ въ мѣрахъ или верстахъ, стоитъ только замѣнить, что діаметръ земли = 11953 верстамъ.

DIAPHANE. (Опн.) **ПРОЗРАЧНЫЙ.** *Milieux diaphanes; прозрачныя среды.*

DIAPHANÉTÉ. **ПРОЗРАЧНОСТЬ.**

DIAPHONIQUE или **DIACOUSTIQUE** (Смол).

DIAPHRASME. ДИАФРАГМА, ПЕРЕГОРОДКА.

Тонкій вычерченный кружокъ, обыкновенно металлическій, съ круглымъ отверстіемъ въ серединѣ. Діафрагмы пожимаются въ тѣхъ мѣстахъ зрительной трубы, въ которыхъ составляются изображенія предметовъ; они дѣлаются для того, чтобы лучи, слишкомъ уклоняющіеся отъ направленія оси трубы, не доходили до глаза.

DIATHERME (CORPS). (Физ.) ТЕПЛО-ПРОПУСКАЮЩИЙ

тѣло называется всякое тѣло, пропускающее сквозь себя лучистую теплоту. подобно тому, какъ средня, пропускающая свѣтъ, именуется *прозрачною* (*diaphane*). Большею частью прозрачныя тѣла одаены въ-сѣхъ и способностію пропускать теплоту; однако же есть исключенія. Напримеръ, тонкій слой воды, заключенный между двумя стеклянными пластинками, пропускаетъ свѣтъ, а почти не пропускаетъ тѣмной лучистой теплоты. Напротивъ того, тѣло называется *тепло-непропускающимъ* (*atherme*), когда оно не пропускаетъ сквозь себя лучистой теплоты. Этого свойства тѣла вѣютъ въ отношеніи къ теплу такое же значеніе, какъ тѣла *непрозрачныя* или *тѣмныя* въ разсужденіи свѣта. — Наименованія *diatherme* и *atherme* введены недавно Итальянскими физиками *Меллони*.

DICHOTOME. (Астр.) *La lune est dichotome, луны перал или послѣдняя четверть.* Смол. ниже.

DICHOTOMIE или DICHOTOMOS. (Астр.)

Отъ Греческ: *δις*, дважды, *τόμος*, часть. **ДИХОТОМІЯ, ПЕРЕКОЙ, ПОЛУЛУНІЕ.** — Первая и послѣдняя четверть луны. — Видъ луны, когда освѣщенная ея часть представляется полукружіемъ, отдѣленнымъ прямою линіею отъ неосвѣщенной части.

DIÈDRE (ANGLE). ДВУГРАННЫЙ УГОЛЬ.

Смол. ANGLE.

DIFFERENCE. (Ари.) РАЗНОСТЬ.

Избытокъ одной величины предъ другою, или, иначе, остатокъ получаемый отъ вычитанія одной величины изъ другой, одинаковаго рода съ первою.

И такъ, разность двухъ чиселъ 11 и 5 есть 6; $a - b$ изображаетъ разность между количествами a и b . Когда $b < a$, то разность $a - b$ положительная, а когда $b > a$, то эта разность отрицательная. Смол. SOLSTRACTION. — Иногда слово *différence* употребляется въ одномъ смыслѣ съ *différentielle*; и такъ, говорятъ: *équation aux différences* (вмѣсто *différentielles*) *partielles*, *уравненіе въ частныхъ дифференціалахъ*. Смол. DIFFÉRENTIEL (CALCUL).

DIFFÉRENCES DES RACINES (ÉQUATION AUX). (Алг.) *Уравненіе въ разностяхъ корней*. Смол. CARRES (ÉQUATION AUX — DES DIFFÉRENCES).

DIFFÉRENCES FINIES (ÉQUATION AUX). УРАВНЕНІЕ ВЪ КОНЕЧНЫХЪ РАЗНОСТЯХЪ. Смол. DIFFÉRENCES FINIES (CALCUL AUX). *Équation aux différences partielles*; *уравненіе въ частныхъ дифференціалахъ*. Смол. DIFFÉRENTIEL (CALCUL), INTÉGRAL (CALCUL).

DIFFÉRENCE DU LOGARITHME. Не уполн. Такъ называли *Неперъ* и *Урсинъ* (*Ursin*) *логарифмъ тангенса*, потому что онъ равенъ разности логарифмовъ синуса и косинуса. Неперъ употребилъ это наименованіе въ книгѣ *Canon mirificus Logarithmorum*, а Урсинъ въ своей *Trigonometria*.

DIFFÉRENCE. (Астр.) РАЗНОСТЬ. *Différence de latitude, de longitude, différence ascensionnelle* и проч. *Разность широты, долготы, восхожденій* и проч. Смол. LATITUDE, LONGITUDE, ASCENSION OBLIQUE и проч. — ДИФФЕРЕНЦИАЛЬ. Смол. DIFFÉRENTIELLE.

DIFFÉRENCES FINIES (CALCUL AUX). ИСЧИСЛЕНІЕ КОНЕЧНЫХЪ РАЗНОСТЕЙ. Совокупность правилъ, посредствомъ которыхъ опредѣляются: 1° Измѣненія, которымъ подвергаются какія ни есть функции, когда входящія въ нихъ переменныя величины получаютъ конечныя приращенія, и 2° Первообразныя состоянія функций, когда измѣненныя ихъ виды извѣстны. Рѣшеніе первой изъ сихъ двухъ задачъ составляетъ предметъ *прямой способъ разностей* (*méthode directe des différences*), а второй — *обратный*

способъ (*méthode inverse des différences*). Точно такъ же раздѣляютъ и *анализъ безконечныхъ величинъ*: въ немъ разсматриваютъ *прямой способъ дифференціаловъ*, или просто *дифференціальное Ичисленіе*, и *обратный способъ*, называемый обыкновенно *Интегральнымъ Ичисленіемъ*. Такое пожатіе въ раздѣленіи *Разностнаго и Дифференціальнаго Ичисленій* очень естественное по тѣсной связи, существующей между этими двумя способами. Смол. DIFFÉRENTIEL (CALCUL).

Первые слѣды Ичисленія Разностей усматриваемъ въ нѣкоторыхъ способахъ *Ферматъ*, *Кавониа Мупона**, *Барроу* и *Лейбница*. Но первый, предожившій это Ичисленіе въ видѣ самостоятельнаго, былъ извѣстный Англіійскій математикъ *Тайлоръ*, который въ 1715 году издалъ ономъ способъ книгу подъ заглавіемъ: *Methodus incrementorum directa et inversa*. Поздѣ Тайлоръ, Французскій математикъ *Николь* (*Nicole*) обогатилъ Ичисленіе Разностей многими примѣчательными изслѣдованіями: его труды по сему предмету помѣщены въ *Запискахъ Парижской Академіи* за 1717, 1723, 1724 и 1727 годъ. Вслѣдствіи, *Кондорсетъ*, *Ойерсонъ*, и преимущественно *Вйлера*, *Лагранжъ* и *Лапласъ* усовершенствовали сію важную отрасль Чистаго Анализа, и показали многоразличныя его приложенія къ интерполированію рядовъ, къ ихъ суммированію, къ теоріи соединеній, и въ особенностяхъ къ Ичисленію Вѣроятностей.

Числители могутъ почерпнуть обширныя свѣдѣнія объ Ичисленіи Разностей въ твореніяхъ знаменитыхъ математиковъ, о которыхъ мы сей-часъ упоминали. Ограничимся краткимъ изложеньемъ главныхъ правилъ этого Ичисленія и нѣкоторыми его приложеніями.

ПРЯМОЙ СПОСОБЪ РАЗНОСТЕЙ

§ 1. Разностію функции называется приращеніе, получаемое ею при переходѣ изъ одного состоянія въ ближайшее; и такъ, для полученія разности какой ни есть функции, зависящей

*) Смол. изданную имъ книгу *Obs diam Solis et Lunae apparentium*, 1670 г.

отъ сколькихъ угодно переменныхъ, спомниъ только предположить, что сія послѣдняя получила известныя конечныя приращенія, положительныя или отрицательныя, и изъ новаго состоянія функціи вычесть первообразное. Напримѣръ, если дана $u = f(x, y, z, \dots)$, а приращенія переменныхъ x, y, z, \dots равняются конечнымъ величинамъ h, i, k, \dots , то конечная разность функціи u изобразится чрезъ $f(x+h, y+i, z+k, \dots) - f(x, y, z, \dots)$

Конечную разность какой нѣ есть величины обозначимъ Греческою буквою Δ (иногда же Латинскою D), поставленную передъ величиною, которую разсматриваемъ. И такъ, разность предыдущей функціи u изобразится формулою

$$(1) \Delta u = \Delta f(x, y, z, \dots) = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots) - f(x, y, z, \dots).$$

Разность Δu будетъ вообще новою функціею прежнихъ переменныхъ; следовательно она можетъ быть подвержена тѣмъ же дѣйствіямъ, какъ и функція u . Такими образомъ получится вторая разность (*différence seconde*), которую изображаютъ знакомъ $\Delta^2 u$ (или $D^2 u$); изъ разности функціи Δu , получимъ третью разность $\Delta^3 u$, и такъ далѣе.

§ 2. Положимъ въ частности, что разсматриваемъ функцію y , зависящую отъ одной переменной x ; пусть будетъ $y = f(x)$. Въ этомъ предположеніи уравненіе (1) доставитъ

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Каждая изъ сихъ дробей называется *отношеніемъ конечныхъ разностей* (*rapport aux différences finies*). Если примемъ приращеніе Δx безконечно малымъ, то содержаніе $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

обратится въ функцію, независящую отъ приращенія Δx ; въ этомъ предположеніи, разсматриваемое отношеніе называется *производною функціи $f(x)$* или *дифференціальнымъ отношеніемъ*, и означается чрезъ $f'(x)$ или $\frac{dy}{dx}$.

§ 3. Иногда, по условію вопроса, первая разность бываетъ постоянна; такъ напримѣръ,

въ арифметической прогрессіи разность двухъ послѣдовательныхъ членовъ есть величина постоянная. Въ другихъ вопросахъ вторая разность бываетъ постоянна; напримѣръ, если бы разсматривали рядъ квадратовъ такихъ чиселъ, которая составляютъ арифметическую прогрессію, то вторыя разности были бы величинами постоянными. Это замѣчаніе можно распространить на дальнѣйшія разности.

§ 4. Для опредѣленія разности какого нѣ есть многочленнаго выраженія, спомниъ только найти разность каждаго члена, и удержать при немъ прежній его знакъ; когда въ числѣ этихъ членовъ найдутся постоянныя, то разности ихъ будутъ нули. Сверхъ того должно замѣтить, что если какой либо членъ имѣетъ коэффициентъ величину постоянную, то ее можно вынести за знакъ Δ . Въ этихъ правила обнаруживаются изъ слѣдующаго примѣра, составленнаго на основаніи формулы (1):

$$\begin{aligned} \Delta(A + Bx + Cy - Dz) &= A + B(x + \Delta x) + \\ &+ C(y + \Delta y) - D(z + \Delta z) - (A + Bx + Cy - Dz) \\ &= B\Delta x + C\Delta y - D\Delta z, \end{aligned}$$

гдѣ x, y, z изображаютъ какія нѣ есть переменныя величины, зависящія или независящія, а A, B, C, D постоянныя количества

§ 5. Въ силу сказаннаго въ предыдущихъ параграфахъ, легко будетъ составить для всякой функціи разность перваго, втораго, и вообще какого нѣ есть порядка. Вотъ нѣсколько примѣровъ:

$$\begin{aligned} \Delta(x^m) &= (x + \Delta x)^m - x^m = mx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2}\Delta x^2 \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-3}\Delta x^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\Delta(xy) = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y,$$

$$\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x + \Delta x}{y + \Delta y} - \frac{x}{y} = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y(y + \Delta y)},$$

$$\Delta[x(x + \Delta x)(x + 2\Delta x) \dots (x + n\Delta x)] = (n+1)(x + \Delta x)(x + 2\Delta x) \dots (x + n\Delta x) \cdot \Delta x,$$

$$\Delta\left[\frac{A}{x(x + \Delta x)(x + 2\Delta x) \dots (x + n\Delta x)}\right] = -\frac{A}{x(x + \Delta x)(x + 2\Delta x) \dots (x + n + 1) \Delta x},$$

$$\Delta(a^x) = (a^{x + \Delta x} - a^x) = a^x \cdot \Delta \log x = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

$$\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin\left(\frac{1}{2}\Delta x\right) \cos\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right).$$

Предполагая степень m цілою положительною, а Δx постояннымъ, найдемъ
 $\Delta^m(Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots) = 1.2.3 \dots m A \cdot \Delta x^m$

Для Δx и Δy переменныхъ, получимъ
 $\Delta^2(xy) = y \Delta^2 x + x \Delta^2 y + 2 \Delta x \Delta y + 2 \Delta y \Delta^2 x + \Delta^2 x \cdot \Delta^2 y$;
 если бы приняли Δx постояннымъ, то эта формула получила бы слѣдующій простѣйшій видъ:
 $\Delta^2(xy) = x \Delta^2 y + 2 \Delta x \Delta y + 2 \Delta x \Delta^2 x$

§ 6. Рассмотрим теперь нѣкоторые приложенія прямого способа разностей къ теоріи рядовъ и къ гиперполированію. Пусть будетъ $u = f(x)$, и допустимъ для простоты, что приращеніе Δx есть величина постоянная; сверхъ того, положимъ для краткости $f(x + \Delta x) = u_1$, $f(x + 2\Delta x) = u_2, \dots, f(x + n\Delta x) = u_n$, и рассмотримъ рядъ

$$u, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

Изъ самаго опредѣленія разностей различныхъ порядковъ, получаемъ формулы:

№ 1.	№ 2.	№ 3.
$u_1 - u = \Delta u$	$\Delta u_1 - \Delta u = \Delta^2 u$	$\Delta^2 u_1 - \Delta^2 u = \Delta^3 u$
$u_2 - u_1 = \Delta u_1$	$\Delta u_2 - \Delta u_1 = \Delta^2 u_1$	$\Delta^3 u_2 - \Delta^3 u_1 = \Delta^4 u_1$
$u_3 - u_2 = \Delta u_2$	$\Delta u_3 - \Delta u_2 = \Delta^2 u_2$
.....
$u_n - u_{n-1} = \Delta u_{n-1}$		

На основаніи § 4, изъ уравненій столбца № 1, выводимъ послѣдовательно слѣдующія формулы:

$$\begin{aligned} u_1 &= u + \Delta u \\ u_2 &= u_1 + \Delta u_1 = u + \Delta u + \Delta(u + \Delta u) \\ &= u + 2\Delta u + \Delta^2 u \\ u_3 &= u_2 + \Delta u_2 = u + 2\Delta u + \Delta^2 u + \Delta(u + 2\Delta u + \Delta^2 u) \\ &= u + 3\Delta u + 3\Delta^2 u + \Delta^3 u, \end{aligned}$$

и вообще, для какого нибудь указателя n найдемъ

$$(5) \quad u_n = f(x + n\Delta x) = u + n\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^3 u + \dots$$

Въ справедливости этой послѣдней формулы легко удостовѣриться на основаніи уравненія $u_n = u_{n-1} + \Delta u_{n-1}$, разложеніе котораго покажетъ, что если приведенный выше законъ справедливъ для указателя $n-1$, то онъ будетъ также вѣстенъ и для указателя n , а этого достаточно для нашей цѣли, ибо мы вывели непосредственно величину u_1 , и даже u_3 , и въ

обоихъ случаяхъ получили разложенія, согласующіяся съ видомъ (5).

§ 7. Изъ формулы (5) предыдущаго параграфа легко вывести извѣстную *Тайлорову теорему* Дѣйствительно, если въ уравненіи $u_n = f(x + n\Delta x)$ положимъ $n\Delta x = h$ или $n = \frac{h}{\Delta x}$, разумѣя подъ h величину конечную, то формула, о которой говоримъ, приметъ слѣдующій видъ:

$$u + h \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{h(h-\Delta x)}{1.2} \cdot \frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2} + \frac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)}{1.2.3} \cdot \frac{\Delta^3 u}{\Delta x^3} + \dots$$

Положимъ теперь, что Δx дѣлается безконечно малымъ, то есть обращается въ дифференціалъ переменной x ; въ такомъ предположеніи каждый изъ множителей $h - \Delta x$, $h - 2\Delta x, \dots$ обратится въ $h - dx$, $h - 2dx, \dots$ или просто въ h , опускаясь безконечно малыя количества $dx, 2dx, \dots$ предъ конечною величиною h . Въ этомъ же предположеніи отношенія конечныхъ разностей $\frac{\Delta u}{\Delta x}, \frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2}, \frac{\Delta^3 u}{\Delta x^3}, \dots$ (Смол. § 2) обратятся соотвѣстственно въ дифференціальныя отношенія $\frac{du}{dx}, \frac{d^2 u}{dx^2}, \frac{d^3 u}{dx^3}, \dots$. И такъ, предыдущая формула приметъ видъ

$$f(x+h) = u + \frac{du}{dx} \cdot h + \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3 u}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \dots,$$

гдѣ $u = f(x)$. Это доказательство Тайлоровой теоремы весьма просто, но, какъ и большая часть другихъ, не вполне удовлетворительно. Оно примѣчательно въ историческомъ отношеніи тѣмъ, что было предложено Тайлоромъ почти въ томъ видѣ, въ какомъ изложено у насъ. Смол. TAYLOR (THÉORÈME DE).

§ 8. Формула (5) въ некоторыхъ случаяхъ весьма удобна для гиперполированія. Если положимъ въ ней $\Delta x = h$ и $n\Delta x = i$, то она приметъ видъ

$$(4) \quad f(x+i) = u + \frac{i}{h} \Delta u + \frac{i}{h} \cdot \frac{i-h}{2h} \Delta^2 u + \frac{i}{h} \cdot \frac{i-h}{2h} \cdot \frac{i-2h}{3h} \Delta^3 u + \dots$$

Положимъ напримѣръ, что желаемъ найти обыкновенный логарифмъ числа 2,7182818284... (изображающаго основаніе Неперовыхъ логарифмовъ), посредствомъ таблицъ съ десятию десятичными цифрами, предполагая что эти таблицы простираются только до 1000. Для этого,

принимая $x=2,71$, $h=0,01$, $i=0,0082818284$, я, останавливаясь на четвертичных разностях, составим следующую таблицу:

$$\begin{aligned}u &= \text{Log}(2,71) = 0,4329692908 \\u_1 &= \text{Log}(2,72) = 0,4345689040 \\u_2 &= \text{Log}(2,73) = 0,4361626470 \\u_3 &= \text{Log}(2,74) = 0,4377605628 \\u_4 &= \text{Log}(2,75) = 0,43935326958\end{aligned}$$

Первая разности:

$$\begin{aligned}u_1 - u &= \Delta u = 0,0015996132 \\u_2 - u_1 &= \Delta u_1 = 0,0015937430 \\u_3 - u_2 &= \Delta u_2 = 0,0016879158 \\u_4 - u_3 &= \Delta u_3 = 0,0018821310\end{aligned}$$

Вторая разности:

$$\begin{aligned}\Delta u_1 - \Delta u &= \Delta^2 u = 0,000008702 \\ \Delta u_2 - \Delta u_1 &= \Delta^2 u_1 = 0,0000088272 \\ \Delta u_3 - \Delta u_2 &= \Delta^2 u_2 = 0,0000087948\end{aligned}$$

Третья разности:

$$\begin{aligned}\Delta^2 u_1 - \Delta^2 u &= \Delta^3 u = 0,000000430 \\ \Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1 &= \Delta^3 u_1 = 0,000000424\end{aligned}$$

Четвертая разности:

$$\Delta^3 u_1 - \Delta^3 u = \Delta^4 u = 0,000000006.$$

Итак

$$\begin{aligned}u &= 0,4329692908 \\ \Delta u &= 0,0015996132 \\ \Delta^2 u &= -0,000008702 \\ \Delta^3 u &= 0,000000430 \\ \Delta^4 u &= -0,000000006;\end{aligned}$$

автор, того же вида

$$\begin{aligned}\frac{i}{h} &= 0,82818284, & \frac{i-h}{2h} &= -0,08590888, \\ \frac{i-2h}{2h} &= -0,39060572, & \frac{i+3h}{4h} &= 0,54299129.\end{aligned}$$

Подставляя найденные величины в формулу (4), получим

$$f(x+h) = \text{Log}(2,7182818284) = 0,4342944819 \dots$$

Это число, как известно, изображает *модуль* обыкновенных или *Бригговских* логарифмов.

Мы ограничимся здесь одним примером из теории интерполирования; читатель, желающий ближе ознакомиться с этим предметом, может обратиться к статье INTERPOLATION нашего Лексикона

§ 9. Из уравнений (2) параграфа 6 можно также вывести общую формулу, которая по-

служит для определения разности такого же есть порядка предложенной функции u посредством последовательных ее состояний u_1, u_2, u_3, \dots . Действительно, получим

$$\begin{aligned}\Delta u &= u_1 - u \\ \Delta^2 u &= \Delta u_1 - \Delta u = u_2 - u_1 - (u_1 - u) \\ &= u_2 - 2u_1 + u \\ \Delta^3 u &= \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u = (\Delta u_2 - \Delta u_1) - (u_2 - 2u_1 + u) \\ &= (u_3 - u_2) - (u_2 - u_1) - (u_2 - 2u_1 + u) \\ &= u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u,\end{aligned}$$

и вообще

$$(5) \Delta^n u = u_n - nu_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} u_{n-3} + \dots$$

Положим наприимр $u = x^2$ и $\Delta x = 1$; в силу формулы (5) найдем

$$\Delta u = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1$$

$$\Delta^2 u = (x+2)^2 - 2(x+1)^2 + x^2 = 2.$$

Итак, вторая разность квадратных чисел равна постоянному числу 2, а разности высших порядков очевидно обращаются в нуль.

Для $u = x^3$, получим

$$\Delta u = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$\Delta^2 u = (x+2)^3 - 2(x+1)^3 + x^3 = 6x + 6$$

$$\Delta^3 u = (x+3)^3 - 3(x+2)^3 + 3(x+1)^3 - x^3 = 6;$$

отсюда заключаем, что первая разность кубических чисел равна постоянному числу 6, и следовательно дальнейшие их разности обращаются в нуль. Эти следствия относительно квадратных и кубических чисел являются очевидными, когда рассмотрим следующие две таблицы:

Квадраты	1 раз:	2 раз:	3 раз:
1			
4	3		
9	5	2	
16	7	2	0
25	9	2	0
36	11	2	0
и проч.	и проч.	и проч.	и проч.

Куби:	1 раз:	2 раз:	3 раз:	4 раз:
1	7			
8	19	12	6	0
27	37	18	6	0
64	61	24	6	и проч.
125	91	30	и проч.	
216	и проч.	и проч.		
и проч.				

Легко распространить это свойство на какие ни есть целые положительные степени; действительно, если положим $u \equiv x^n$ и $\Delta x \equiv 1$, то получим $\Delta^n u \equiv 1.2.3...n$ и $\Delta^{n+1} u \equiv \Delta^n + 1 u \equiv \Delta^n + 2 u \equiv ... \equiv 0$.

§ 10. Формулы (3) и (5) могут быть написаны в следующих символических видах: $u_n \equiv (1 + \Delta)^n u$ и $\Delta^n u \equiv (u - 1)^n$.

По разложению вторых частей этих уравнений должно будет, в первом из них, принимать выражения Δu , $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$... не за степени и произведения, а за разности различных порядков функции u , а во втором, переименовать показателя на указатели, то есть на номера, помещаемые под буквою u . См. ANALOGIE DES DIFFERENCES AVEC LES PUISSANCES.

Обратный способ разностей.

§ 11. Обратный способ комечных разностей является предметом определения первообразной функции по данной ей разности. И такъ, если бы нѣтъ уравненіе $\Delta u_x \equiv f(x)$, гдѣ $f(x)$ изображаетъ данную, а u_x независимую функцию переменной x , то для опредѣленія первообразной функции u_x надлежало бы употребить обратный способ разностей. Дѣйствиѣ, посредствомъ котораго опредѣляется первообразная функция, называется интегрированиемъ (*intégration*); въ томъ же смыслѣ говорятъ иногда: *взять сумму* (*prendre la somme*). Интегралъ въ разностяхъ обозначаютъ Греческою буквою Σ (иногда же Лавинскою δ), поставленную передъ функцией, для которой ищутъ первообразную. И такъ, изъ уравненія $\Delta u_x \equiv f(x)$, получаемъ $\Sigma \Delta u_x \equiv \Sigma f(x)$; но, по самому опредѣленію интеграла какъ суммы, $\Sigma \Delta u_x \equiv u_x$; слѣдовательно знаки Δ и Σ , какъ означающіе дѣйствія

прямопротивоположныя, совершаемыя надъ однимъ и тѣмъ же количественномъ, взаимно уничтожаются. Если бы вѣдомо уравненіе $\Delta u_x \equiv f(x)$, или $\Delta^2 u_x \equiv f(x)$ или $\Delta^3 u_x \equiv f(x)$, или вообще $\Delta^m u_x \equiv f(x)$, то для опредѣленія первообразной функции u_x слѣдовало бы кончить двойной, тройной и вообще m -го порядка интеграла функции $f(x)$. Для изображенія такого рода крайнихъ интеграловъ, помножаютъ букву Σ (или δ). И такъ, для означенія двойнаго интеграла употребляется одно изъ слѣдующихъ знаковъ:

$$u_x \equiv \Sigma \Sigma f(x) \equiv \Sigma^2 f(x) \equiv \Sigma \delta f(x);$$

для тройнаго

$$u_x \equiv \Sigma \Sigma \Sigma f(x) \equiv \Sigma^3 f(x) \equiv \Sigma \delta \delta f(x),$$

и вообще, для интеграла m -го порядка, будетъ $u_x \equiv \Sigma \Sigma \Sigma ... f(x) \equiv \Sigma^m f(x) \equiv \Sigma \delta \delta \delta ... f(x) \equiv \Sigma^m f(x)$.

§ 12. Мы сказали что дѣйствиѣ, посредствомъ котораго изъ уравненія $\Delta u_x \equiv f(x)$ опредѣляется первообразная функция u_x , называется интегрированиемъ, а u_x интеграломъ или суммою. И дѣйствиительно, u_x изображаетъ сумму; чтобы удостовѣриться въ этомъ, стоитъ только сложить всѣ равенства, составляющія символъ № 1 въ формулахъ (2); [См. § 6]. Такимъ образомъ получимъ

$$u_n \equiv u + \Delta u + \Delta u_1 + \Delta u_2 + ... + \Delta u_{n-1}.$$

Положивъ, какъ и въ § 6, что приращеніе Δx переменной x есть величина постоянная, которую изобразимъ чрезъ h ; сверхъ того, означимъ чрезъ u значеніе функции u_x для $x \equiv a$. Въ слѣдствіе уравненій $\Delta u_x \equiv f(x)$ и $u_x \equiv \Sigma f(x)$, для значенія $x \equiv a + nh$, получимъ

$$(6) \quad \Sigma f(x) \equiv u + f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + ... + f(a+(n-1)h).$$

Очевидно, что интегралъ, означенный уравненіемъ увеличился бы количествомъ $f(a+nh) \equiv f(x)$ еслибъ принимали приращеніе h послѣднему значенію $a + (n-1)h$ величинъ x . Слѣдствительно, $f(x)$ есть разность второй части формулы (6), а поэтому и первой, то есть интеграла $\Sigma f(x)$, что дѣйствиительно и должно быть. И такъ, $\Sigma f(x)$ состоитъ изъ суммъ всѣхъ значеній, получаемыхъ функцией $f(x)$ отъ $x \equiv a$ до $x \equiv a + (n-1)h$ при постоянномъ приращеніи h сей переменной, и еще одного члена u , неопредѣленнаго, замѣняющаго произвольную постоянную

величину, которая могла уничтожиться при переходе от u_x к Δu_x . Величина u должна быть такого свойства, чтобы при переходе от x к $x+h$ она не изменилась. Очевидно, что постоянное количество удовлетворяет такому условию. Но, по замечанию Эйлера, есть и функция переменной x , которая выполняется это требование: таковы, например, $\sin \frac{2\pi x}{h}$, $\cos \frac{2\pi x}{h}$; и действительно

$$\begin{aligned}\sin \frac{2\pi(x+h)}{h} &= \sin \left(\frac{2\pi x}{h} + 2\pi \right) = \sin \frac{2\pi x}{h} \\ \cos \frac{2\pi(x+h)}{h} &= \cos \left(\frac{2\pi x}{h} + 2\pi \right) = \cos \frac{2\pi x}{h}.\end{aligned}$$

Следовательно, можно положить вообще

$$u = q \left(\sin \frac{2\pi x}{h}, \cos \frac{2\pi x}{h} \right),$$

разумя под q функцию какого угодно вида.

Если бы имели уравнение $\Sigma^m u_x = f(x)$, то для определения u_x надлежало бы произвести m интегрирований. Каждое действие ввело бы одну величину, подобную u , и следовательно, полный интеграл $u_x = \Sigma^m f(x)$ заключал бы в себя m величин, одинакового свойства с количеством u .

Интеграл $\Sigma f(x)$, определяемый формулой (6), изображающую обыкновенно знаменитое $\sum_{a=a}^{a+h} f(x)$. Когда же под знаком Σ , сверх переменной x , имеется другое количество, например y , между ними как интегральный знак должен относиться к x , то для избежания недоразумения пишется

$$\sum_{a=a}^{a+h} f(x, y) \quad \text{вместо} \quad \sum_a^{a+h} f(x, y).$$

Это знаменитое распространяют и на кратные интегралы; и так, в следствии сказанного выше, легко понять смысл выражения

$$\sum_{a=a}^{a+h} \sum_{c=c}^{c+h} \sum_{b=b}^{b+h} f(x, y, z).$$

§ 13. Определение интеграла в разностях многочленного выражения приводится к интегрированию одночленных количеств. Действительно, если возьмем интеграл формулы

$$B\Delta x + C\Delta y - D\Delta z = \Delta(Bx + Cy - Dz)$$

(См. § 4, то получим

$$\Sigma(B\Delta x + C\Delta y - D\Delta z) = Bx + Cy - Dz;$$

но $Bx = B\Delta x$, $Cy = C\Delta y$, $Dz = D\Delta z$, почему и будеть

$$\Sigma(B\Delta x + C\Delta y - D\Delta z) = B\Delta x + C\Delta y - D\Delta z$$

Это уравнение показывает, что интеграл суммы равен сумме интегралов, а интеграл разности двух количеств — разности их интегралов; из этой же формулы усматриваем, что постоянные множители могут быть вынесены при интегрировании за интегральный знак.

Перейдем теперь к самым приемам интегрирования: займемся сперва функциями алгебраическими.

§ 14. Интегрирование целой алгебраической функции $Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \dots$, в силу предыдущего параграфа, приводится к определению интеграла Σx^n , где n , изображает какое-либо целое положительное число. Для определения Σx^n , составляем разность функций x^{n+1} ; если положим $\Delta x = h$, то получим

$$\begin{aligned}\Delta x^{n+1} &= (x+h)^{n+1} - x^{n+1} = (n+1)x^n h \\ &+ \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} x^{n-1} h^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-2} h^3 \\ &+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-3} h^4 + \dots\end{aligned}$$

Взяв интеграл обеих частей этого уравнения, и опуская для краткости постоянную величину или функцию a , о которой говорено в § 12, найдем

$$\begin{aligned}x^{n+1} &= n+1 \cdot h \Sigma x^n + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} h^2 \Sigma x^{n-1} \\ &+ \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} h^3 \Sigma x^{n-2} \\ &+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} h^4 \Sigma x^{n-3} + \dots\end{aligned}$$

Пологая последовательно в этой формуле $n=0$, $n=1$, $n=2$, ... получим

$$\begin{aligned}x &= h \Sigma x^0 \\ x^2 &= 2h \Sigma x + h^2 \Sigma x^0 \\ x^3 &= 3h \Sigma x^2 + 3h^2 \Sigma x + h^3 \Sigma x^0 \\ x^4 &= 4h \Sigma x^3 + 6h^2 \Sigma x^2 + 4h^3 \Sigma x + h^4 \Sigma x^0 \\ x^5 &= 5h \Sigma x^4 + 10h^2 \Sigma x^3 + 10h^3 \Sigma x^2 + 5h^4 \Sigma x + h^5 \Sigma x^0 \\ &\dots\end{aligned}$$

Интеграл $\Sigma x^0 = \Sigma 1$ определяется из первой формулы; если подставим эту величину во вторую формулу, то найдем Σx ; подставив в третью уравнение найденные величины для Σx^0 и Σx , выведем интеграл Σx^2 , и так далее. Произведи означенный подстановлений, получим:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma x^0 &= \frac{x}{h} \\ \Sigma x &= \frac{x^2}{2h} - \frac{x}{2} \\ \Sigma x^2 &= \frac{x^3}{3h} - \frac{x^2}{2} + \frac{xh}{6} \\ \Sigma x^3 &= \frac{x^4}{4h} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2h}{2} \\ \Sigma x^4 &= \frac{x^5}{5h} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3h}{3} - \frac{x^2h^2}{12} \\ \Sigma x^5 &= \frac{x^6}{6h} - \frac{x^5}{2} + \frac{5x^4h}{12} - \frac{x^3h^2}{12} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

Здесь, как и выше, опущено дополнительное количество, уничтожающееся при переходе от интеграла к разности. В последующих интегральных формулах, для краткости, мы будем также опускать это количество; но не должно забывать, что оно всегда подразумевается.

Приложим формулы (7) к определению интеграла выражения $5x^3 - 6x^2 + 7x + 3$, предполагая что приращение $\Delta x = h = 1$. Найдется:

$$\begin{aligned} \int (5x^3 - 6x^2 + 7x + 3) &= 5 \Sigma x^3 - 6 \Sigma x^2 + 7 \Sigma x + 3 \Sigma x^0 \\ &= 5 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} \right) - 6 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} \right) \\ &\quad + 7 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) + 3x \\ &= \frac{5x^4}{4} - \frac{6x^3}{2} + \frac{5x^2}{4} - \frac{6x}{2} + \frac{3x}{2} \end{aligned}$$

§ 15. Хотя по предыдущему параграфу легко найти интеграл факториальной функции $x(x+h)(x+2h)(x+3h)\dots(x+[m-1]h)$ разложив ее предварительно по степеням количества x , но полезно показать и другой прием, доставляющий этому интегралу в весьма простом виде. Возьм разность разности первоначальной функции, найдем последовательно

$$\begin{aligned} &\Delta \{ x(x+h)(x+2h)\dots(x+mh) \} = \\ &(x+h)(x+2h)(x+3h)\dots(x+mh)(x+m+1)h \\ &\quad - x(x+h)(x+2h)\dots(x+mh) \\ &= (x+[m+1]h - x)(x+h)(x+2h)(x+3h)\dots(x+mh) \\ &= (m+1)h(x+h)(x+2h)(x+3h)\dots(x+mh). \end{aligned}$$

Переходя к интегралу, получим

$$x(x+h)(x+2h)\dots(x+mh) = (m+1)h \int (x+h)(x+2h)(x+3h)\dots(x+mh);$$

если заменим теперь x разностью $x-h$, и разделим полученную формулу на $(m+1)h$, то найдем окончательно

$$(8) \quad \int x(x+h)(x+2h)\dots(x+[m-1]h) = \frac{(x-h)x(x+h)(x+2h)\dots(x+[m-1]h)}{(m+1)h}.$$

Например, если бы данная факториальная функция была $x(x+1)(x+2)(x+3)$, то положив $h=1$ и $m=4$, получили бы

$$\int x(x+1)(x+2)(x+3) = \frac{(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3)}{5}.$$

§ 16. Исследование общего случая, в котором рациональная дробь имеет в числителе алгебраический, а в знаменателе факториальный множитель, далеко бы нас свело далеко; отсылаем по сему предмету к нашему Разсуждению под заглавием: *Об алгебраических интегралах из разностей рациональных дробей* *). Ограничимся здесь изложением того случая, когда знаменатель предложенной рациональной дроби будет функцией факториальной. Во первых заметим, что по причине

$$\begin{aligned} \Delta \left[\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+[m-1]h)} \right] &= \\ \frac{1}{x+h(x+2h)\dots(x+[m-1]h)} - \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+[m-1]h)} \\ &= -\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+[m-1]h)^2} \end{aligned}$$

найдем чрез интегрирование

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+[m-1]h)} &= \\ -mh \int \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+[m-1]h)^2} &= \end{aligned}$$

или, написав $m-1$ вместо m ,

$$(9) \quad \int \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+[m-1]h)} = -\frac{1}{(m-1)h x(x+h)(x+2h)\dots(x+[m-2]h)}.$$

Итак, в силу этой формулы, найдем

$$\int \frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = -\frac{1}{2x(x+1)(x+2)}.$$

Если бы желали употребить формулу (9)

для определения интеграла дроби $\frac{1}{x^2}$, то следовало бы положить $m=1$; в таком предположении вторая часть упомянутой формулы доставила бы вывод несообразный, а это происходит от того, что интеграл $\int \frac{1}{x^2}$ не может быть

* Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Petersburg; VI Série. Sciences Math. Phys. et Natur. T. III. стр. 205.

выраженъ въ алгебраическомъ видѣ, и составляетъ особаго рода трансцендентную функцію.

На основаніи формулы (9) не трудно найти интегралъ всякой рациональной дроби $\frac{P}{Q}$, когда знаменатель Q будетъ факториальная функція, а числитель, цѣлая алгебраическая функція, коей степень двумя или большимъ числомъ единицъ ниже степени знаменателя Q . Дѣйствиительно, пусть данная дробь будетъ

$$\frac{P}{Q} = \frac{ax^{m-2} + bx^{m-3} + cx^{m-4} + \dots + lx + l}{x(x+h)(x+2h) \dots (x+[m-1]h)};$$

разлагаемъ ее на слѣдующія частныя дроби:

$$\frac{P}{Q} = \frac{A}{x(x+h)} + \frac{B}{x(x+h)(x+2h)} + \frac{C}{x(x+h)(x+2h)(x+3h)} + \dots + \frac{M}{x(x+h)(x+2h) \dots (x+[m-1]h)},$$

опредѣля числители A, B, C, \dots, M по известному способу неопредѣлимыхъ коэффициентовъ. Когда дробь $\frac{P}{Q}$ будетъ разложена такимъ образомъ, то получимъ

$$\frac{P}{Q} = AE \frac{1}{x(x+h)} + BE \frac{1}{x(x+h)(x+2h)} + \dots;$$

но такъ какъ каждая часть этой формулы состоитъ изъ интеграловъ вида (9), то очевидно что $\frac{P}{Q}$ опредѣлится во всякомъ случаѣ. Для примѣра найдемъ интегралъ рациональной дроби

$$\frac{ax^2 + bx + c}{x(x+1)(x+2)(x+3)};$$

въ слѣдствіе сказаннаго выше, полагаемъ

$$\frac{ax^2 + bx + c}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x(x+1)} + \frac{B}{x(x+1)(x+2)} + \frac{C}{x(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

Если приведемъ эти три частныя дроби къ общему знаменателю $x(x+1)(x+2)(x+3)$, то получимъ уравненіе

$$ax^2 + bx + c = A(x+2)(x+3) + B(x+3) + C,$$

откуда, чрезъ сравненіе коэффициентовъ при одинаковыхъ степеняхъ x ,

$$a = A, \quad b = 5A + B, \quad c = 6A + 3B + C.$$

Рѣшая эти уравненія, найдемъ

$$A = a, \quad B = b - 5a, \quad C = c - 3b + 9a.$$

Слѣдовательно

$$\begin{aligned} \int \frac{ax^2 + bx + c}{x(x+1)(x+2)(x+3)} dx &= a \int \frac{1}{x(x+1)} dx + (b-5a) \int \frac{1}{x(x+1)(x+2)} dx \\ &+ (c-3b+9a) \int \frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)} dx. \end{aligned}$$

Опредѣля по формулѣ (9) каждый изъ интеграловъ, составляющихъ вторую часть послѣдняго уравненія, найдемъ окончательно

$$\begin{aligned} \int \left[\frac{ax^2 + bx + c}{x(x+1)(x+2)(x+3)} \right] dx &= \frac{a}{x} - \frac{b-5a}{x(x+1)} \\ &- \frac{c-3b+9a}{8x(x+1)(x+2)} = -\frac{6ax^2 + 5(b-a)x + 2c}{6x(x+1)(x+2)}. \end{aligned}$$

§ 17. Мы не будемъ говорить объ интегрированіи иррациональных алгебраическихъ функцій, потому что случаи, въ которыхъ интегралы ихъ бываютъ алгебраическіе, весьма рѣдки. Переходимъ теперь къ функціямъ трансцендентнымъ. Возьмъ интегралъ уравненія

$$Aa^x = a^{x+h} - a^x = (a^h - 1)a^x$$

получимъ

$$a^x = (a^h - 1)Ea^x \quad \text{или} \quad Ea^x = \frac{a^x}{a^h - 1}.$$

Можно также найти интегралъ произведенія $x^m a^x$, когда m изображаетъ число цѣлое положительное; для этого спосібъ также положимъ

$$(10) \quad E[x^m a^x] = a^x (Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots),$$

гдѣ A, B, C, \dots изображаютъ неопредѣленные коэффициенты, которые опредѣлимъ когда возьмемъ разность послѣдняго уравненія, и предположимъ что двѣ части его поочередно. Напримѣръ, если бы искали интегралъ $E(x^2 a^x)$, то допустимъ

$$E(x^2 a^x) = a^x (Ax^2 + Bx + C + D),$$

и взявъ разность, нашіи бы

$$x^2 a^x = a^{x+h} [A(x+h)^2 + B(x+h) + C(x+h) + D] - a^x [Ax^2 + Bx + C + D].$$

Раздѣливъ все уравненіе на a^x , и расколовъ вторую его часть по нисходящимъ степенямъ количества x , получимъ

$$x^2 = A(a^h - 1)x^2 + (3Aha^h + Ba^h - B)x^2 + (3Aha^h + 2Bha^h + Ca^h - C)x + Ah^2a^h + Cha^h + Da^h - D.$$

Чтобы это уравненіе было тождественно, должно быть

$$1 = A(a^h - 1)$$

$$0 = 3Aha^h + Ba^h - B$$

$$0 = 3Aha^h + 2Bha^h + Ca^h - C$$

$$0 = Ah^2a^h + Bh^2a^h + Cha^h + Da^h - D;$$

выводя изъ сихъ формулъ величины A, B, C, D , и подставляя ихъ во вторую часть уравненія (10), найдемъ интегралъ $E(x^2 a^x)$.

Точно такимъ образомъ получится интегралъ

выражения $(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots) a^x$, для которого очевидно должно положить

$$E[(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots) a^x] \\ = (Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots) a^x.$$

Логарифмическая формула допускает интегрирование только в самых частных случаях. Просителая из них по виду, именно $\log x$, не может быть интегрирована. Если возьмем разность функции $\log x$, то получим

$$\Delta \log x = \log(x+h) - \log x = \log\left(1 + \frac{h}{x}\right),$$

откуда

$$E \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \log x.$$

§ 18. На основании предыдущего параграфа можно интегрировать некоторые тригонометрические функции, приводя их к показательным по помощи формул

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

Но удобнее искать интегралы $E \sin x$, $E \cos x$ и проч. посредством следующих приемов:

Изобразим через h неограниченное приращение дуги x , имеем

$$\Delta \cos x = \cos(x+h) - \cos x = -2 \sin \frac{1}{2} h \sin(x + \frac{1}{2} h)$$

$$\Delta \sin x = \sin(x+h) - \sin x = 2 \sin \frac{1}{2} h \cos(x + \frac{1}{2} h);$$

интегрируя эти выражения, получим

$$\cos x = -2 \sin \frac{1}{2} h E \sin(x + \frac{1}{2} h)$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{1}{2} h E \cos(x + \frac{1}{2} h).$$

Если наименее в этих формулах $x - \frac{1}{2} h$ вместо x , то они дадут

$$(11) \quad \begin{cases} E \sin x = -\frac{\cos(x - \frac{1}{2} h)}{2 \sin \frac{1}{2} h} \\ E \cos x = \frac{\sin(x - \frac{1}{2} h)}{2 \sin \frac{1}{2} h} \end{cases}$$

Отсюда интегралы $E \sin x$, $E \cos x$ легко перевести к $E \sin(a+bx)$ и $E \cos(a+bx)$. Очевидно, что для этого сполнит только в предыдущих формулах заменить x суммой $a+bx$, а приращение h , произведение bh , ибо $a+b(x+h) = a+bx+bh$. Таким образом получим

$$(12) \quad \begin{cases} E \sin(a+bx) = -\frac{\cos(a+bx - \frac{1}{2} bh)}{2 \sin \frac{1}{2} bh} \\ E \cos(a+bx) = \frac{\sin(a+bx - \frac{1}{2} bh)}{2 \sin \frac{1}{2} bh} \end{cases}$$

Так как тригонометрические функции $\sin^m x$, $\cos^m x$, $\sin^m x \cos^m x$, в случае m и n чётных положительных, всегда могут быть выражены посредством синусов или косинусов целых дуг, то ясно, что на основании формул (12), можно будет найти и инте-

$$E \sin^m x, E \cos^n x, E \sin^m x \cos^n x.$$

Вот три примера для наглядности:

a) Найти интеграл $E \sin^2 x$.

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x,$$

$$E \sin^2 x = \frac{1}{2} E 1 - \frac{1}{2} E \cos 2x = \frac{1}{2} E x - \frac{1}{2} E \cos 2x.$$

Но $E x = \frac{x}{1}$, по формуле из формул (7) § 14,

равен $\frac{x}{1}$, а $E \cos 2x$, в следствие одного из

уравнений (12), и предположив в нем $a=0$,

$b=2$, равняется $\frac{\sin(2x - \frac{1}{2})}{2 \sin \frac{1}{2}}$; следовательно

$$E \sin^2 x = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1} - \frac{\sin(2x - \frac{1}{2})}{2 \sin \frac{1}{2}} \right).$$

b) Найти интеграл $E \cos^2 x$.

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos x,$$

$$E \cos^2 x = \frac{1}{2} E \cos 2x + \frac{1}{2} E \cos x$$

$$E \cos^2 x = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(2x - \frac{1}{2})}{2 \sin \frac{1}{2}} + \frac{\sin(x - \frac{1}{2})}{2 \sin \frac{1}{2}} \right).$$

c) Найти интеграл $E \sin x \cos x$.

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$E \sin x \cos x = \frac{1}{2} E \sin 2x$$

В следствие первой из формул (12), и предположив в ней $a=0$, $b=2$, найдем

$$E \sin x \cos x = -\frac{\cos(2x - \frac{1}{2})}{4 \sin \frac{1}{2}}.$$

Легко убедиться, что и следующая, более общая функция

$$(Ax^2 + Bx + Cx + \dots) \sin^m x \cos^n x$$

может быть интегрирована; когда коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \dots, m$ и n будут целыми положительными числами. Для интегрирования, заменим $\sin^m x$ и $\cos^n x$ их выражениями, разложив по формулам $\sin^m x$ и $\cos^n x$, и перемножив между собой полученные разложения, получим конечное число членов, из которых каждый будет вида $K \cos^p x$, разделив под K и p несложными величинами. Помножив эти члены на сумму $Ax^2 + Bx + Cx + \dots$, найдем ряд выражений, из которых каждое будет вида $Lx^q \cos^p x$, или, положив $\cos^p x = 1 - a$, вида $Lx^q a^p$. Но интеграл $E x^q a^p$, когда μ есть целое положительное число,

можем быть найдены по способу, изложенному в § 17; следовательно интегрируем

$$E(Ax^n + Bx^3 + Cx^2 + \dots) \sin^m x \cos^n x,$$

при $\alpha, \beta, \gamma, \dots, m$ и n целых, также можем быть определены.

§ 19. Одно из примечательнейших приложений обратного способа разностей сопоставить в суммировании рядов. Положим, что имеем ряд

$$(18) S_n = f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + f(a+3h) + \dots + f(a+(n-1)h),$$

состоящий из n членов. Для нахождения суммы S_n можно употребить формулу (6) [§ 12], в следствие которой получим

$$Ef(x) = u + S_n,$$

откуда

$$S_n = Ef(x) - u.$$

Но если изобразим $Ef(x)$ через $F(x)$, и вспомним оказанное в § 12 об интеграле $Ef(x)$ и об количестве u , то получим

$$S_n = F(a+nh) - F(a).$$

Из этого уравнения извлекаем следующее правило для суммирования рядов:

Пусть будет ряд (18), а $f(x)$ общий его член.

Чтобы получить сумму S_n и первый его член, должно взять интеграл общего члена $f(x)$, и положить $Ef(x) = F(x)$, подставить в $F(x)$ сперва величину $x = a + nh$, а потом $x = a$. Разность $F(a+nh) - F(a)$ изобразит искомую сумму S_n .

Это правило может быть предложено и в следующем виде: имея ряд

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1}$$

составленный с (18), получаем сумму S_n взяв интеграл члена u_n , непосредственно следующего за последним u_{n-1} , и прибавив к этому интегралу постоянное количество, которое определяется предположением $n=1$. И такъ

$$(14) S_n = Eu_n + C,$$

разумя под C постоянную величину. Мы прибавим к интегралу Eu_n постоянное количество C , а не функцию $q\left(\sin \frac{2\pi x}{h}, \cos \frac{2\pi x}{h}\right)$, о которой говорено в § 12; действительно, такъ какъ переменная величина в нашем случае есть целое число n , а $h=1$, то предыдущая функция обратится в $q(\sin 2\pi n, \cos 2\pi n) = q(0, 1)$, то есть, в величину постоянную.

Предлагаем несколько примеров суммирования рядов.

a.) Пусть будетъ рядъ кубовъ натуральныхъ чиселъ

$$s = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (x-1)^3;$$

членъ, непосредственно следующий за послѣднимъ $(x-1)^3$ будетъ x^3 ; следовательно, по формулѣ (14),

$$s = Ex^3 + C.$$

И такъ, зная, что в нашемъ случаѣ $4x = 1$, получимъ в слѣдствіе четвертой изъ формул (7) параграфа 14-го

$$s = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C.$$

Для опредѣленія постоянного количества C , положимъ в данномъ ряду $x=1$; получимъ $s=0$, и следовательно

$$0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + C, \text{ откуда } C=0.$$

И такъ

$$s = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2(x^2 - 2x + 1)}{4} = \left[\frac{x(x-1)}{2}\right]^2.$$

Но $\frac{x(x-1)}{2}$ изображаетъ сумму арифметической прогрессіи

$$1 + 2 + 3 + \dots + (x-1);$$

следовательно

$$[1 + 2 + 3 + \dots + (x-1)]^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (x-1)^3.$$

Эта формула выражаетъ довольно любопытное предложеніе изъ Теоріи Чиселъ.

b.) Положимъ, что имеемъ рядъ

$$s = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(x-1)x}.$$

По формулѣ (14) найдемъ

$$s = E \frac{1}{x(x+1)} + C.$$

Но $E \frac{1}{x(x+1)} = -\frac{1}{x}$ [Смол. формулу (9) параграфа 16]; следовательно

$$s = C - \frac{1}{x}.$$

Для опредѣленія постоянного количества C , положимъ, что данный рядъ приводится къ первому своему члену $\frac{1}{1 \cdot 2}$; въ такомъ предположеніи $x=1$ или $x=2$, и въ то же время $s = \frac{1}{1 \cdot 2}$;

и такъ

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = C - \frac{1}{2}, \text{ откуда } C = 1,$$

въ слѣдствіе чего

$$s = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Очевидно, что положив ряд $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots$ продолженным до бесконечности, то есть приняв $x = \infty$, найдем из уравнения $s = C - \frac{1}{x}$, $s = C$, и как $C = 1$, то и получим $1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots$ и проч.

Сделанное здесь замечание о постоянном количестве C , изображающем сумму ряда, продолженного до бесконечности, относится и ко многим другим рядам.

c.) Волею приять суммирование ряда, который приводились к интегрированию показательной функции; пусть будет строка $s = 2.2^0 + 5.2^1 + 8.2^2 + 11.2^3 + \dots + [2+3(x-1)]2^{x-1}$. По общему правилу найдемся

$$s = E(2+3x)2^x + C.$$

В следствии § 17 должно положить

$$E(2+3x)2^x = 2^x(Ax+B);$$

взяв разность обеих частей этого уравнения в предположении $\Delta x = h = 1$, и разделив потом на 2^x , получим

$$2+3x = Ax + 2A+B;$$

следовательно

$$A=3, 2A+B=2, \text{ откуда } B=-4.$$

Итак

$$s = C + 2^x(3x-4);$$

если в данном ряду положим $x=1$, то получим $s=2$; поэтому

$$2 = C + 2(3-4), \text{ откуда } C=4,$$

и наконец

$$s = 4 + 2^x(3x-4).$$

Например, если бы положили $x=6$, то получили бы $s=900$; и действительно $2.2^0 + 5.2^1 + 8.2^2 + 11.2^3 + 14.2^4 + 17.2^5 = 900$.

d.) Для последнего примера возьмем ряд $s = \frac{1}{2} + \cos(x-a) + \cos 2(x-a) + \cos 3(x-a) + \dots + \cos n(x-a)$.

объ котором говорено в статье CONVERGENCE D'UNE SÉRIE. В этом ряду переменная величина есть n , а приращение ее равно единице. Итак

$$s = \frac{1}{2} + E \cos(n+1)(x-a) + C.$$

Для определения интеграла

$$E \cos(n+1)(x-a) = E \cos[(x-a) + (x-a)n],$$

обращаемся ко второй из формул (12) параграфа 18. Очевидно, что в ней должно заменить величинами a, b, x, h соответственно ко-

личествами $x-a, x-a, n, 1$. Таким образом получим

$$E \cos(n+1)(x-a) = \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})(x-a)]}{2 \sin \frac{1}{2}(x-a)},$$

в следствие чего найдемся

$$s = \frac{1}{2} + \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})(x-a)]}{2 \sin \frac{1}{2}(x-a)} + C.$$

Для определения постоянного количества C заметим, что сумма предложенного ряда, для $n=0$, приводится к $\frac{1}{2}$, ибо, в таком предположении, ряд не будет заключать в себя ни одного косинуса, а останется только первый член $\frac{1}{2}$. И так, для $n=0$, имеем $s = \frac{1}{2}$; следовательно предыдущее уравнение доскавивать

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + C, \text{ откуда } C = -\frac{1}{2},$$

и наконец, искомая сумма

$$s = \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})(x-a)]}{2 \sin \frac{1}{2}(x-a)}.$$

Мы ограничимся приведенными здесь приложениями способа разностей: читатели найдут в некоторых статьях нашего Лексикона другие приложения. Но, для полноты этой статьи, должно представить хотя краткое изложение теорий уравнений в разностях, что и составили предмет следующих двух параграфов.

§ 20. Уравнения в разностях называются всякое уравнение, заключающее в себя переменные величины и их разности. Если изобразим чрез y искомую функцию, зависящую от одной переменной x , приращение которой положим постоянным, то общий вид разностного уравнения будет

$$F(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \dots) = 0.$$

Вместо разностей $\Delta y, \Delta^2 y, \dots$ можно подставить равные им величины $y_1 - y, y_2 - 2y_1 + y, \dots$ [См. § 9], и тогда предыдущее уравнение обратится в $f(x, y, y_1, y_2, \dots) = 0$. В этом виде обыкновенно рассматриваются уравнения в разностях.

Положим например, что предложенное уравнение будет второго порядка, но есть вида

$$f(x, y, y_1, y_2) = 0;$$

выведем из него

$$y_2 = f(x, y, y_1),$$

и следовательно

$$y_2 = f(x + \Delta x, y_1, y_2) = \varphi(x, y, y_1)$$

$$y_2 = f(x + 2\Delta x, y_2, y_3) = \varphi(x + \Delta x, y_1, y_2) = \varphi_1(x, y, y_1) \text{ и проч.} \quad \text{и проч.}$$

И такъ заключаемъ, что изъ разностнаго уравненія второго порядка выводимъ послѣдовательные члены ряда

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots$$

посредствомъ каждой y и y_1 . И вообще легко видѣть, что рядъ

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots$$

выведенный изъ разностнаго уравненія m -го порядка, будетъ заключать въ себя m членовъ $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$ произвольныхъ.

Интегрирование уравненій въ разностяхъ представляется вообще большія затрудненія; чтобы дать хотя поверхностное понятіе объ этой теоріи, мы предлагаемъ здѣсь интегрирование линейнаго уравненія перваго порядка, а потомъ одну задачу изъ Ичисленія Варононскихъ, приводящую къ уравненію въ разностяхъ. Для дальнѣйшихъ же подробностей, описываемъ читателю въ статьѣ: GENERATRICES (FUNCTIONS).

Пусть будетъ линейное разностное уравне-

$$\Delta y + y f(x) = F(x),$$

подобное дифференціальному, известному подъ названіемъ *Вернуллиева*; Смол. BERNOULLI (EQUATION DE). Положимъ $\Delta x = 1$ и $y = Xz$, разумѣя подъ X неопредѣленную функцію перемѣной x , а подъ z новую переменную. Получимъ

$$X \Delta z + z \Delta X + \Delta X \cdot z + f(x) \cdot Xz = F(x).$$

По причинѣ неопредѣленности X , можемъ положить

$$z \Delta X + f(x) Xz = 0 \text{ или } \Delta X + f(x) X = 0,$$

и слѣдовательно

$$X \Delta z + \Delta X \cdot z = F(x).$$

И такъ, имѣемъ два уравненія

$$X \Delta z + \Delta X \cdot z = F(x) \text{ и } \Delta X + f(x) X = 0;$$

изъ перваго выводимъ

$$\Delta z = \frac{F(x)}{X + \Delta X}, \text{ откуда, } z = \Sigma \frac{F(x)}{X + \Delta X},$$

а изъ втораго

$$\frac{\Delta X}{X} = -f(x).$$

Чтобы найти интегралъ послѣдняго уравненія, положимъ $X = e^u$; получимъ $\Delta X = e^u + \Delta u = e^u$; слѣдовательно

$$e^u - 1 = -f(x),$$

откуда

$$e^{\Delta u} = 1 - f(x) \text{ или } \Delta u = \log(1 - f(x)),$$

и наконецъ

$$u = \Sigma \log(1 - f(x)).$$

Но такъ какъ интегралъ изображаетъ сумму всѣхъ значеній, допускаемыхъ подынтегральною функціею между предѣлами интегрированія [Смол. § 11], то очевидно, что принявъ нуль за нижній предѣлъ, а x за верхній, и предположивъ какъ сказано выше $\Delta x = 1$, получимъ

$$u = \log(1 - f(0)) + \log(1 - f(1)) + \log(1 - f(2)) + \dots + \log(1 - f(x-1)) =$$

$$\log(1 - f(0))(1 - f(1))(1 - f(2)) \dots (1 - f(x-1));$$

но $X = e^u$, почему $u = \log X$; слѣдовательно

$$X = (1 - f(0))(1 - f(1))(1 - f(2)) \dots (1 - f(x-1)).$$

Для простоты изобразимъ факториальную функцію, выражающую величину X , знакомъ положеніемъ

$$[1 - f(x-1)]; \text{ и такъ}$$

$$X = [1 - f(x-1)],$$

откуда

$$X + \Delta X = [1 - f(x)],$$

и слѣдовательно

$$\Delta z = \frac{F(x)}{X + \Delta X} = \frac{F(x)}{[1 - f(x)]}.$$

Интегрируя эту формулу, и подставляя на мѣсто x и X выведенныя для нихъ величины, выдемъ окончательно

$$(15) \quad y = [1 - f(x-1)] \left\{ C + \Sigma \frac{F(x)}{[1 - f(x)]} \right\},$$

гдѣ C изображаетъ произвольную величину. Приведемъ формулу (15) къ уравненію

$$\Delta y + \frac{y}{x} = \frac{3x+1}{x},$$

получимъ

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad F(x) = \frac{3x+1}{x}, \quad 1 - f(x-1) = 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1},$$

и слѣдовательно

$$[1 - f(x-1)] = \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{x-3}{x-2} \cdot \frac{x-4}{x-3} \dots = \frac{1}{x-1}$$

$$[1 - f(x)] = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{x-3}{x-2} \dots = \frac{1}{x}.$$

Подставляя эти величины въ уравненіе (15), получимъ

$$y = \frac{1}{x-1} \left\{ C + \Sigma (3x+1) \right\},$$

и наконецъ, въ силу § 14,

$$y = \frac{1}{x-1} \left\{ C + (3x^2 - x) \right\}.$$

Легко удостовѣриться, что этою кривою удовлетворенъ предложенному уравненію въ конечныхъ размѣстахъ; дѣйствительно, если въ упомянутомъ интегралѣ замѣнимъ C величиною $\frac{c}{x}$, и представимъ его въ видѣ

$$2y(x-1) - 3x^2 + x = c,$$

то измѣнивъ x въ $x+1$, а y въ $y+dy$, получимъ

$$2y(y+dy) - 3(x+1)^2 + x + 1 = c;$$

вычтя изъ этого уравненія предыдущую формулу, найдемъ по сокращенію

$$dy + \frac{y}{x} = \frac{5x+1}{x^2},$$

то есть, предложенное разностное уравненіе.

Приводимъ теперь одну задачу изъ Исчисленія Вѣроятностей, рѣшеніе которой зависитъ отъ интегрированія весьма простого разностнаго уравненія.

Изъ определенного числа m жетоновъ, выдерживаемъ нѣсколько наудачу. Спрашивается, кака велика вѣроятность, что число вынутыхъ жетоновъ будетъ четное или нечетное?

Для удобства, назовемъ жетоны буквами $a, \beta, \gamma, \delta, \dots, \mu$; положимъ что число ихъ равно m . Очевидно, что жетоны соединяются между собою въ четныхъ числахъ или по одному, или по три, или по пяти, и проч., а въ четномъ числахъ, по два, по четыре, по шести и проч. Следовательно, нечетныя соединенія будутъ (16)

а, $\beta, \gamma, \delta, \dots, \alpha\beta, \alpha\delta, \alpha\gamma\delta, \dots$

а четныя

(17) $\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta, \beta\gamma, \beta\delta, \gamma\delta, \dots, \alpha\gamma\delta, \dots$

Преобразимъ число нечетныхъ соединеній, соотвѣствующихъ m жетонамъ или m буквамъ $a, \beta, \gamma, \delta, \dots$ чрезъ y_m а чрезъ x_m число четныхъ соединеній. Изъ самаго опредѣленія вѣроятности, имѣемъ

$$(18) \quad \frac{y_m}{y_m + x_m} \text{ и } \frac{x_m}{y_m + x_m}$$

соотвѣственно изображать вѣроятности выхода нечетнаго и четнаго числа жетоновъ. Если теперь, къ разсматриваемымъ m жетонамъ присоединимъ еще одинъ, который означимъ буквою v , то величины y_m и x_m обратятся въ

y_{m+1} и x_{m+1} . Но, съ другой стороны, если прибавимъ новый жетонъ, или, что все равно, введемъ лишнюю букву v въ соединенія четныя, т. е. въ рядъ (17), то всѣ члены этого ряда доисправятъ нечетныя соединенія; сверхъ того получится еще одинъ новый случай; именно когда жетонъ v выдернется одинъ. И такъ, при $m+1$ жетонѣ, чрезъ нечетныхъ соединеній (16), имѣемъ еще $x_m + 1$ новыхъ, именно:

$\gamma, \alpha\gamma, \alpha\gamma, \alpha\delta, \beta\gamma, \beta\delta, \gamma\delta, \dots, \alpha\beta\gamma, \dots$

Слѣдовательно

$$(19) \quad y_{m+1} = y_m + x_m + 1.$$

Что касается до новыхъ четныхъ соединеній, происходящихъ отъ присоединенія новаго жетона, то ихъ очевидно будетъ y_m , ибо они получаются чрезъ введеніе буквы v въ рядъ (16), который въ этомъ предположеніи доисправитъ слѣдующія соединенія:

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta, \beta\gamma, \beta\delta, \gamma\delta, \dots$

И такъ

$$(20) \quad x_{m+1} = y_m + x_m.$$

Изъ уравненій (19) и (20) имѣемъ

$$y_{m+1} = x_{m+1} + 1,$$

и если умножимъ каждую изъ указателей подъ y и x , то получимъ формулу

$$y_m = x_m + 1$$

въ силу которой уравненію (19) применимъ слѣдующій весьма простой ходъ:

$$(21) \quad y_{m+1} = 2y_m.$$

Возмъ разностное уравненіе перваго порядка; отъ его интегрированія зависить рѣшеніе занимающаго насъ вопроса. Если замѣнимъ въ немъ переменную x_m красною буквою y , и слѣдовательно x_{m+1} суммою $y+dy$, то найденное уравненіе примемъ видъ

$$dy = y,$$

и будемъ считать частными случаемъ разностнаго выше уравненія $dy + yf(x) = F(x)$. Покажемъ непосредственное интегрированіе уравненія (21). Для этого—измѣнимъ въ немъ послѣдовательно m въ $m-1$, $m-2$, $m-3$, ..., и наложимъ рядъ равенствъ

$$y_m = 2y_{m-1}$$

$$y_{m-1} = 2y_{m-2}$$

$$y_{m-2} = 2y_{m-3}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y_2 = 2y_1$$

$$y_1 = 2y_0.$$

Перемножив между собою все эти уравнения, и сократив на произведение

$y_{m-1} \cdot y_{m-2} \cdot y_{m-3} \cdot \dots \cdot y_2$, получимъ

$$y_m = 2^{m-1} \cdot y_1;$$

очевидно что $y_1 = 1$, ибо въ этомъ случаѣ $m=1$, т. е. имѣемъ только одну жетонъ. И такъ

$$y_m = 2^{m-1}, \quad z_m = 2^{m-1} - 1.$$

Подставивъ эти величины въ формулы (18), найдемъ для искоемыхъ вѣроятностей слѣдующія выраженія:

$$\frac{y_m}{y_m + z_m} = \frac{2^{m-1}}{2^m - 1}, \quad \frac{z_m}{y_m + z_m} = \frac{2^{m-1} - 1}{2^m - 1}.$$

Напримѣръ, для $m=5$, найдемъ что вѣроятность вынуть нечетное число жетоновъ равна

$$\frac{2^4}{2^5 - 1} = \frac{16}{31}, \quad \text{а четное число, } \frac{15}{31}.$$

Замѣнимъ мимоходомъ, что при какомъ ни есть числѣ жетоновъ, вѣроятность вынуть нечетное число жетоновъ всегда превосходитъ вѣроятность появления четнаго числа, ибо число соединеній, соответствующихъ первому случаю, превышаетъ единицею совокупность соединеній, относящихся ко второму.

§ 21. Связь между разностными уравненіями рассматриваются еще *уравненія съ частными разностями* (*équations aux différences finies et partielles*) и *дифференциально-разностные уравненія* (*équations aux différences mêlées*).

Чтобы объяснить что должно разумѣть подъ наименованіемъ уравненія въ частныхъ разностяхъ, условимся изображать чрезъ $z_{x,y}$ какую ни есть функцію переменныхъ x и y ; $z_{x+1,y}$ будетъ означать ту же функцію z , въ которой переимѣнивъ x , получили приращеніе, равное единицѣ, между тѣмъ какъ величина y не имѣлась, а $z_{x,y+1}$ изображаетъ величину, въ которую обратился функція z , когда y получили приращеніе, равное также единицѣ, между тѣмъ какъ x остался постояннымъ. Выраженія $z_{x+1,y} - z_{x,y} = \Delta_x z_{x,y}$ и $z_{x,y+1} - z_{x,y} = \Delta_y z_{x,y}$ соответственно изображаютъ *частныя разности* (*différences partielles*), функція $z_{x,y}$, вліявшая относительно переменныхъ x и y . Всякое уравненіе, заключающее въ себѣ выраженія $z_{x,y}$, $z_{x+1,y}$, $z_{x,y+1}$ и проч. называется уравненіемъ въ частныхъ разностяхъ. Вотъ примѣръ:

$$z_{x+1,y+1} = a z_{x,y} + (1-a) z_{x,y-1}.$$

Дифференциально — разностнымъ уравненіемъ

называется всякое уравненіе, въ которое входятъ дифференціалы и разности переменныхъ величинъ. Напримѣръ

$$\frac{dy}{dx} + x dy + \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + x = 0.$$

Кондорсетъ и Лапласъ первые занимались интегрированіемъ этого рода уравненій Труды Лавранжа и А. Пласа по сему предмету помѣщены въ разныхъ Мемуарахъ (*Memoires de Berlin*, 1775 г., *Memoires de l'Académie des Sciences de Paris*, Томы VI и VII, *Théorie analytique des Probabilités*).

Для руководства по части Ичисленія Разностей, указываемъ преимущественно на слѣдующія сочиненія:

Эйлера: *Institutiones Calculi differentialis*, 1755 г. Боссю и Кузена (Cousin): *Traité de calcul différentiel et de calcul integral*

Пронж: *Méthode directe et inverse des différences*, Швейкса (Schweins): *Theorie der Differenzen und Differentiale*, Heidelberg, 1825.

Элингера (Oettinger): *Differenzial und Differenzen-Calcul*, Mainz, 1831.

На Русскомъ языкѣ: Курсъ Математики *Осиповскаго* и нѣкоторые переводные курсы, какъ то: Кузена, Лаврова и проч.

DIFFERENTIATIO DE CURVA IN CURVAM.

Смолн CURVA IN CURVAM.

DIFFÉRENTIATION. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ.

Нахожденіе дифференціала; Смолн DIFFÉRENTIEL (CALCUL).

DIFFÉRENTIEL. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ.

Quantité différentielle или просто *différentielle*; *дифференціальное количество, дифференціалъ*. Смолн DIFFÉRENTIEL (CALCUL). *Triangle différentiel*; *дифференціальный треугольникъ*. Смолн CARACTERISTIQUE (TRIANGLE).

МѢТОДЪ DIFFÉRENTIEL, т. е. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ СПОСОБЪ. Такъ назыв. *Нютонъ* способъ для построенія кривой, изъ рода параболъ, проходящей чрезъ нѣсколько данныхъ точекъ. Этотъ способъ, объясненный Нютонъ въ небольшомъ сочиненіи *Methodus differentialis*, основанъ на разсматриваніи разностей вторыхъ, третьихъ и проч. ординатъ данныхъ точекъ — Подъ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМЪ СПОСОБОМЪ разумѣютъ также опредѣленіе

интеграловъ некоторыхъ дифференціальныхъ выражений объ одной или несколькихъ переменныхъ. — Дифференціальное Ичисленіе

DIFFÉRENTIEL (CALCUL). ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ ИЧИСЛЕНИЕ. Открытіе Дифференціального Ичисленія составляетъ безъ сомнѣнія самую блистательную эпоху въ исторіи точныхъ наукъ, даже, можно сказать, въ исторіи успѣховъ ума человеческого. Отъ временъ Архимеда и Аполлонія, величайшихъ геометровъ древности, до самаго Декарта, не встрѣчаемъ ни одного открытія, которое бы значительно расширило предѣлы знаній математическихъ. Въ началѣ XVII вѣка знаменитый Французскій философъ произвелъ счастливый переворотъ въ Геометріи, введя въ нее формулы аналитическія; Смон. COURBE. По множеству важныхъ вопросовъ, относящихся къ чистому Анализу, къ Геометріи, и въ особенности къ Естественной Философіи, оставались нерѣшенными: ихъ рѣшеніе превышало силы Декартова анализа. Недостаточность новаго способа обнаруживалась преимущественно въ изысканіяхъ, въ которыхъ надлежало уловить отношенія измѣняющихся по извѣстному закону величинъ въ то самое мгновеніе, когда эти величины исчезаютъ. Многія попытки для рѣшенія такого рода задачъ изъ Геометріи кривыхъ, были предложены математиками XVII столѣтія; удовлетворительнѣйшій опытъ въ этомъ родѣ былъ способъ для проведенія касательныхъ къ кривымъ, придуманный Англичаниномъ математикомъ Барроуиномъ (Barrow), наставникомъ Ньютона. Мы упоминаемъ о способѣ проведенія касательныхъ по тому что этотъ вопросъ, по всей вѣроятности, привелъ къ изобретенію Дифференціального Ичисленія. Связь этого вопроса съ основною идеею Дифференціального анализа будетъ показана ниже (Смон. Изложеніе правилъ Дифференціального Ичисленія, § 1).

Древніе геометры умѣли проводить касательныя къ коническимъ сѣченіямъ и къ нѣкоторымъ другимъ алгебраическимъ кривымъ; Архимедъ рѣшилъ эту задачу даже для спирали, трансцендентной кривой. Но способы древнихъ были всѣ односторонніе. для каждой кривой они употребляли особый приѣмъ. ей одной свой-

ственный. Первые единообразные способы для проведенія касательныхъ были предложены не прежде XVII столѣтія. Прикѣпчательнѣе изъ нихъ принадлежали Деарту, Фермату и Барроу, о которыхъ мы уже упоминали. Хотя эти способы и имѣли большое преимущество предъ приѣмами древнихъ со стороны общности, но далеко еще не удовлетворяли всѣмъ требованіямъ. Они нѣсколько не распространялись на трансцендентныя кривыя, но даже требовали, чтобы уравненіе и алгебраической кривой было освобождено отъ радикаловъ; удовлетвореніе послѣднему условію, въ большинствѣ случаевъ, приводило къ выкладкамъ весьма сложнымъ.

Въ такомъ состояніи находилась задача о касательныхъ до 1684 года, незабвеннаго въ исторіи Математики. Въ этомъ году Лейбницъ напечаталъ въ Лейпцигскихъ Актахъ (за Октябръ мѣсяцъ) Разсужденіе подъ заглавіемъ: *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* *) Въ немъ заключались первыя начала Дифференціального Ичисленія, а въ 1686 году онъ же, въ Разсужденіи своемъ: *De Geometria recondita et Analysis indivisibilium atque infinitarum* **, изложилъ основанія Интегральному Ичисленію. Съ этого времени начинается для наукъ математическихъ новая эпоха: множество изъ важнѣйшихъ вопросовъ чистаго анализа, Геометріи и Естественной Философіи, рѣшеніе которыхъ было предметомъ тщетныхъ усилій первостепенныхъ геометровъ прежняго времени, были подвергнуты новому анализу: попытки болѣею частію удачались успѣхомъ. Тогда поняли могущество новаго орудія, и всѣ старанія обратились на его усовершеніе.

Въ началѣ 1687 года, съ удивительно спѣхомъ два года послѣ того, какъ Лейбницъ обнародовалъ свое открытіе, Ньютонъ издалъ свои *Математическія начала Естественной Философіи* (*Philosophiae naturalis principia mathematica*). Въ этомъ

*) Новый способъ для наибольшаго и для наименьшаго, а также для касательныхъ, прикѣпчательный какъ грѣшныя, такъ и ирраціональныя численія, и особый способъ для сего рода ичисленія.

**) Объ восстановленной Гевеліи и оъ Анализѣ неопредѣленныхъ и безконечныхъ.

бесспорным творением онъ объявлять посредствомъ наблюдений и вычислений таковыми явления природы, и преимущественно движения небесныхъ тѣлъ. При рѣшеніи труднѣйшихъ вопросовъ Нютонъ руководствовался замъ называемымъ имъ *способомъ fluxionii (methode des fluxions)*. Этотъ способъ, по сущности своей, былъ одно и то же что Лейбницевое Дифференціальное Ичисленіе, онъ котораго отличался только законоположеніемъ и логическими воззрѣніями на основныя начала.

Вотъ вкратцѣ труды, положившіе основаніе Дифференціальному и Интегральному Анализу. Теперь возникаетъ вопросъ, кому изъ двухъ великихъ геометровъ принадлежатъ слава открытія? Этотъ вопросъ подаетъ поводъ къ жаркому прѣисію между Лейбницемъ и Нютономъ, или, лучше, между Германіею и Англіею. Иерошолемскіе историческіе ното и другаго Государства, соединяя съ переносомъ этого важнаго открытія понятіе о народоной славіи, замышляли прѣисію роднаго ииъ геометра. Такое прѣисіе не могло быть безпристрастнымъ; и действительно, прѣисіи, дѣла, знаменитыхъ соавтѣнниковъ, спорныя становяся оспариваюся перемѣною. Если бы время обнародованія Моваго Анализа могло рѣшить вопросъ, то нерѣшимо неоспореимо оспариваюся бы за Лейбницемъ, потому что Разсужденіе Германскаго геометра, какъ сказано выше, напечатано въ 1684 году, а мѣста Нютона издана только въ началѣ 1687 года. Но, не говоря уже о томъ, что знаменитое твореніе Нютонъ, по многотрудности возможныхъ въ ней теорій, не могло быть напечатано въ короткій промежутокъ времени, принадлежій соавтѣ обнародованія Лейбницемъ своего открытія, — имъ Англіискій геометръ окружился отъ всякаго подозрѣнія въ заимствованіи своего способа у Лейбница, — въ некоторомъ письмѣ Нютонъ доказывающъ, что онъ обладалъ уже способомъ fluxionii гораздо прежде 1684 года. Этого общеподлинственно, послужило предлогомъ къ обвиненію Лейбница въ присвоеніи чужаго открытія. Войдемъ въ некоторые подробности прѣисію спорному вопросу.

Женеваскій математикъ Николай Фаціо Дюилле (Fatio de Duillier), поселившійся въ Лондонѣ, былъ первымъ зачинщикомъ прѣисія между Лейбницемъ и Нютономъ. Подстрекаемый съ

одной стороны Англичанами, а съ другой пожеланіемъ личнымъ неусловностіемъ на Лейбница, будто бы не оказавшимъ должнаго уваженія его знаниямъ въ Математикѣ, окъ, въ письмѣ къ Гугенсу отъ 18 Декабря 1691 года, используя названіе Нютонъ первымъ изобрѣшателемъ Дифференціального Ичисленія, но даже намекнулъ, что Лейбницъ заимствовалъ свой способъ изъ переписки, которую велъ съ Нютономъ *). Фаціо повторилъ содержаніе письма въ напечатанномъ имъ сочиненіи объ *кривой наискорѣйшаго ската и объ тѣлѣ наименьшаго сопротивленія*. На это явное оскорбленіе Лейбницъ ошачалъ съ умеренностію, что ошаче не желаетъ испушнать въ прѣисіи о первенствѣ съ Нютономъ, къ которому исполненъ глубокаго уваженія, и уверяетъ, что Нютонъ не одобрилъ поступка Фаціо. Помощъ Лейбницъ привелъ некоторые факты въ опроверженіе навета Фаціо, и окончательно обидѣли, что во всемъ полагается на свидѣтельство и добросовѣстность самаго Нютонъ. Нападкы Женева, не основанные на какихъ доказательствахъ, были забыты на несколько лѣтъ.

Новый случай подаетъ поводъ къ возобновленію прѣисіяго спора. Въ 1701 году изданы въ свѣтъ два сочиненія Нютонъ: *De quadratura curvarum* и *Enumeratio linearum tertii ordinis*. Разборъ этихъ сочиненій, помѣщенный въ Лейпцигскихъ Актахъ, и, какъ думаютъ, съ согласія Лейбница, былъ несовѣтъ благопріятенъ для Нютонъ. Англіискіе математикъ оскорблены этимъ открытіемъ. Одинъ изъ нихъ, по имени Кейтъ, въ *Philosophical Transactions*, за 1708 годъ, помѣстивъ статью, въ которой названъ Нютонъ первымъ изобрѣшателемъ своего способа fluxionii, и присовокупивъ, что Лейбницъ, въ изданномъ имъ Разсужденіи въ 1684 г. перемѣнилъ только чиненіе способа и его такъ-томоженіе. Лейбницъ видя, что Кейтъ явно обвиняетъ его въ присвоеніи чужаго открытія, написалъ письмо къ Хансу Слану (Hans Sloane), Секретарю Лондонскаго Королевскаго Общества, требуя чтобы авторъ этой статьи главно отрекся отъ словъ своихъ. На это Кейтъ, въ письмѣ къ Хансу

*) Смт. вторую часть (стр. 126) любопытной книги Уилкинсона, о которой упоминаю въ статьѣ Следующее нашего Лектора. Въ этой же книгѣ читатели найдутъ и другія историческія подробности объ открытіи Дифференціального Ичисленія въ перепискѣ Лейбница съ Гугенсомъ.

Словою, означающа, что не можешь опровергнуть его, прежде своего мнѣнія, въ подтвержденіе котораго придалъ разные доводы; къ этому Кейль прибавилъ, что Нютонъ сообщалъ о своемъ новомъ способѣ сподобясь Лейбницу, что даже умъ посредственный могъ бы разгадать шайку. Это письмо было сообщено Лейбницу. Оскорбленный такимъ поступкомъ, онъ обратился къ Королевскому Обществу съ настоятельною просьбою прекратить необдуманные толки человека, который пытался очернить его доброе имя. Въ слѣдствіе этого, Королевское Общество нарядило Комиссію для разсмотрѣнія спорнаго дѣла. Комиссары представили свое мнѣніе, основанное на разныхъ документахъ, которые и были напечатаны въ первый разъ 1712 года подъ заглавіемъ: *Commercium epistolicum de analysi promota*, и попомощи, со многими дополненіями, въ 1722 году. Предметаemy нашимъ читателямъ это мнѣніе въ переводѣ.

Донесеніе такъ въ Королевскаго Общества, напечатанныхъ для разсмотрѣнія жалобъ Лейбница на Кейля.

„Между всѣми письмами и сборниками (*recueils*), находящимися въ Архивѣ Общества, также между бумагами Г. Коллинса, мы разсмотрѣли все, что было писано, съ 1669 по 1677 годъ, особенно; мы показывали эти бумаги людямъ, которые знали почеркъ Гг. Барроуа, Коллинса, Олденбурга и Лейбница; они признали подлинность писемъ; письма же Г. Грегоріи мы сравнили между собою, и сдѣлали некоторыя изъ нихъ съ копіями, списанными Г. Коллинсомъ. Мы сдѣлали копіи съ тѣхъ изъ упомянутыхъ бумагъ, которыя имѣли какую либо связь съ возложеніемъ на насъ дѣломъ; свидѣтельствуемъ въ вѣрности всѣхъ сихъ выписокъ, и предполагая, что ихъ вѣрность съ подлинными.

Изъ сихъ копіевъ и бумагъ мы заключаемъ слѣдующее.

1°. Г. Лейбницъ былъ въ Лондонѣ въ началѣ 1673 года, а оттуда онъ уѣхалъ въ Парижъ въ началѣ Марта того же года. Въ бытность свою въ Парижѣ онъ велъ переписку съ Г. Коллинсомъ до Сентября 1676 года; посредникомъ переписки былъ Г. Олденбургъ. Потомъ Г. Лейбницъ возвратился въ Ганноверъ, и на возвратномъ пути былъ опять въ Лондонѣ и въ Амстердамѣ. Впрочемъ, изъ писемъ

видно, что Г. Коллинсъ сообщалъ искуснымъ математикамъ, все, что узнавалъ самъ отъ Гг. Нютона и Грегоріи.

2°. Г. Лейбницъ, во время первого своего пребыванія въ Лондонѣ, говорилъ, что изобрѣлъ способъ вычисленія, который, называлъ Дифференціальнымъ; хотя Докторъ Пелль и показывалъ ему, что это вычисленіе не, иное что, какъ способъ Мутона*), но Лейбницъ настаивалъ, что открытіе принадлежитъ ему; во первыхъ, потому что до изобрѣтенія своего изчисленія онъ ничего не зналъ о способѣ Мутана, а во вторыхъ, что онъ развилъ свое открытіе гораздо болѣе, нежели Мутонъ. Мы не могли замѣтить, чтобы Г. Лейбницъ зналъ иной Дифференціальныя способы, кромѣ Мутанова, прежде письма, которое онъ писалъ къ Олденбургу 21 Іюня 1677 года. Слѣдовательно спустя годъ послѣ того, какъ письмо Нютона къ Коллинсу отъ 10 Декабря 1672 года было послано въ Парижъ для сообщенія Лейбницу, и по прошествіи слишкомъ четырехъ лѣтъ съ того времени, какъ Коллинсъ началъ сообщать, это самое письмо многоимъ ученымъ, съ которыми былъ въ сношеніяхъ. Должно замѣтить, что въ упомянутомъ письмѣ Г. Нютона, изложеніе способа флюкцій показывается употребительнымъ для ума, разсуждающаго.

3°. Изъ письма Г. Нютона отъ 13 Іюня 1676 года очевидно слѣдуетъ, что онъ обладалъ способомъ флюкцій за лѣтъ, идущихъ передъ тѣмъ временемъ, какъ писалъ астроному, а практиковъ его: *Analysis per AEquationes numero terminorum infinitas*, посланный въ 1669 году Г. Коллинсу Докторомъ Барроуемъ, доказывать, что Нютонъ открылъ свой способъ еще прежде.

4°. Дифференціальныя способы одинаковы со способомъ флюкцій; они раздѣляются между собою

*) Способъ, о которомъ упоминается здѣсь, состоялъ въ суммированіи рядовъ посредствомъ конечныхъ разностей ихъ членовъ. Докторъ Пелль показывалъ Лейбницу, что способъ, который онъ считалъ новымъ, напечатанъ уже въ 1670 году въ книгѣ *obviandis* *diagrammatis* *solenni* и *lumi*, изданной Ливонскимъ каноникомъ Вургомомъ. Это обстоятельство приводитъ самъ Лейбницъ въ письмѣ своемъ къ Олденбургу, присовокупилъ къ тому, что онъ изобрѣлъ уже другой, совершеннѣйшій способъ. Впрочемъ должно замѣтить, что способъ, о которомъ идетъ рѣчь, не есть собственно Дифференціальныя, ибо въ немъ разсматриваются конечныя, а не безконечныя малѣйшія разности.

Примеч. сое. Лексикона.

только названіем и законоположеніем. Г. Лейбницъ извѣщаетъ дифференціалами то, что Г. Нютонъ именуетъ *моментами* или *флюкціями* (*moments* или *fluxions*); сверхъ того, Г. Нютонъ не употребляетъ знака *d*, который Г. Лейбницъ означаетъ дифференціалы. По сей-то причинѣ мы и думаемъ, что вопросъ вовсе не состоялъ въ томъ, чтобы знать, кто открылъ пошъ или другой изъ этихъ двухъ способъ; но надобно рѣшить, кто былъ первымъ изобрѣшателемъ способа, который, по сущности своей, одинъ и тотъ же. Въ этомъ отношеніи мы думаемъ, что тѣ, которые приписывали Г. Лейбницу первенство сего открытія, не имѣли достаточныхъ свѣдѣній, а можешь быть и лжакыхъ, о перепискѣ, которую Г. Лейбницъ велъ гораздо прежде съ Гг. Коллинсомъ и Олденбургомъ, и что имъ также было извѣстно, что Г. Нютонъ обладалъ способомъ флюкцій еще за 15 лѣтъ передъ тѣмъ, какъ Г. Лейбницъ напечаталъ въ *Лейпцигскихъ Актахъ* свое Разсужденіе объ этомъ предметѣ.

Но всѣмъ сими причинами намъ кажется, что Г. Нютонъ есть первый изобрѣшатель исчисленія, о которомъ говорили, и мы думаемъ, что Г. Лейбъ, во всемъ сказанномъ намъ, не оскорбилъ Г. Лейбница. Предоставляемъ Обществу разсудить, не признаемъ ли онъ нужнымъ напечатать выписки изъ писемъ и бумагъ, которыми мы нынѣ представляемъ, и присовокупить къ нимъ всё, что находится по сему предмету въ трепещемъ пошѣ сочиненій *Вальсы*.¹⁴

Это донесеніе раздражило Лейбница, и споръ не прекратился. Разныя безыменныя сочиненія, въ которыхъ скорѣе нападали на способъ Ньютона, чѣмъ защищали права Лейбница на первенство открытія, были изданы на твердой землѣ Англійскіе математикъ отвѣчали на нихъ. Въ продолженіи этой полемики, Лейбницъ желая, какъ онъ выразился, *поцупать пульсъ у Англичанъ*, предложилъ намъ чрезъ другихъ математиковъ задачу объ *траекторіахъ*. Вопросъ состоялъ въ опредѣленіи кривой линіи, пересѣкающей рядъ данныхъ кривыхъ одного и того же рода подъ угломъ, или постояннымъ, или измѣняющимся по извѣстному закону. Нютонъ, къ которому собственно относился вызовъ, немедленно предложилъ способъ для приведенія этого вопроса къ дифференціальному уравненію. Въ это время удержъ

Лейбницъ (1716 г.); *Иоанн Бернулли*, вступаая за дѣло знаменитаго Германскаго геометра, приняла рѣшеніе Ньютона, и объявила, что оно вовсе не удовлетворительно, потому что главное затрудненіе состоитъ въ интегрированіи дифференціального уравненія, чего не сдѣлалъ Нютонъ; См. *TRAJECTOIRES (PROBLÈME DES)*. Съ этого времени, сколько извѣстно, Нютонъ, съ одной стороны обезпеченный своею громкою славою, а съ другой, преклонившимъ лѣтъ, не принималъ уже никакого участія въ распрѣ; но нѣкоторые приверженцы и ученики его не покинули поприща прегія. Наиболее ошачившійся на немъ былъ извѣстный *Тейлоръ*.

Изъ всѣхъ приведенныхъ здѣсь обстоятельствъ можно заключить съ достовѣрностію, что способъ флюкцій, или, что все равно, Дифференціальное Исчисленіе есть открытіе Ньютона. Этотъ фактъ не подлежитъ никакому сомнѣнію. Остаются рѣшить вопросы: открылъ ли Лейбницъ съ своей стороны это исчисленіе, или заимствовалъ его изъ писемъ Ньютона и разговоровъ съ Англійскими математиками во время своего пребыванія въ Англіи, что было, какъ мы видѣли, въ началѣ 1673 года?

Нынѣ математики почти единогласно рѣшаютъ этотъ вопросъ въ пользу Лейбница. Представляемъ въ короткихъ словахъ обстоятельство, на которыхъ можно основать оправданіе его противъ обвиненія Англійскихъ математиковъ. И зашавшъ по первымъ, что донесеніе членовъ Лондонскаго Королевскаго Общества было написано подъ вліяніемъ обстоятельство, неблагопріятныхъ для Лейбница. Дѣйствительно, комиссары могли быть увлечены невольнымъ образомъ за пределы справедливости съ одной стороны чувствомъ народнои славы, а съ другой глубокимъ уваженіемъ къ Нютону, бывшему тогда Президентомъ Королевскаго Общества, изъ среды котораго они были назначены. Во вторыхъ, при внимательномъ чтеніи писемъ, напечатанныхъ въ *Commercium epistolicum*, усматриваемъ, что Лейбницъ не могъ извлечь изъ нихъ никакого свѣдѣнія о способѣ флюкцій; и въ самомъ дѣлѣ, въ этихъ писмахъ упоминается только о выгодахъ и о пользѣ способа Ньютона; что же касается до началъ, на которыхъ основано его исчисленіе, то объ этомъ ничего въ нихъ не

ходить. Въ одномъ только письмѣ къ Ольденбургу, отъ 24 Октября 1676 года, Нютонъ приводитъ безъ доказательствъ нѣсколько предложений, основанныхъ на способѣ «люкцій», и прибавляетъ, что вывелъ эти теоремы изъ рѣшенія одного общаго вопроса, который и приводить въ письмѣ своемъ, но въ загадочномъ видѣ, переставляя буквы. Если бы даже Лейбницъ и разобралъ этотъ логотрихъ, то прочелъ бы только слѣдующее: *Дано уравненіе, заключающее въ себя количества текуція (quantités fluentes), найти теченія (fluxions), и наоборотъ.* Могъ ли Лейбницъ узнать изъ этого хитя что либо о способѣ «люкцій»? Это письмо было сообщено Лейбницу въ 1677 году, и онъ, въ отвѣтъ своемъ отъ 21 Іюня 1677, писанномъ къ Ольденбургу въ слѣдствіе этого письма, объяснилъ открыто начала своего Дифференціального Искисленія, приговоруя, что давно уже употребляетъ этотъ способъ для проведенія касательныхъ къ кривымъ.

Наконецъ, сильнѣйшій доводъ въ пользу Лейбница есть свидѣтельство самого Нютона. Мы говоримъ о *Прилжчаніи на VII Предложеніе* второй книги: *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. Вотъ переводъ этого прилжчанія: „Десять лѣтъ тому назадъ, когда я велъ перипску съ весьма умнымъ геометромъ Г. Лейбницемъ, я писалъ къ нему, что илго способъ для опредѣленія наибольшихъ и наименьшихъ величинъ, для проведенія касательныхъ и для рѣшенія другихъ подобныхъ вопросовъ, и что способъ мой съ такою же удобностію можетъ быть употребленъ для уравненій, заключающихъ въ себя радикалы, какъ и для раціональныхъ. Я скрылъ тогда свой способъ подъ переставленными буквами, которыхъ значеніе было слѣдующее: Дано уравненіе, заключающее въ себя сколько угодно количествъ текущихъ, найти теченія, и наоборотъ. На это знаменитый Лейбницъ отвѣтилъ, что съ своей стороны онъ нашелъ подобный способъ, который и сообщилъ мнѣ въ томъ же письмѣ; его способъ отличался отъ моего только названіемъ и знаменіемъ величинъ.“ Это прилжчаніе находилось еще въ изданіяхъ 1713 и 1714 годовъ, напечатанныхъ, какъ полагаютъ, безъ вѣдома Нютона, а выпущено изъ изданія 1726 года.

Представивъ краткое обозрѣніе обстоятельствъ, относящихся къ пренію, которому поддалъ открытіе Дифференціального Искисленія, должно упомянутьъ также и о нападеніяхъ на

новый анализъ. Нйвентинтъ (*Nieuwentuit*), весьма посредственный математикъ, первый вооружился противъ новаго способа; на его возраженія, напечатанныя въ 1691 и 1695 годахъ, отвѣчалъ самъ Лейбницъ (*Act. Lips.* 1694), а впоследствии Бернулли и Германъ, которые съ очевидностію доказали, что противникъ Дифференціального Искисленія рѣшительно не понималъ его.

Въ 1701 году искусный алгебристъ Ролль, изобрѣшатель способа каскадъ, возсталъ противъ новаго анализа, и съ необыкновеннымъ жаромъ и самоуверенностію преслѣдовалъ его до 1705 года. Онъ несколько нападалъ на основныя начала Дифференціального Искисленія, но старался даже доказать удачно выбранными примѣрами, что оно часто приводитъ къ заключеніямъ ошибочнымъ. Соренъ (*Saurin*) и Варимонъ, ревностный защитникъ Дифференціального Искисленія, отвѣчали на эти возраженія, и объяснили кажуціяся противорѣчія, которыми Ролль старался вселить сомнѣнія на счетъ непогрѣшимости результатовъ, доставляемыхъ новымъ анализомъ.

Въ 1734 году Англійскій Эпископъ, Докторъ Берклея, возобновилъ гоненіе на способъ «люкцій», и присовокупилъ къ тому еще безразсудное обвиненіе математиковъ въ нечѣрии. Миддлетонъ и Смитъ, нѣвъ въ виду преимущественно странности второй обвинительной статьи, въ отвѣтъ своемъ ослѣдили Берклея. Вилсонъ и Робинсъ издали также въ 1735 году небольшія отвѣтныя сочиненія на возраженія Берклея противъ Нютонова способа «люкцій».

Послѣ сего крашкого очерка исторіи открытія Дифференціального Искисленія, надлежало бы представивъ читателямъ обозрѣніе его употребовъ. Но, въ этомъ отношеніи, *Дифференціальное Искисленіе*, собственно говоря, заключаетъ въ себя мало любопытнаго. Почти всѣ прилжчательныя теорія и усовершенствованія Анализа Безконечныхъ принадлежатъ къ исторіи Интегрального Искисленія, къ которой и отсылаемъ читателей. Историческія же подробности, собственно относящіяся къ Дифференціальному Искисленію, помѣщены въ своемъ мѣстѣ въ отдѣльныхъ статьяхъ нашего Лекціона. Смол. преимущественно: TAYLOR (THÉORÈME DE), MACLAURIN (THÉORÈME DE), FRACTION, MAXIMA ET MINIMA (THÉORIE

DES), SÉRIE, COURBE, DÉVELOPPÉE, CAUSTIQUE, CRÉPUSCULE (PROBLÈME DU PLUS COURT) и проч. и проч. Скажем только, что из современников Нютона и Лейбница преимущественно содействовали успехам Дифференциального Ичисления братья *Яков* и *Иван Бернулли*, *Маркиз де Л'Опиталь*, известный сочинением своим: *Analyse des infiniment petits*, *Паранс (Parent)*, *Вариньон*, *Сорен* и некоторые другие математика, менее известные.

Предлагаем теперь сжатое, но вкратце с полным изложением правил Дифференциального Ичисления. В некоторых местах мы воспользовались воззрением Г. Кони на этот предмет; в других, предложили правила в ином виде. Во всех случаях старались по возможности сокращать доказательства, не нарушая их строгости. Что касается до приложений этой отрасли анализа к различным теориям, то читатели найдут их в отдельных главах нашего Лексикона.

ИЗЛОЖЕНИЕ ПРАВИЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

Прежде нежели приступим к изложению правил Дифференциального Ичисления, покажем каким образом задача о проведении касательных к кривым могла привести к изобретению этого способа.

§ 1. Пусть будет *ВОМА* (черт. 5 Листъ VIII) какая ни есть кривая линия, описанная к прямоугольным координатным осям *X'OX*, *Y'OY*, и положим, что требуется провести к ней касательную *ТМ* в точке *М*. Опустим из точки *М* перпендикуляр *MP* на ось *x*-овъ, и сделаем $OP = x$, $PM = y$; уравнение данной кривой можно будет представить в виде $y = f(x)$, разумея под $f(x)$ известную функцию абсциссы x . Ясно, что направление искомой касательной было бы определено, если бы, сверяя данной уже на кривой точки *М*, могли найти другую точку, например *Т*, принадлежащую этой касательной. Но, для определения точки *Т*, надлежало бы иметь сторону *РТ* треугольника *МРТ*, который неопределяется, ибо в нем известны только две части, именно, сторона $PM = y$ и угол $ТРМ$, по предполо-

жению прямой. И такъ, на этомъ основаніи, мы не можемъ рѣшить занимающей насъ задачи. Посмотримъ же теперь, нельзя-ли основать рѣшеніе вопроса на другой гипотезѣ, отъ которой бы легко было перейти къ истинной. Такъ напримеръ, вмѣсто того чтобы непосредственно искать направление касательной *ТМ*, мы можемъ сперва искать положеніе сѣкущей *SM*, проходящей чрезъ точки *М* и *М'* данной кривой, а потомъ уже перейти отъ этой ложной гипотезы къ истинной. Для этого споможь только предположить, что точка *М'* приближается неопредѣленно къ точкѣ *М*, и наконецъ совпадаетъ съ нею. Объяснимъ это самымъ вычисленіемъ.

Изъ точки *М'* опускаемъ на ось *x*-овъ перпендикуляръ *М'Р'*, а изъ *М* проводимъ линію *MQ*, параллельную этой оси. Пусть будетъ приращеніе абсциссы $PP' = MQ = \alpha$, приращеніе ординаты $QM' = \beta$. Изъ подобныхъ треугольниковъ *М'МQ*, *МSP* выводимъ пропорцію

$$\beta : \alpha = y : SP,$$

откуда

$$SP = y \frac{\alpha}{\beta}.$$

Чтобы перейти отъ вспомогательной линіи *SP* къ искомой *ТР*, должно, какъ сказано выше, совѣстивши точку *М'* съ точкою *М*, при такомъ совѣщеніи получаемъ условія $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, ибо, въ этомъ предположеніи, абсциссы и ординаты не получаютъ никакого приращенія.

И такъ, найдемъ $ТР = y \cdot \frac{0}{0}$. Очевидно, что вторая часть этого равенства, представляющая въ неопредѣленномъ видѣ $\frac{0}{0}$, будетъ действительно величиною неопредѣленною, пока не назначимъ какой либо зависимости между α и β , то есть, пока кривая не будетъ дана по своему уравненію.

Положимъ напримѣръ, что данная кривая есть эллипсъ, описанный къ прямоугольнымъ координатнымъ осямъ, пересѣкающимся въ его вершинѣ. Уравненіе этой кривой будетъ

$$(1) \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2),$$

гдѣ a и b соответственно изображаютъ большую и малую полу-оси. Чтобы ввести въ это уравненіе вспомогательныя величины α и β , по-

ложимъ $OP=x$, $PM=y$ (черт. 5 Листъ VIII); найдемся $OP'=x+\alpha$, $P'M'=y+\beta$, и следовательно

$$(y+\beta)^2 = \frac{b^2}{a^2} [2a(x+\alpha) - (x+\alpha)^2],$$

или, по разложениі,

$$y^2 + 2\beta y + \beta^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2) + \frac{b^2}{a^2} (2a\alpha - 2\alpha x - \alpha^2).$$

Это уравненіе, въ силу формулы (1), примемъ видѣ

$$(2) \quad 2\beta y + \beta^2 = \frac{b^2}{a^2} (2a\alpha - 2\alpha x - \alpha^2),$$

откуда

$$(5) \quad y \cdot \frac{\alpha}{\beta} = SP = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{2y^2 + \beta y}{2(a-x) - \alpha}.$$

Вотъ выраженіе для длины SP , определяющей положеніе съвѣснѣй SMM' . Чтобы перейти отъ съвѣснѣй SMM' къ касательной TMi , должно совмѣстить точку M' съ M , а для этого слѣдуетъ положить $\alpha=0$ и $\beta=0$; въ такомъ предположеніи SP обратится въ TP , и получимъ

$$(4) \quad TP = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y^2}{a-x};$$

это выраженіе, какъ извѣстно, дѣйствительно принадлежитъ подкасательной эллипса.

Посмотримъ теперь, нѣтъ ли возможности изъ даннаго уравненія эллипса вывести непосредственно найденную сейчасъ величину TP . Прежде всего замѣтимъ, что мы не достигли бы сей цѣли, если бы съ самаго начала положили $\alpha=0$ и $\beta=0$, ибо тогда предположеніемъ уничтожили бы треугольникъ $MM'Q$, на которомъ основано все вычисленіе. И такъ, надѣвшись разсмотрѣть, какіе члены въ уравн. (2) должны были отброшены для того, чтобы формула (5) не заключала въ себѣ ни α ни β , или, что все равно, чтобы отъ вспомогательной гипотезы прямо перейти къ истинной, и, выиспо под-
свѣснѣй SP , получить подкасательную TP .

Уничтоженіе членовъ βy и $-\alpha$ въ уравн. (3) приводитъ насъ къ истинной гипотезѣ. Посмотримъ же какіе члены должны были отпущены въ уравн. (2), чтобы формула (5) не заключала въ себѣ количествъ βy и $-\alpha$. Легко видѣть, что лишніе въ ней члены будутъ β^2 и $-\alpha^2$ подъ скобками; откинувъ ихъ, получимъ просто

$$(5) \quad 2y\beta = \frac{b^2}{a^2} (2a\alpha - 2\alpha x).$$

Нѣтъ никакого сомнѣнія, что уничтоженіе

членовъ β^2 и $-\alpha^2$ въ уравн. (2) было бы неопознательно, еслибы мы въ виду опредѣлить подѣвѣснѣй SP ; но такъ какъ наша цѣль состояла въ опредѣленіи подкасательной, то чрезъ отпущеніе количествъ β^2 и $-\alpha^2$ мы не делаемъ никакой погрѣшности. Однимъ словомъ, откидывая β^2 и $-\alpha^2$, мы только исправляемъ ошибочность принятой нами вспомогательной гипотезы, и возвращаемся къ истинной.

Уравненіе (5) есть не иное что, какъ первоначальное уравненіе эллипса, въ которомъ поспавили на мѣсто x и y соответственно $x+\alpha$ и $y+\beta$, и, по разложениі, удержали только члены, заключающіе въ себѣ первую степень приращеній α и β . Можно замѣтить, что члены y^2 , $2ax$, $-\alpha^2$ уравненія (1) произвели соответственно выраженія $2y$, $2a\alpha$, $-2\alpha x$ въ уравненіи (5). Эти выраженія называющіеся дифференціалами количествъ y^2 , $2ax$, $-\alpha^2$.

Весьма простая задача, которую мы сейчасъ рѣшили, привела насъ къ слѣдствію, что для перехода отъ вспомогательной гипотезы къ истинной, надобно, съ самаго начала вычисленія, удерживать только первую степень приращеній α и β . Рѣшеніе другихъ, возмѣтившихъ вопросовъ, привело бы насъ къ тому же результату къ этому самому заключенію. И вообще, истинна, о которой идемъ рѣчь, всегда можетъ быть доказана *a posteriori*.

Распространимъ сказанное здѣсь на общій случай задачи о касательныхъ. Пусть будетъ $f(x, y)=0$ уравненіе какой нибудь кривой BOA (черт. 5 Листъ VIII). Представимъ какъ и выше чрезъ α и β приращенія PP' и QM' абсциссы $OP=x$ и ординаты $PM=y$, получимъ

$$f(x+\alpha, y+\beta)=0.$$

Допустимъ, что $f(x+\alpha, y+\beta)=0$ доставляетъ разложеніе вида

$$A\alpha + B\beta + C\alpha^2 + D\alpha\beta + E\beta^2 + \dots = 0;$$

это предположеніе всегда можетъ быть доказано *a posteriori*; См. TAYLOR (THÉORÈME DE). Изъ предыдущаго уравненія, написаннаго въ видѣ $(A + C\alpha + D\beta + \dots)\alpha + (B + E\beta + \dots)\beta = 0$, выводимъ

$$\frac{\alpha}{\beta} = - \frac{B + E\beta + \dots}{A + C\alpha + D\beta + \dots}.$$

И такъ, подѣвѣснѣй SP опредѣляется форму-

$$SP = y \cdot \frac{a}{\beta} = -\frac{y(B + E\beta + \dots)}{A + Ca + D\beta + \dots}.$$

Но мы видели выше, что для перехода отъ под-
скающей SP къ подкасательной TP слѣдуетъ
положить $\alpha = 0$ и $\beta = 0$; слѣдовательно

$$TP = y \cdot \frac{a}{0} = -y \cdot \frac{B}{A}.$$

Чтобы изъ уравненія $f(x + \alpha, y + \beta) = 0$ по-
лучить непосредственно величину $\frac{a}{\beta} = -\frac{B}{A}$,
сложимъ только откинувши члены $E\alpha^2, \dots, C\alpha$,
 $D\beta, \dots$ въ выраженіи

$$\frac{a}{\beta} = -\frac{B + E\beta + \dots}{A + Ca + D\beta + \dots},$$

или, что всё равно, уничтоживши величины $C\alpha^2$,
 $Da\beta, E\beta^2, \dots$ въ формулѣ

$$f(x + \alpha, y + \beta) = A\alpha + B\beta + C\alpha^2 + Da\beta + E\beta^2 + \dots = 0.$$

Итакъ, откидывая въ уравненіи $f(x + \alpha, y + \beta) = 0$
степени количествъ α и β , превышающія пер-
вый, мы исправляемъ только ошибочность
вспомогательнаго предположенія, и возвращаемъ-
ся въ строгомъ смыслѣ къ истинному. При-
бавимъ къ этому, что величина α совершенно
произвольна: дѣйствительно, она изображаетъ
приращеніе абсциссы кривой линіи, или каса-
тельной TM , отнесенной къ первоначальнымъ
координатнымъ осямъ OX и OY , а это прира-
щеніе очевидно можетъ быть взято какимъ
угодно. Что касается до величины β , то она
выражаетъ соответствующее приращеніе орди-
наты той же самой касательной.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что удержавъ въ
разложенномъ уравненіи $f(x + \alpha, y + \beta) = 0$ оди-
нъ первый степени количествъ α и β , мы имѣмъ
самымъ выражаемъ, что α есть произвольное при-
ращеніе абсциссы кривой линіи или касательной,
а β приращеніе ординаты касательной, а не
ординаты кривой; и такъ, если бы отнесли ка-
сательную TM къ двумъ координатнымъ осямъ
 MX'' , MY'' , параллельнымъ старымъ, то отноше-
ніе $\frac{a}{\beta}$ изобразило бы отношеніе какой ни
есть абсциссы \overline{Mr} касательной къ соответ-
ствующей ей ординатѣ \overline{pt} .

Намъ кажется, что на основаніи этого за-
мѣчанія, весьма простаго, можно во всякомъ слу-
чѣе устранивъ все недоразумѣніе, которое
представлялось при объясненіи началъ Диффе-
ренціальнаго Искисленія.

§ 2. Въ математическомъ анализѣ разсмат-
риваются величины двухъ родовъ: *постоянныя*
и *переменные*. Постояннымъ называется та-
кое количество, которое сохраняетъ одну и
ту же величину въ продолженіи всего вычисле-
нія. Напротивъ того, переменное или измѣняе-
мое количество переходитъ послѣдовательно
чрезъ многія величины, различныя между собою.
Итакъ, въ уравненіи эллипса предыдущаго па-
раграфа, количества a и b , то есть полу-оси
кривой, изображающія величины *постоянныя*, а
количества x и y , именны координаты кривой, —
величины *переменные*. И дѣйствительно, зна-
ченія x и y измѣняются вѣдущъ съ положеніемъ
точки, которую разсматриваемъ на эллипсѣ,
между тѣмъ какъ полу-оси a и b , въ одномъ и
томъ же эллипсѣ, остаются неизмѣнными.

Когда значенія, послѣдовательно принимае-
мыя переменною величиною, приближаются бо-
льше и больше къ величинѣ опредѣленной, такъ
что наконецъ разнѣваются отъ нея какъ удо-
бно мало, то эта опредѣленная величина называ-
ется *предѣломъ* разсматриваемой переменной.
Итакъ, площадь круга есть предѣлъ, къ кото-
рому послѣдовательно приближаются площади
вписанныхъ правильныхъ многоугольниковъ по
мѣрѣ того, какъ увеличиваемъ число ихъ спо-
роне. Здѣсь необходимо сдѣлать одно замѣчаніе:
подъ наименованіемъ *предѣла*, согласно съ по-
нятіями древнихъ геометровъ, разумѣются вооб-
ще величину, къ которой неопредѣленно при-
ближается переменное количество, не дости-
гающее впрочемъ никогда своего предѣла. Въ
этомъ смыслѣ, площадь круга есть настоящій
предѣлъ площадей вписанныхъ въ него много-
угольниковъ. Но мы условимся принимать слово
предѣлъ и въ другомъ, нѣсколько отличномъ
значеніи, отъ чего не произойдетъ никакого
двусмыслія. Пусть будетъ $f(x)$ какая ни есть
«ункція» переменной x , и положимъ, что разсмат-
ривается отношеніе приращенія «ункція» $f(x)$
къ приращенію i самой переменной x , то есть
дробь

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i}.$$

Условимся называть *предѣломъ* этой дроби, ве-
личину, къ которой она стремится по мѣрѣ
того, какъ приращеніе i приближается къ нулю.

И такъ, выраженіе

$$\text{пред. } \left\{ \frac{f(x+i) - f(x)}{i} \right\}$$

будетъ означать частную величину дроби

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

для $i=0$. Напримѣръ, если бы имѣли $f(x)=x^2$, то нашли бы

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i} = \frac{(x+i)^2 - x^2}{i} = \frac{2xi + i^2}{i} = 2x + i,$$

и слѣдовательно

$$\text{пред. } \left\{ \frac{f(x+i) - f(x)}{i} \right\} = \text{пред. } \left\{ \frac{(x+i)^2 - x^2}{i} \right\} = 2x.$$

Хотя предѣлы нѣкоторыхъ переменныхъ выражений и представляются въ неопредѣленныхъ видахъ, но, посредствомъ особенныхъ приёмовъ, можно опредѣлить истинныя ихъ значенія. Напримѣръ, при выраженіи

$$\frac{(1+\varepsilon)^q - 1}{\varepsilon}, \quad (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}, \quad \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon},$$

для $\varepsilon=0$, обращаются соотвѣстственно въ $\frac{0}{0}$,

1^{∞} , $\frac{0}{0}$. Такъ какъ при изложеніи правилъ дифференцірованія мы будемъ имѣть надобность въ предѣлахъ сихъ трехъ выраженій, то займемся теперь ихъ опредѣленіемъ. Начнемъ съ перваго, и положимъ сперва, что показатель p есть цѣлое положительное число, которое изобразимъ чрезъ m . Получится

$$\frac{(1+\varepsilon)^m - 1}{\varepsilon} = \frac{m\varepsilon + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \varepsilon^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varepsilon^3 + \dots + \varepsilon^m}{\varepsilon} \\ = m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \varepsilon + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{m-1}.$$

Такъ какъ число членовъ этого ряда конечное, то, полагая $\varepsilon=0$, найдемъ

$$\text{пред. } \left\{ \frac{(1+\varepsilon)^m - 1}{\varepsilon} \right\} = m.$$

Легко распространить слѣдующіе, выражаемое этою формулою, на какой ни есть показатель, дробный или отрицательный. Дѣйствительно, положимъ сперва, что показатель есть дробное число $\frac{m}{n}$; принимая

$$(1+\varepsilon)^{\frac{m}{n}} - 1 = \omega, \quad \text{найдемъ } (1+\varepsilon)^m = (1+\omega)^n, \\ \text{или, по разложеніи,}$$

$$m\varepsilon + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^m = n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \omega^2 + \dots + \omega^n,$$

опикуда

$$\frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{m + \frac{m'(m-1)}{1 \cdot 2} \omega + \dots + \omega^{m-1}}{n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \omega + \dots + \omega^{n-1}}.$$

Но $\frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{(1+\varepsilon)^{\frac{m}{n}} - 1}{\varepsilon}$; сверхъ того, принимая въ соображеніе равенство $(1+\varepsilon)^m = (1+\omega)^n$, изъ котораго слѣдуетъ, что при $\varepsilon=0$, будетъ также $\omega=0$, найдемъ

$$\text{пред. } \left\{ \frac{\omega}{\varepsilon} \right\} = \text{пред. } \left\{ \frac{(1+\varepsilon)^{\frac{m}{n}} - 1}{\varepsilon} \right\} = \frac{m}{n}.$$

Для отрицательнаго показателя, получимъ слѣдовательно

$$\frac{(1+\varepsilon)^{-q} - 1}{\varepsilon} = \frac{1 - (1+\varepsilon)^q}{\varepsilon(1+\varepsilon)^q} = -\frac{(1+\varepsilon)^q - 1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{(1+\varepsilon)^q}.$$

Но предѣлъ выраженія $\frac{(1+\varepsilon)^q - 1}{\varepsilon}$, какъ доказано

выше, есть q , а предѣлъ дроби $\frac{1}{(1+\varepsilon)^q}$ очевидно будетъ 1. Слѣдовательно

$$\text{пред. } \left\{ \frac{(1+\varepsilon)^{-q} - 1}{\varepsilon} \right\} = -q.$$

И такъ, каковъ бы ни былъ показатель p , получимъ формулу

$$(6) \quad \text{пред. } \left\{ \frac{(1+\varepsilon)^p - 1}{\varepsilon} \right\} = p.$$

Разсмотримъ теперь, во что обращается вы-

раженіе $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{m}}$, когда $\varepsilon=0$. Допустимъ сперва, что ε есть количество положительное вида $\frac{1}{m}$, разумя подъ m цѣлое число, которое увеличивается постепенно, и дѣлается наконецъ безконечнымъ. Получимъ

$$(1+\varepsilon)^{\frac{1}{m}} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \\ + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) + \dots \\ + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{m}\right).$$

Замѣтимъ, что въ этомъ ряду всѣ члены положительныя, и что число ихъ, а также и величина каждаго, начиная съ перваго, возрастаетъ вмѣстѣ съ увеличеніемъ количества m ; сверхъ того очевидно, что каждый изъ коэффициентов $\left(1 - \frac{1}{m}\right)$, $\left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right)$, и проч.

менте единицы. Изъ этого заключаемъ, что выраженіе $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ возрастаетъ вѣсѣ съ m ; легко показать, что оно стремится къ нѣкоторому предѣлу, содержащемуся между 2 и 3. Действительно, изъ сказаннаго выше слѣдуетъ, что рядъ

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{1.2.3} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) + \frac{1}{1.2.3.4} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \left(1 - \frac{3}{m}\right) + \dots$$

будетъ постоянно > 2 , но менѣе суммы слѣдующей строки:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots;$$

но какъ сія послѣдняя очевидно менѣе суммы

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.2.2} + \dots = 1 + 1 + 1 = 3,$$

то и заключаемъ, что предѣлъ выраженія.....

$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < 3$. Значитъ предѣлъ, опредѣляющійся безконечнымъ рядомъ

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots \text{ и проч.}$$

есть трансцендентное число, которое весьма часто встрѣчается въ математическомъ анализѣ, и означаетъ обыкновенно буквою e . Приближенная величина его есть слѣдующая:

$$e = 2,7182818284 \dots$$

Число e , принятое *Неперомъ* за основаніе логарифмической системы, называется поэтому основаніемъ *Неперовой системы*. Смол. LOGARITHME.

Положимъ теперь, что въ выраженіи $(1 + \frac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{\varepsilon}}$ количество ε положительное какъ и прежде, но не можетъ быть выражено дробью вида $\frac{1}{m}$. Пусть будутъ m и $n = m + 1$ два цѣлыхъ числа, между которыми заключается дробь $\frac{1}{\varepsilon}$; получимъ

$$\frac{1}{\varepsilon} = m + \mu = n - \nu,$$

гдѣ μ и ν изображаютъ числа положительныя, меньшія единицы. Очевидно, что въ силу условій $\frac{1}{m} > \varepsilon$ и $\frac{1}{n} < \varepsilon$, найдутся слѣдующія неравенства:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} > (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}};$$

но

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{\frac{1}{m} + \frac{\mu}{m}}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n} + \frac{\nu}{n}}.$$

Если замѣнить теперь, что для $\varepsilon = 0$, m и n обратятся въ величины безконечныя, а каждое изъ выраженій

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

въ силу доказаннаго выше, въ число e , и придемъ сверхъ того въ соображеніе, что $\frac{\mu}{m}$ и $\frac{\nu}{n}$ уничтожаются въ томъ же предположеніи, то найдемъ формулы

$$\text{пред.} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e, \quad \text{пред.} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e.$$

Слѣдовательно, и для промежуточнаго выраженія будемъ

$$\text{пред.} (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e.$$

То же самое можно доказать и для иного случая, когда переменное количество ε изъ отрицательнаго состоянія будетъ стремиться къ нулю. Действительно, если положимъ

$$1 + \varepsilon = \frac{1}{1 + \omega} \quad \text{или} \quad \varepsilon = -\frac{\omega}{1 + \omega},$$

то очевидно, что дробныя отрицательныя значенія ε будутъ соотносизмовать положительныя величины количества ω ; сверхъ того, для $\varepsilon = 0$, будемъ также $\omega = 0$. И такъ

$$(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \left(\frac{1}{1 + \omega}\right)^{-\frac{1 + \omega}{\omega}} = (1 + \omega)^{1 + \frac{1}{\omega}} = (1 + \omega)(1 + \omega)^{\frac{1}{\omega}};$$

переходя къ предѣламъ, получимъ

$$\begin{aligned} \text{пред.} (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} &= \text{пред.} \{(1 + \omega)(1 + \omega)^{\frac{1}{\omega}}\} \\ &= \text{пред.} (1 + \omega) \cdot \text{пред.} (1 + \omega)^{\frac{1}{\omega}} = e. \end{aligned}$$

И такъ, мы въ правѣ заявлять теперь, что каково бы ни было переменное количество ε , стремящееся къ нулю, во всякомъ случаѣ будемъ

$$(7) \quad \text{пред.} \{(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\} = e = 2,7182818284 \dots$$

Пределъ выраженія $\frac{\sin \epsilon}{\epsilon}$ определяется весьма простымъ образомъ замѣнивъ, что по причинѣ $\sin \epsilon < \epsilon$ и $\epsilon < \tan \epsilon$, имѣемъ

$$\frac{\sin \epsilon}{\sin \epsilon} > \frac{\sin \epsilon}{\epsilon} > \frac{\sin \epsilon}{\tan \epsilon},$$

или, что все равно,

$$1 > \frac{\sin \epsilon}{\epsilon} > \cos \epsilon.$$

Но предѣлъ $\cos \epsilon$ есть единица; следовательно и промежуточное выраженіе, то есть $\frac{\sin \epsilon}{\epsilon}$ будетъ также имѣть предѣломъ единицу. И такъ

$$(8) \quad \text{пред.} \left\{ \frac{\sin \epsilon}{\epsilon} \right\} = 1.$$

Точно также найдемъ

$$\text{пред.} \left\{ \frac{\tan \epsilon}{\epsilon} \right\} = \text{пред.} \left\{ \frac{\sin \epsilon}{\epsilon} \cdot \frac{1}{\cos \epsilon} \right\} = 1.$$

Величины такого свойства какъ ϵ и ω , употребленныя нами въ предыдущихъ выраженіяхъ, и разсматриваемыя въ то мгновеніе, когда онѣ обращаются въ нуль, называются *безконечно малыми*. Числа же m и n , которые мы употребили въ доказательствѣ формулы (7), и соответствующія предположенія $\epsilon = 0$, называются величинами *безконечно малыми* или *безконечно большими*. Для дальнѣйшихъ подробностей объ этомъ предметѣ отсылаемъ къ слѣдующимъ: LIMITE, INFINIMENT PETIT.

§ 3. Пусть будетъ $y = f(x)$ функція переменной x , непрерывная между двумя данными предѣлами; СМОТ. CONTINUE (FONCTION). Въ такомъ предположеніи, безконечно малому приращенію количества x будетъ соответствовать и безконечно малое приращеніе называемой y . И такъ, изобразивъ чрезъ $\Delta x = i$ приращеніе переменной x , а чрезъ Δy соответствующее приращеніе функціи y , получимъ $y + \Delta y = f(x + i)$, или

$$(9) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}.$$

Если примемъ количество i безконечно малымъ, то числитель и знаменатель выраженія (9), называемого *отношеніемъ разностей*, будутъ также количества безконечно малыя. Но, по мѣрѣ уменьшенія двухъ членовъ этого отношенія, оно будетъ стремиться къ некоторому извѣстному предѣлу, зависящему отъ вида функціи f и отъ численнаго значенія, приписываемого пере-

менной x *). Чтобы означить эту зависимость предѣла отъ первообразной функціи f , называютъ его *производною функціою*, и изображаютъ знаменоложеніями

$$y' \text{ и } f'(x);$$

и такъ, положивъ какъ и выше $y = f(x)$, будемъ

$$(10) \quad y' = f'(x) = \text{пред.} \left\{ \frac{f(x+i) - f(x)}{i} \right\}.$$

Такъ какъ отъ производныхъ функцій можно непосредственно перейти къ дифференціаламъ, что будетъ показано ниже, то и займемся опредѣленіемъ производныхъ для простыхъ функцій (fonctions simples), то есть для такихъ, которыя получаются посредствомъ одного дѣйствія надъ переменною величиною. Простыя функція, обыкновенно разсматриваемыя въ Анализѣ, суть слѣдующія:

$$a + x, a - x, ax, \frac{a}{x}, x^p, x^A, \text{Log } x,$$

$$\sin x, \arcsin x,$$

гдѣ a , p и A означаютъ постоянныя величины; къ этимъ функціямъ можно присовокупить еще и тригонометрическія количества $\cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x, \sin \text{vers } x, \cos \text{vers } x, \arccos x, \arctan x, \text{arccot } x, \text{arcsec } x, \text{arccosec } x, \arcsin \text{vers } x, \arccos \text{vers } x$, когда каждое изъ нихъ будемъ разсматривать независимо отъ его выраженія въ $\sin x$ или $\arcsin x$.

И такъ, на основаніи формулы (10), получимъ

$$\text{Для } y = a + x, \quad y' = \text{пред.} \left\{ \frac{(a+x+i) - (a+x)}{i} \right\} = 1$$

$$\text{Для } y = a - x, \quad y' = \text{пред.} \left\{ \frac{(a-x-i) - (a-x)}{i} \right\} = -1$$

$$\text{Для } y = ax, \quad y' = \text{пред.} \left\{ \frac{a(x+i) - ax}{i} \right\} = a$$

$$\begin{aligned} \text{Для } y = \frac{a}{x}, \quad y' &= \text{пред.} \left\{ \frac{\frac{a}{x+i} - \frac{a}{x}}{i} \right\} \\ &= \text{пред.} \left\{ -\frac{a}{x(x+i)} \right\} = -\frac{a}{x^2}. \end{aligned}$$

*) Г. Ламберъ доказалъ это предположеніе въ XIII тетради Журнала Политехническаго Училища. Впрочемъ, если замѣтимъ, что $\text{пред.} \left\{ \frac{f(x+i) - f(x)}{i} \right\}$ изображаетъ тригонометрическій тангенсъ угла, составленнаго касательною къ кривой съ осью x -ою, то непосредственно заключаемъ о справедливости этого предположенія.

Если положим $\frac{i}{x} = \varepsilon$, то в силу формулы (6) параграфа 2, и для какого ни есть показателя p , найдемся при $y = x^p$

$$y' = \text{пред.} \left\{ \frac{(x+i)^p - x^p}{i} \right\} = \text{пред.} \left\{ x^{p-1} \frac{(1+\frac{i}{x})^p - 1}{\frac{i}{x}} \right\} \\ = x^{p-1} \cdot \text{пред.} \left\{ \frac{(1+\varepsilon)^p - 1}{\varepsilon} \right\} = p x^{p-1}.$$

Найдем теперь производную выражения $y = A^x$.

По формуле (10) получим

$$y' = \text{пред.} \left\{ \frac{A^{x+i} - A^x}{i} \right\} = A^x \cdot \text{пред.} \left\{ \frac{A^i - 1}{i} \right\}.$$

Чтобы найти предел отношения $\frac{A^i - 1}{i}$, пусть $A^i - 1 = \varepsilon$; очевидно, что ε будет стремиться к нулю в одно время с i . Определяя величину i из предыдущего выражения, получим

$$i = \frac{\text{Log}(1+\varepsilon)}{\text{Log } A},$$

разумя под Log логарифм, взятый по какой угодно системе. И так

$$\frac{A^i - 1}{i} = \frac{\varepsilon}{i} = \frac{\varepsilon \text{Log } A}{\text{Log}(1+\varepsilon)} = \frac{\text{Log } A}{\frac{1}{\varepsilon} \text{Log}(1+\varepsilon)} \\ = \frac{\text{Log } A}{\text{Log}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}}.$$

Следовательно, в силу формулы (7) получим

$$\text{пред.} \left\{ \frac{A^i - 1}{i} \right\} = \frac{\text{Log } A}{\text{Log } e},$$

почему и найдемся

$$y' = (A^x)' = \frac{\text{Log } A}{\text{Log } e} \cdot A^x.$$

Если положим, что в этой последней формуле употреблены *Неперовы* логарифмы, то по причине $\text{Log } e = 1$, будеть

$$(A^x)' = \text{Log } A \cdot A^x.$$

Принимая $A = e$, получим

$$(e^x)' = e^x.$$

Для $y = \text{Log } x$, найдемъ

$$y' = (\text{Log } x)' = \text{пред.} \left\{ \frac{\text{Log}(x+i) - \text{Log } x}{i} \right\} \\ = \text{пред.} \left\{ \frac{\text{Log}(1+\frac{i}{x})}{\frac{i}{x}} \right\} = \frac{1}{x} \cdot \text{пред.} \left\{ \frac{\text{Log}(1+\varepsilon)}{\varepsilon} \right\};$$

положив $\frac{i}{x} = \varepsilon$, получимъ

$$(\text{Log } x)' = \frac{1}{x} \cdot \text{пред.} \left\{ \frac{\text{Log}(1+\varepsilon)}{\varepsilon} \right\} = \frac{1}{x} \cdot \text{пред.} \left\{ \text{Log}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} \right\},$$

и наконецъ, в силу формулы (7),

$$(\text{Log } x)' = \frac{\text{Log } e}{x}.$$

Постоянная величина $\text{Log } e$ называется, какъ известно, *модулемъ* логарифмической системы, означенной чрезъ Log . Когда разсматривается логарифмъ по *Неперовой* системѣ, то по причинѣ $\text{Log } e = 1$, найдемъ

$$(\text{log } x)' = \frac{1}{x}.$$

Въ слѣдствіе формулы (8) и равнозначущей съ ней $\text{пред.} \left\{ \frac{\text{tang } i}{i} \right\} = 1$, получимъ

$$(\text{Sin } x)' = \text{пред.} \left\{ \frac{\text{Sin}(x+i) - \text{Sin } x}{i} \right\} \\ = \text{пред.} \left\{ \frac{\text{Sin } \frac{1}{2} i}{\frac{1}{2} i} \cdot \text{Cos}(x + \frac{1}{2} i) \right\} = \text{Cos } x;$$

$$(\text{Cos } x)' = \text{пред.} \left\{ \frac{\text{Cos}(x+i) - \text{Cos } x}{i} \right\} \\ = \text{пред.} \left\{ -\frac{\text{Sin } \frac{1}{2} i}{\frac{1}{2} i} \cdot \text{Sin}(x + \frac{1}{2} i) \right\} = -\text{Sin } x;$$

$$(\text{Tang } x)' = \text{пред.} \left\{ \frac{\text{tang}(x+i) - \text{tang } x}{i} \right\} \\ = \text{пред.} \left\{ \frac{\text{tang } i}{i} (1 + \text{tang } x \cdot \text{tang}(x+i)) \right\} \\ = 1 + \text{tang}^2 x = \frac{1}{\text{Cos}^2 x};$$

$$(\text{Cotang } x)' = \text{пред.} \left\{ \frac{\text{Cotang}(x+i) - \text{Cotang } x}{i} \right\} \\ = \text{пред.} \left\{ -\frac{\text{tang } i}{i} (1 + \text{Cotang } x \cdot \text{Cotang}(x+i)) \right\} \\ = -(1 + \text{Cotang}^2 x) = -\frac{1}{\text{Sin}^2 x};$$

Опредѣлимъ теперь производную одной изъ круговыхъ функций, наприхр $\arctang x$. Найдемъ

$$(\arctang x)' = \text{пред.} \left\{ \frac{\arctang(x+i) - \arctang x}{i} \right\};$$

если изобразимъ разность $\arctang(x+i) - \arctang x$ чрезъ ε , и замѣшивъ что $\text{tang } \varepsilon = \frac{i}{1+\varepsilon(x+i)}$, то получимъ

$$(\arctang x)' = \text{пред.} \left\{ \frac{\varepsilon}{i} \right\} = \text{пред.} \left\{ \frac{\varepsilon}{\text{tang } \varepsilon} \cdot \frac{1}{1+\varepsilon(x+i)} \right\}.$$

Но $\text{пред.} \left\{ \frac{\text{tang } \varepsilon}{\varepsilon} \right\} = 1$, а следовательно и $\text{пред.} \left\{ \frac{\varepsilon}{\text{tang } \varepsilon} \right\}$ равенъ единицѣ, почему и найдемся окончательно

$$(\arctang x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Подобным образом можно найти производные для других из приведенных выше тригонометрических и круговых функций; мы не будем останавливаться на этом разыскании, а присупим к изложению некоторых правил, облегчающих это определение.

§ 4. Положим, что имеем два уравнения

$$z = \varphi(y) \quad \text{и} \quad y = f(x);$$

так как из них следует, что $z = \varphi(f(x))$, то z и называется *функцией от функции* (*fonction de fonction*) переменной x . Пусть будет Δx приращение независимой переменной x , а Δy и Δz соответствующие приращения количеств y и z . Принимая z за функцию x , получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)}{\Delta y} = \frac{\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x};$$

или

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

следовательно

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\varphi'(y + \Delta y) - \varphi'(y)}{\Delta y} \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

и, переходя к пределу,

$$(11) \quad z' = [\varphi(f(x))]' = \varphi'(y) \cdot y' = \varphi'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Например, полагая

$$z = \frac{1}{x} \quad \text{и} \quad y = \cos x \quad \text{или} \quad z = \frac{1}{\cos x} = \sec x,$$

получим

$$z' = (\sec x)' = -\frac{1}{x^2} (-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

Подобным образом найдем:

$$\text{Для } z = \frac{1}{y} \text{ а } y = \sin x \text{ или } z = \operatorname{cosec} x,$$

$$z' = (\operatorname{cosec} x)' = -\frac{1}{x^2} \cdot \cos x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

$$\text{Для } z = \sin \operatorname{vers} x = 1 - \cos x,$$

$$z' = (\sin \operatorname{vers} x)' = \sin x.$$

$$\text{Для } z = \cos \operatorname{vers} x = 1 - \sin x,$$

$$z' = (\cos \operatorname{vers} x)' = -\cos x.$$

Если в формулу (11) положим $z = x$, то получим уравнение

$$(12) \quad 1 = \varphi'(y) \cdot y' \quad \text{или} \quad y' = \frac{1}{\varphi'(y)},$$

в силу которого по данной производной одной из функций $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$, определяем другую производную. И так, имея два уравнения $y = \arcsin x$ и $x = \sin y$, находим

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'}$$

но $(\sin y)' = \cos y = \sqrt{1 - x^2}$, почему

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Действуя точно таким образом, найдем производные:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\operatorname{arccot} \operatorname{ang} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(\operatorname{arccosec} x)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(\operatorname{arcsinvers} x)' = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$$

$$(\operatorname{arccosvers} x)' = -\frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

§ 5. В § 1 мы видели, что задача о проведении касательной к какой-либо кривой приводится к размышлению членов, заключающих в себя первые степени приращений абсциссы и ординаты сей кривой. Эти члены мы назвали *дифференциалами*. Множество других общих вкоровов приводится к размышлению подобных же членов в разложении какой-либо функции по степеням приращения переменного количества, от которого она зависит. Пусть будет $y = f(x)$ какая-либо функция переменной независимой x , а $\Delta x = h$ произвольное приращение сей последней. Приращение самой функции будет

$$\Delta y = f(x + h) - f(x).$$

Член, заключающий в себя только первую степень приращения h в одной разности, называется *дифференциалом* функции $f(x)$, потому что он изображает не полную разность (*difference*), а только известную часть ея.

Чтобы выразить аналитически, что мы удерживаем только первую степень приращения h в разности $f(x + h) - f(x)$, надобно изъять h в h , разумея под ε бесконечно малое количество, и разделив на ε разность $f(x + h) - f(x)$, взять предел сего отношения. Этим пределом изобразить искомый дифференциал. И так, дифференциал y или $f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x + \varepsilon h) - f(x)}{\varepsilon} \right\}$.

Действительно, член, заключающий в себя первую степень h , по разделив на ε , останется,

а члены, сопровождаемые высшими степенями $\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \varepsilon^{\frac{3}{2}}$ и проч. по раздѣленіи на ε , доставляютъ $\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \varepsilon^{\frac{3}{2}}$ и проч. и уничтожаются при переходѣ къ предѣлу, то есть при $\varepsilon = 0$.

Сообразуясь съ знаменитымъ Лейбница, условившись изображать дифференціалъ какова нѣсть количества буквою d , поставленную передъ зпимъ количествомъ. И такъ

$$(13) \quad dy = df(x) = \text{пред.} \left\{ \frac{f(x+\varepsilon h) - f(x)}{\varepsilon} \right\}.$$

Если положимъ $h=1$, то i будетъ безконечно малымъ количествомъ, и вполнѣ часъ уравн. (13) приметъ видъ

$$\text{пред.} \left\{ \frac{f(x+i) - f(x)}{i} \right\} \cdot h \quad \text{или} \quad \text{пред.} \left\{ \frac{f(x+i) - f(x)}{i} \right\} \cdot h.$$

Но, въ силу формулы (10) [§ 3], послѣднее выраженіе равно $f'(x) \cdot h$; следовательно

$$dy = df(x) = f'(x) \cdot h.$$

И такъ, дифференціалъ какой нѣсть функции $f(x)$ равняется производной $f'(x)$, помноженной на приращеніе h переменной x .

Для $f(x) = x$, будемъ $f'(x) = \text{пред.} \left\{ \frac{x+i-x}{i} \right\} = 1$,

откуда $df(x) = dx = h$. Следовательно, дифференціалъ переменной независимой x равенъ постоянному количеству h , которое можетъ быть чѣмъ угодно. И такъ, уравненіе $dy = f'(x) \cdot h$ можно замѣнить однимъ изъ слѣдующихъ:

$$(14) \quad df(x) = f'(x)dx \quad \text{или} \quad dy = y'dx.$$

Изъ равенства $dy = y'dx$ выводимъ $\frac{dy}{dx} = y'$; следовательно, производная $y' = f'(x)$ равняется отношенію дифференціала функции къ дифференціалу переменной количества. Величину $\frac{dy}{dx}$, или, что всё равно, производную функцию, называютъ также дифференціальными коэффициентами или дифференціальнымъ отношеніемъ (coefficient différentiel).

По найденнымъ производнымъ въ §§ 3 и 4, и на основаніи уравн. (14), найдемъ непосредственно слѣдующіе дифференціалы простыхъ функций:

$$\begin{aligned} d(a+x) &= dx, \quad d(a-x) = -dx, \quad d(ax) = adx, \\ d\left(\frac{a}{x}\right) &= -\frac{adx}{x^2}, \quad d(x^n) = nx^{n-1}dx, \quad d(A^x) = \log A \cdot A^x dx, \\ d(e^x) &= e^x dx, \quad d(\log x) = \frac{\log e \cdot dx}{x}, \quad d(\log x) = \frac{dx}{x}, \end{aligned}$$

$$d \sin x = \cos x \cdot dx, \quad d \cos x = -\sin x \cdot dx,$$

$$d \tan x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad d \cotang x = -\frac{dx}{\sin^2 x},$$

$$d \sec x = \frac{\sin x \cdot dx}{\cos^2 x}, \quad d \csc x = -\frac{\cos x \cdot dx}{\sin^2 x},$$

$$d \sin^{-1} x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d \cos^{-1} x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d \arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$d \arctan x = \frac{dx}{1+x^2}, \quad d \operatorname{arccotang} x = -\frac{dx}{1+x^2},$$

$$d \operatorname{arcsec} x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad d \operatorname{arccsc} x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},$$

$$d \operatorname{arcsinvers} x = \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}, \quad d \operatorname{arccosvers} x = -\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

Во всехъ зпимъ формулахъ, въ силу уравн. (11), мы можемъ замѣнить переменную x какою нѣсть функциею этой самой переменной. Такъ напримѣръ

$$d(f(x) \pm a) = f'(x)dx, \quad d(af(x)) = ad \cdot f(x) = af'(x)dx;$$

первое изъ сихъ уравненій показываетъ, что присовокупленіе неопредѣленного количества a , положительнаго или отрицательнаго, къ какой нѣсть функции $f(x)$, не измѣняетъ ея дифференціала. Второе показываетъ, что при дифференцированіи постоянный множитель, сопровождающій данную функцию, можетъ быть выведенъ изъ похъ знака d . Волъ еще нѣкоторые примѣры:

$$d(\sqrt{f(x)}) = d[f(x)]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}[f(x)]^{-\frac{1}{2}} d \cdot f(x) = \frac{df(x)}{2\sqrt{f(x)}},$$

$$d(A^{x^n}) = \log A \cdot A^{x^n} d(x^n) = n \log A \cdot A^{x^n} x^{n-1} dx,$$

$$d(e^{x^n}) = e^{x^n} d(x^n) = x^n e^{x^n} dx,$$

$$d \cdot \log(a+x^n) = \frac{\log e}{a+x^n} d(a+x^n) = \frac{n \log e \cdot x^{n-1} dx}{a+x^n},$$

$$d \cdot \tan(A^x) = \frac{d(A^x)}{\cos^2(A^x)} = \frac{\log A \cdot A^x dx}{\cos^2(A^x)},$$

$$d \cdot \arcsin \sqrt{x} = \frac{d \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{d(x^{\frac{1}{2}})}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\frac{1}{2} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

§ 6. Перейдемъ теперь къ дифференцированію сложныхъ функций, то есть такихъ, которыя сами соотавлены какія нѣсть образомъ изъ простыхъ функций. Если изобразимъ чрезъ u, v, w, \dots какія угодно простые функции переменной независимой x , то $s = f(u, v, w, \dots)$ изобразимъ самую общую данную функцию коли-

числа x . Займемся определением ее дифференциала.

Чтобы получить $df(u, v, w, \dots)$, надобно в каждую из пропущенных функций u, v, w, \dots подставить $x + \epsilon h$ на место x , из вывода подстановления вычлест первообразную функцию, и, раздѣлив разность на ϵ , положить $\epsilon = 0$. Пусть будемъ напримѣръ $u = F(x)$; отъ подстановленія $x + \epsilon h$ на мѣсто x , функция u получитъ приращеніе Δu , разумѣя подъ Δu количество, обращающееся въ Δu при переходѣ къ предѣлу, то есть, при положеніи $\epsilon = 0$. Действительно, пока не приписываемъ количеству ϵ частной величины нуль, отношеніе

$$\frac{F(x+\epsilon h) - F(x)}{\epsilon}$$

будетъ отлично отъ $dF(x) = du$, а обратится въ du для $\epsilon = 0$; изобразивъ предыдущую дробь чрезъ Δu , найдемъ

$$\frac{F(x+\epsilon h) - F(x)}{\epsilon} = \Delta u,$$

откуда, по принявъ $F(x) = u$,
 $u + \epsilon du = F(x + \epsilon h)$.

Точно также докажемъ, что подстановленіе $x + \epsilon h$ на мѣсто x въ функции v, w, \dots образуетъ ихъ въ $v + \epsilon dv, w + \epsilon dw, \dots$. И такъ, въ слѣдствіе сказаннаго выше, получимъ

$$ds = d.f(u, v, w, \dots) =$$

$$\text{пред.} \left\{ \frac{f(u+\epsilon du, v+\epsilon dv, w+\epsilon dw, \dots) - f(u, v, w, \dots)}{\epsilon} \right\}.$$

Замѣтимъ теперь, что числитель этого отношенія можетъ быть написанъ въ видѣ:

$$\begin{aligned} & f(u+\epsilon du, v+\epsilon dv, w+\epsilon dw, \dots) - f(u, v+\epsilon dv, w+\epsilon dw, \dots) \\ & + f(u, v+\epsilon dv, w+\epsilon dw, \dots) - f(u, v, w+\epsilon dw, \dots) \\ & + f(u, v, w+\epsilon dw, \dots) - f(u, v, w, \dots), \end{aligned}$$

и какъ сверхъ того, предѣлъ отъ суммы равняется суммѣ предѣловъ, то получимъ

$$(15) \quad ds = d.f(u, v, w, \dots) =$$

$$\begin{aligned} & \text{пред.} \left\{ \frac{f(u+\epsilon du, v+\epsilon dv, w+\epsilon dw, \dots) - f(u, v+\epsilon dv, w+\epsilon dw, \dots)}{\epsilon} \right\} \\ & + \text{пред.} \left\{ \frac{f(u, v+\epsilon dv, w+\epsilon dw, \dots) - f(u, v, w+\epsilon dw, \dots)}{\epsilon} \right\} \\ & + \text{пред.} \left\{ \frac{f(u, v, w+\epsilon dw, \dots) - f(u, v, w, \dots)}{\epsilon} \right\} + \dots \end{aligned}$$

Очевидно, что въ силу уравненія (15), выраженіе

$$\text{пред.} \left\{ \frac{f(u+\epsilon du, v+\epsilon dv, w+\epsilon dw, \dots) - f(u, v+\epsilon dv, w+\epsilon dw, \dots)}{\epsilon} \right\}$$

изобразитъ дифференціалъ функции $f(u, v, w, \dots)$,

принимая въ ней только величину u за переменную, ибо остальные количества, какъ то $v + \epsilon dv, w + \epsilon dw, \dots$, обращающіеся въ v, w, \dots для $\epsilon = 0$, не измѣняются при переходѣ отъ первообразной функции $f(u, v + \epsilon dv, w + \epsilon dw, \dots)$ къ измѣненной $f(u + \epsilon du, v + \epsilon dv, w + \epsilon dw, \dots)$. Отсюда дифференціалъ, который называютъ *частнымъ* (*différentielle partielle*), можетъ быть изображенъ знаменителемъ $d_u s$; слѣдовательно производная функция $f(u, v, w, \dots)$ по измѣняемости количества u , называемая *частною производною* (*dérivée partielle*), представляется въ видѣ $\frac{d_u s}{du}$. Для сокращенія, въ производной не ставляя буквъ подъ знакомъ d ; и такъ, вмѣсто $\frac{d_u s}{du}$, пишемъ просто $\frac{ds}{du}$. Въ такомъ случаѣ

знаменатель du этой дроби, сверхъ обыкновеннаго своего значенія, имѣетъ еще другое, ибо онъ указываетъ на переменную, относительно которой берется производная. Поэтому, выраженіе $\frac{ds}{du} du$ не можетъ быть сокращено. И такъ, первый членъ второй части формулы (15) изобразится чрезъ $d_u s$ или: $\frac{ds}{du} du$. Сказанное

здесь о первомъ членѣ можно повторить и въ отношеніи второго, третьего..... члена той же формулы (15); второй ее членъ изобразитъ частный дифференціалъ функции $s = f(u, v, w, \dots)$ по измѣяемости количества v , третій, по измѣяемости w , и проч. Слѣдовательно получимъ формулу

$$(16) \quad ds = d.f(u, v, w, \dots) = d_u s + d_v s + d_w s + \dots$$

или, что все равно,

$$(17) \quad ds = d.f(u, v, w, \dots) = \frac{ds}{du} du + \frac{ds}{dv} dv + \frac{ds}{dw} dw + \dots$$

Формула (16) или (17) выражаетъ самое общее правило для дифференцированія сложныхъ функций. Въ слѣдствіе этого правила, полный дифференціалъ сложной функции равняется суммѣ частныхъ ее дифференціаловъ, то есть, дифференціаловъ, взятыхъ послѣдовательно въ разсужденіи каждой изъ простыхъ функций, входящихъ въ составъ предложенной.

Если раздѣлимъ уравн. (17) на dx , то получимъ производную сложной функции $f(u, v, w, \dots)$; она будетъ

$$s' = \frac{ds}{dx} = \frac{ds}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{ds}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{ds}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} + \dots \\ = \frac{ds}{du} u' + \frac{ds}{dv} v' + \frac{ds}{dw} w' + \dots$$

Принимая последовательно $f(u, v, w, \dots)$ равною $u+v+w$, $u-v$, uv и проч., получаем:

$$d(u+v+w) = du + dv + dw, \quad d(u-v) = du - dv,$$

$$d(uv) = vdu + u dv = uv \left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} \right),$$

$$d(uvw \dots) = uvw \dots \left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \dots \right),$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = d(u \cdot v^{-1}) = v^{-1} \cdot du - uv^{-2} dv = \frac{vdu - u dv}{v^2},$$

$$d(u^v) = vu^{v-1} du + \log u \cdot u^v dv = u^v \left(\frac{du}{u} + \log u \cdot dv \right),$$

$$d(u^v w) = u^v w \left[\frac{du}{u} + \frac{v}{v} \log u \cdot dv + \log u \cdot \log v \cdot dw \right],$$

и проч. и проч.

Из сих формул выводимъ правила, которыми должно руководствоваться при дифференцировании сложных функций: наипоспешнейшими изъ нихъ сунъ следующие:

1°. Дифференциалъ суммы или разности сколькихъ угодно функций равенъ суммѣ или разности дифференциаловъ сихъ самихъ функций.

2°. Дифференциалъ произведенія двухъ функций равенъ второму множителю, помноженному на дифференциалъ перваго, плюсъ первый множитель, помноженный на дифференциалъ втораго.

3°. Дифференциалъ дроби равенъ знаменателю, помноженному на дифференциалъ числителя, безъ числителя, умноженного на дифференциалъ знаменателя, и все раздѣленное на квадратъ знаменателя.

Предлагаемъ нѣсколько примѣровъ для упражненія.

$$d(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots + gx + h) = \\ = (max^{m-1} + (m-1)bx^{m-2} + (m-2)cx^{m-3} + \dots + g) dx,$$

$$d(\sin^2 x - \tan^2 x) = 2 \sin x \cos x \cdot dx - \frac{2 \tan^2 x}{\cos^2 x} \cdot dx,$$

$$d(x^p e^{-x}) = x^p e^{-x} \left(\frac{p}{x} - 1 \right) dx,$$

$$d\left(\frac{A^x}{x}\right) = \frac{A^x}{x} \left(\log A - \frac{1}{x} \right) dx,$$

$$d(x^x) = x^x (1 + \log x) dx, \quad d\left(x^{\frac{1}{x}}\right) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \log x}{x^2} \cdot dx.$$

Определение, предложенное для дифференциаловъ вещественныхъ функций, распространяемъ и на дифференциалы мнимыхъ. И такъ, имѣя мнимое выраженіе

$$u + v\sqrt{-1},$$

въ которомъ u и v означаютъ вещественныя функции переменной независимой x , найдемъ

$$d(u + v\sqrt{-1}) = du + dv\sqrt{-1},$$

и следовательно, раздѣля на dx ,

$$(u + v\sqrt{-1})' = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \sqrt{-1} = u' + v' \sqrt{-1}.$$

Напримѣръ, если бы имѣли

$$s = \cos x + \sin x \cdot \sqrt{-1},$$

то нашли бы

$$ds = -\sin x \cdot dx + \cos x \cdot \sqrt{-1} \cdot dx = \\ = (\cos x + \sin x \cdot \sqrt{-1}) dx \sqrt{-1}$$

$$s' = -\sin x + \cos x \cdot \sqrt{-1} = (\cos x + \sin x \cdot \sqrt{-1}) \sqrt{-1} \\ = s \sqrt{-1}.$$

§ 7. Переходимъ теперь къ дифференцированию функций съ нѣсколькими переменными независимыми. Пустьъ будемъ $u = f(x, y, z, \dots)$ такого рода функция. Если изобразимъ чрезъ Δx , Δy , $\Delta z, \dots$ произвольныя приращенія измѣняемыхъ x, y, z, \dots а чрезъ du соотвѣтственное приращеніе зависимой переменной u , то получимъ

$$du = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots) - f(x, y, z, \dots).$$

Положимъ теперь $\Delta x = \varepsilon h$, $\Delta y = \varepsilon k$, $\Delta z = \varepsilon l, \dots$; послѣднее уравненіе по раздѣленію на ε приметъ видъ

$$(18) \quad \frac{du}{\varepsilon} = \frac{f(x + \varepsilon h, y + \varepsilon k, z + \varepsilon l, \dots) - f(x, y, z, \dots)}{\varepsilon}.$$

Если предположимъ теперь, что количество ε стремится къ нулю, то вторая часть формулы (18) будетъ приближаться къ нѣкоторому предѣлу, зависящему отъ $x, y, z, \dots, h, k, l, \dots$. Этотъ предѣлъ, соотвѣтствующій предположенію $\varepsilon = 0$, называется *полнымъ дифференциаломъ* или просто *дифференциаломъ* функции $f(x, y, z, \dots)$, который означаютъ законоположеніемъ du или $d \cdot f(x, y, z, \dots)$. Сдѣланное нами опредѣленіе дифференциала функции съ нѣсколькими переменными, совершенно согласуется съ опредѣленіемъ дифференциала функции объ одной измѣняемой (См. § 5 ур. (13)). И такъ, на этомъ основаніи, получимъ

$$(19) \quad du = \text{пред} \left\{ \frac{du}{\varepsilon} \right\}.$$

Дожидаясь последовательно $u = x$, $u = y$, $u = z, \dots$ найдемъ по формулѣ (19)

$$dx = n \text{ пред. } \left\{ \frac{\epsilon^h}{\epsilon} \right\} = h, dy = k, dz = l, \text{ и проч.,}$$

откуда заключаем, что дифференциалы dx, dy, dz, \dots переменных независимых x, y, z, \dots соответственно равны постоянным величинам h, k, l, \dots

На основании этих суждений, посредством которых вывели формулу (15) в § 6 параграфа, получим в настоящем случае

$$\begin{aligned} df(x, y, z, \dots) = & \\ \text{пред. } \left\{ \frac{f(x+\epsilon h, y+\epsilon k, z+\epsilon l, \dots) - f(x, y, z, \dots)}{\epsilon} \right\} & \\ + \text{пред. } \left\{ \frac{f(x, y+\epsilon k, z+\epsilon l, \dots) - f(x, y, z, \dots)}{\epsilon} \right\} & \\ + \text{пред. } \left\{ \frac{f(x, y, z+\epsilon l, \dots) - f(x, y, z, \dots)}{\epsilon} \right\} + \dots & \end{aligned}$$

Первый член второй части этой формулы называется *частным дифференциалом* функции и по измѣлимости переменной x , второй — по измѣлимости y , третий — по измѣлимости z , и такъ даѣе. Эти дифференциалы обозначаются чрезъ $d_x u, d_y u, d_z u, \dots$. И такъ, предыдущая формула представлять

$$du = df(x, y, z, \dots) = d_x u + d_y u + d_z u + \dots$$

Частные производныя функции u въ разсужденіи x, y, z, \dots означаются соответственно чрезъ $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \dots$, въ слѣдствіе чего du можешь также быть представляемъ въ видѣ

$$du = \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{du}{dz} l + \dots = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \dots$$

Здѣсь, какъ уже объяснено въ § 6, выраженія $\frac{du}{dx} dx, \frac{du}{dy} dy, \dots$ не сокращаются, потому что знаменатели dx, dy, \dots сверхъ обыкновеннаго своего значенія, служатъ для указанія на переменную, въ отношеніи которой берется производная.

Мы не будемъ приводить примѣровъ дифференцированія функций со многими переменными независимыми. Изъ сказаннаго въ этомъ параграфѣ легко усмотрѣть, что всѣ правила и формулы, доказанныя въ § 6 для какихъ ни есть функций u, v, w, \dots одной переменной независимой x , равно относятся и къ функциямъ объ нѣсколькихъ переменныхъ независимыхъ x, y, z, \dots . Стоитъ только въ примѣрахъ, приведенныхъ въ § 6, замѣнить величины u, v, w, \dots соответственно количествами x, y, z, \dots

Сдѣлаемъ одно замѣчаніе, на основаніи котораго можно будетъ приводить дифференцированіе функций съ нѣсколькими переменными къ дифференцированію функций объ одной измѣняемой. Действительно, разсматривая выраженіе

$$f(x+\epsilon h, y+\epsilon k, z+\epsilon l, \dots)$$

какъ функцию одного количества ϵ , принимаемого за переменное, получимъ

$$f(x+\epsilon h, y+\epsilon k, z+\epsilon l, \dots) = F(\epsilon),$$

откуда по причинѣ $u = f(x, y, z, \dots) = F(0)$,

$$\frac{du}{d\epsilon} = \frac{F(\epsilon) - F(0)}{\epsilon},$$

и наконецъ, на основаніи формулы (19),

$$du = \text{пред. } \left\{ \frac{F(\epsilon) - F(0)}{\epsilon} \right\} = F'(\epsilon).$$

И такъ, полный дифференціалъ функции $u = f(x, y, z, \dots)$ будетъ равняться производной выраженія $f(x+\epsilon h, y+\epsilon k, z+\epsilon l, \dots)$ относительно ϵ для частной величины $\epsilon = 0$. Вотъ примѣръ:

$$\begin{aligned} d(xyz) &= [(x+\epsilon h)(y+\epsilon k)(z+\epsilon l)]' \text{ для } \epsilon = 0; \text{ но} \\ & (x+\epsilon h)(y+\epsilon k)(z+\epsilon l) = \\ & xyz + (yzh + xzk + xyl)\epsilon + (xkl + yhl + zhk)\epsilon^2 + \epsilon^3. \end{aligned}$$

Производная этого выраженія по измѣлимости ϵ будетъ

$$\begin{aligned} yzh + xzk + xyl + 2(xkl + yhl + zhk)\epsilon + 3\epsilon^2; \\ \text{полагая } \epsilon = 0, \text{ останется только } yzh + xzk + xyl, \\ \text{слѣдовательно} \end{aligned}$$

$$d(xyz) = yzh + xzk + xyl = yzdx + xzdy + xydz.$$

§ 8. Теперь разсмотримъ общій случай дифференцированія явной функции. Пустьъ будетъ

$$s = f(u, v, w, \dots)$$

функция сколькихъ угодно количествъ u, v, w, \dots , которыми сами изображаются произвольныя функции независимыхъ переменныхъ x, y, z, \dots . И такъ, вообще $u = \varphi(x, y, z, \dots)$, $v = \chi(x, y, z, \dots)$, $w = \psi(x, y, z, \dots)$ и проч. Если положимъ теперь, что переменныя x, y, z, \dots получили приращенія dx, dy, dz, \dots , то количества u, v, w, \dots , получаясь соответственныя приращенія du, dv, dw, \dots , а функция s обратившись въ $s + ds$. И такъ

$$ds = f(u+du, v+dv, w+dw, \dots) - f(u, v, w, \dots).$$

Положимъ какъ выше

$$dx = \epsilon h, dy = \epsilon k, dz = \epsilon l, \dots;$$

приращенія функций u, v, w, \dots будутъ вида

$$du = \epsilon p, dv = \epsilon q, dw = \epsilon r, \dots,$$

откуда заключаемъ

$$p = \text{пред. } \left\{ \frac{du}{\epsilon} \right\} = du, q = dv, r = dw, \dots$$

Следовательно $\frac{ds}{\varepsilon}$ представится в виде

$$\frac{ds}{\varepsilon} = \frac{f(u+\varepsilon p, v+\varepsilon q, w+\varepsilon r, \dots) - f(u, v, w, \dots)}{\varepsilon}.$$

Если перейдем к пределу этого выражения положив $\varepsilon=0$, то, на основании сказанного в § 6, найдем

$$ds = d_u s + d_v s + d_w s + \dots = \frac{ds}{du} p + \frac{ds}{dv} q + \frac{ds}{dw} r + \dots,$$

или

$$ds = \frac{ds}{du} du + \frac{ds}{dv} dv + \frac{ds}{dw} dw + \dots$$

Но, по предположению, u, v, w, \dots суть некоторые функции переменных, x, y, z, \dots ; следовательно

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \dots$$

$$dv = \frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy + \frac{dv}{dz} dz + \dots$$

$$dw = \frac{dw}{dx} dx + \frac{dw}{dy} dy + \frac{dw}{dz} dz + \dots$$

.....

Подставляя эти величины в предыдущее уравнение, найдем окончательно

$$(20) \quad ds = \left(\frac{ds}{du} \frac{du}{dx} + \frac{ds}{dv} \frac{dv}{dx} + \frac{ds}{dw} \frac{dw}{dx} + \dots \right) dx + \left(\frac{ds}{du} \frac{du}{dy} + \frac{ds}{dv} \frac{dv}{dy} + \frac{ds}{dw} \frac{dw}{dy} + \dots \right) dy + \left(\frac{ds}{du} \frac{du}{dz} + \frac{ds}{dv} \frac{dv}{dz} + \frac{ds}{dw} \frac{dw}{dz} + \dots \right) dz + \dots$$

Пусть будет например $s = \frac{u^v}{w}$, $u = x + y^2$,

$v = xz$, $w = x + y - z$; найдем:

$$\frac{ds}{du} = \frac{uv^{u-1}}{w}, \quad \frac{ds}{dv} = \frac{\log u \cdot u^v}{w}, \quad \frac{ds}{dw} = -\frac{u^v}{w^2},$$

$$\frac{du}{dx} = 1, \quad \frac{du}{dy} = 2y, \quad \frac{du}{dz} = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} = z, \quad \frac{dv}{dy} = 0, \quad \frac{dv}{dz} = x,$$

$$\frac{dw}{dx} = 1, \quad \frac{dw}{dy} = 1, \quad \frac{dw}{dz} = -1,$$

я следовательно, в силу уравнения (20),

$$ds = \frac{u^v}{w} \left(\frac{v}{u} + z \log u - \frac{1}{w} \right) dx + \left(\frac{2vy}{u} - \frac{1}{w} \right) dy + \left(x \log u + \frac{1}{w} \right) dz.$$

§ 9. Представим, как и в предыдущем параграфе, через s функцию количеств u, v, w, \dots , которые сами зависят от переменных x, y, z, \dots . Если, для всех возможных значений сих

последних, другая функция r будет равна функции s , то ясно, что из уравнения $s=r$, выведет

$$(21) \quad ds = dr$$

Положив в частности $r = \text{постоянной величины или нулю}$, найдем $dr=0$, и следовательно

$$(22) \quad ds = 0.$$

Уравнения (21) и (22) представляют простейшие случаи так называемых *дифференциальных уравнений*.

Если бы, например, имели

$$x^2 + y^2 = x^2 y$$

для всех возможных значений переменных x и y , то, в силу формулы (21), в которой следовало бы положить $u=x$, $v=y$, получили бы

$$3x^2 dx + 3y^2 dy = y dx + x dy, \text{ или } (3x^2 - y) dx + (3y^2 - x) dy = 0.$$

Вот другие примеры:

Пологая $x^2 + y^2 = a^2$, найдем

$$2x dx + 2y dy = 0, \text{ откуда } dy = -\frac{x}{y} dx;$$

но $y = \sqrt{a^2 - x^2}$; следовательно

$$d(\sqrt{a^2 - x^2}) = -\frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Приняв $x^2 + y^2 - z^2 = a^2 = 0$, получим

$$2x dx + 2y dy - 2z dz = 0, \text{ откуда } dz = \frac{x}{z} dx + \frac{y}{z} dy.$$

Если положим, что в уравн. (22) переменные x, y, z, \dots подчинены зависимости, определяемой уравнением

$$L = \varphi(x, y, z, \dots) = 0$$

$$M = \psi(x, y, z, \dots) = 0$$

.....

то сверх уравнения $ds=0$, получим еще формулы

$$dL = \frac{dL}{dx} dx + \frac{dL}{dy} dy + \frac{dL}{dz} dz + \dots = 0$$

$$dM = \frac{dM}{dx} dx + \frac{dM}{dy} dy + \frac{dM}{dz} dz + \dots = 0$$

, ,

посредством которых можно определить сколько дифференциалов чрез ославные, сколько изоме всех уравнений

$$ds=0, dL=0, dM=0, \dots$$

Положим например

$$s = uv = \text{пост.}, u = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$v = xyz, L = x + y + z = 0;$$

найдется

$$d(uv) = vdu + u dv = 0,$$

или, зная u , v , du , dv , равными им величинам,

$$\begin{aligned} & (5x^2yz + x^3y + y^3z)dx \\ & + (5y^2xz + x^3z + z^3y)dy \\ & + (5z^2xy + y^3x + x^3y)dz = 0. \end{aligned}$$

Сверх того, уравнение $L=0$ доставляет

$$dx + dy + dz = 0;$$

совокупляя это уравнение с предыдущим, получим формулы

$$dz = \frac{(5x^2yz + x^3z + z^3y) - (5y^2xz + x^3x + z^3x)}{(5x^2yz + x^3z + z^3y) - (5z^2xy + y^3x + x^3y)} dx$$

$$dy = \frac{(5x^2yz + x^3z + z^3y) - (5z^2xy + y^3x + x^3y)}{(5x^2yz + x^3z + z^3y) - (5y^2xz + x^3x + z^3x)} dx,$$

определяющие dz и dy через dx .

§ 10. Переходим теперь к производным и дифференциалам высших порядков. Займемся сперва функциями от одной переменной. Пусть будет $y = f(x)$; мы видели в § 5, что выражение

$$y' = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

изображает вообще некоторую функцию переменной x , которая принимает название производной. Назовем $f'(x)$ *первою производною* (fonction première) или *производною первого порядка* (dérivée du premier ordre). Если подвергнем теперь функцию $f'(x)$ тому самому действию, какому подвергла функцию $f(x)$ для получения первой производной, то найдем новую функцию переменной x , которую назовем *второю производною* (fonction seconde) или *производною второго порядка* (dérivée du second ordre). Означив ее через y'' или $f''(x)$, получим

$$y'' = f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

Предложим это действие, получив сколько угодно новых функций, из которых каждая будет производною предыдущей. Эти функции называются *производными различных порядков* (dérivées de divers ordres), и обозначаются вообще следующими образом:

$$y', y'', y''', \dots, y^{(m)}$$

$$\text{или } f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(m)}(x).$$

Вследствие самого определения производных функций различных порядков, получим

$$y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, y^{(m)} = \frac{d^m y}{dx^m},$$

или

$$dy = y' dx, dy' = y'' dx, dy'' = y''' dx, \dots, dy^{(m-1)} = y^{(m)} dx.$$

Дифференцируя первое из этих уравнений несколько раз сразу в предположении dx постоянным, и следовательно $d^2x = d^3x = \dots = 0$, найдем:

$$dy = y' dx, ddy = dx dy' = y'' dx^2,$$

$$ddd y = dx^2 dy'' = y''' dx^3, \text{ и проч.}$$

Дифференциалы $ddy, ddd y, \dots$, которые для простоты изображаются через d^2y, d^3y, \dots , называются *дифференциалами высших порядков* (différentielles des ordres supérieurs); d^2y есть дифференциал второго порядка, d^3y , третьего, и проч.

Из уравнений

$$dy = y' dx, d^2y = y'' dx^2, d^3y = y''' dx^3, \dots$$

$$d^{(m)}y = y^{(m)} dx^m$$

выводим

$$y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, y^{(m)} = \frac{d^m y}{dx^m};$$

эти дроби называются *дифференциальными коэффициентами* (coefficients différentiels) первого, второго, третьего, ..., m -го порядка, потому что вообще $\frac{d^m y}{dx^m}$ или $y^{(m)}$ изображает коэффициент,

на который должно помножить dx^m для получения дифференциала m -го порядка функции y .

Вот несколько примеров последовательных дифференцирований:

$$d^m(x^n) = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)x^{n-m}.dx^m$$

$$d^m(A^x) = (\log A)^m A^x . dx^m$$

$$d^m(\log x) = (-1)^{m-1} \cdot \frac{1.2.3\dots(m-1)}{x^m} dx^m$$

$$d^m \sin x = \sin(x + \frac{1}{2}m\pi) . dx^m$$

$$d^m \cos x = \cos(x + \frac{1}{2}m\pi) . dx^m.$$

Если бы имели уравнение $z = F(y)$, в котором y есть некоторая функция переменной независимой x , то нашли бы

$$(25) \begin{cases} dz = F'(y) dy, & d^2z = F''(y) dy^2 + F'(y) d^2y, \\ d^3z = F'''(y) dy^3 + 3F''(y) dy d^2y + F'(y) d^3y, \text{ и проч.} \end{cases}$$

Примеры:

$$d^3(y^2) = 6dy d^2y + 2y d^3y$$

$$d^2(A^x) = \log A . A^x (\log A . dy^2 + d^2y)$$

$$d^3(\sin y) = -\cos y . dy^3 - 3\sin y . dy . d^2y + \cos y . d^3y.$$

Формулы (25) могут служить для извлечения *переменной независимой*. Отсылаем по сему предмету к статье: CHANGEMENT DE LA VARIABLE INDÉPENDANTE.

§ 11. Легко распространяя сказанное в предыдущем параграфе на функцию с несколькими переменными независимыми. Действительно, пусть будет $u = f(x, y, z, \dots)$; эту функцию можно дифференцировать несколько раз сразу относительно всех или только некоторых из переменных x, y, z, \dots , при чем дифференциалы dx, dy, dz, \dots принимаются за величины постоянные. Если будем дифференцировать функцию u один, два, три... раз относительно всех переменных, то получим полные дифференциалы (*différentielles totales*) du, d^2u, d^3u, \dots первого, второго, третьего... порядка, которые для простоты означаются знаменованиями du, d^2u, d^3u, \dots . Но когда берем несколько раз сразу дифференциалы функции u относительно одной из переменных x, y, z, \dots , то получаем частные дифференциалы (*différentielles partielles*); и такъ, $d_x u, d_x^2 u, d_x^3 u, \dots$ или, что всё равно, $\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^3u}{dx^3}, \dots$ соотносительно изображают частные дифференциалы функции u первого, второго, третьего... порядка. Можно также дифференцировать функцию u несколько раз сразу относительно некоторых из переменных независимых x, y, z, \dots . Получаемые таким образом частные дифференциалы высших порядков изображаются следующим образом: $d_y d_x u$ или $\frac{d^2u}{dx dy} dx dy$, $d_x d_y u$ или $\frac{d^2u}{dy dx} dy dx$, $d_x^2 d_y d_x u$ или $\frac{d^3u}{dx^2 dy dx} dx^2 dy dx$ и проч. При употреблении сих частных дифференциалов, необходимо заметить, что они не изменяются в своей величине каков бы ни был порядок последовательных дифференцирований относительно переменных x, y, z, \dots . И такъ

$$\begin{aligned} d_y d_x u &= d_x d_y u \quad \text{или} \quad \frac{d^2u}{dx dy} = \frac{d^2u}{dy dx}, \\ d_x^2 d_y d_x u &= d_x d_y d_x^2 u = d_x d_y d_x^2 u = \dots, \\ \text{или, что всё равно,} \\ \frac{d^3u}{dx^2 dy dx} &= \frac{d^3u}{dx dy dx^2} = \frac{d^3u}{dx^2 dx dy} = \dots \end{aligned}$$

Чтобы доказать равенство $d_y d_x u = d_x d_y u$, мы покажем поочередно двух выражений $d_y d_x u$ и $d_x d_y u$, где под знаменованиями $d_x u$ раз-

смотрим конечное приращение, получаемое функцией u , когда изменимъ въ ней x въ $x + dx$, а подъ $d_y u$ подобное приращение функции u по изменности количества y . Такъ какъ..... $u = f(x, y, z, \dots)$, то получимъ

$$d_x u = f(x + dx, y, z, \dots) - f(x, y, z, \dots),$$

и следовательно

$$\begin{aligned} d_y d_x u &= f(x + dx, y + dy, z, \dots) - f(x, y + dy, z, \dots) \\ &\quad - f(x + dx, y, z, \dots) + f(x, y, z, \dots). \end{aligned}$$

Точно такимъ образомъ найдемъ

$$d_x d_y u = f(x, y + dy, z, \dots) - f(x, y, z, \dots)$$

и

$$\begin{aligned} d_x d_y u &= f(x + dx, y + dy, z, \dots) - f(x + dx, y, z, \dots) \\ &\quad - f(x, y + dy, z, \dots) + f(x, y, z, \dots). \end{aligned}$$

Выражения $d_y d_x u$ и $d_x d_y u$ тождественны: следовательно можно сказать то же самое и о дифференциалахъ $d_y d_x u$ и $d_x d_y u$, ибо равенство... $d_y d_x u = d_x d_y u$ не нарушится, какъ бы малы не были приращения dx и dy , которые можно заменить величинами εdx и εdy , разумя подъ ε безконечно малое число.

На основании равенства $d_y d_x u = d_x d_y u$ легко доказать общее правило, в следствие котораго позволено извѣщать по произволу порядокъ дифференцирований. И въ самомъ дѣлѣ, чтобы вывести, напротивъ, справедливость уравнения

$$d_x d_y d_x u = d_x d_x d_y u,$$

пишемъ вверху его часть последовательно въ следующихъ видахъ:

$$\begin{aligned} d_x d_y d_x u &= d_x d_y (d_x u) = d_y d_x (d_x u) = d_y (d_x d_x u) \\ &= d_y (d_x^2 u) = d_x d_y (d_x u) = d_x d_x d_y u. \end{aligned}$$

Черезъ подобные последовательныя перемены буквъ, можно будетъ во всякомъ случаѣ доказать независимость частнаго дифференциала $d^l x d^m y d^n z, \dots$ отъ порядка, въ которомъ производятся дифференцирования.

Очевидно, что когда будемъ дифференцировать функцию $u = f(x, y, z, \dots)$ переменныхъ независимыхъ x, y, z, \dots относительно какой нибудь изъ сихъ изменяемыхъ, то получимъ въ результатъ некоторую конечную функцию отъ x, y, z, \dots , помноженную на дифференциалъ той изменяемой; сверхъ того, замѣтивъ, что при дифференцировании произведения, послѣдний множитель выносится за знакъ d , и что dx, dy, dz, \dots суть величины постоянныя, мы въ правѣ будемъ заключать, что если функция..... $u = f(x, y, z, \dots)$ была дифференцирована l разъ

относительно x , m раз относительно y , n раз относительно z , ..., то окончательный дифференциал $d^l_x d^m_y d^n_z \dots u$ будет равняться некоторой функции $q(x, y, z, \dots)$, помноженной на произведение $dx^l dy^m dz^n \dots$. И так $d^l_x d^m_y d^n_z \dots u = q(x, y, z, \dots) dx^l dy^m dz^n \dots$, откуда

$$q(x, y, z, \dots) = \frac{d^l_x d^m_y d^n_z \dots u}{dx^l dy^m dz^n \dots}.$$

Функция $q(x, y, z, \dots)$, или равная ей дробь, называется *частною производною порядка* $l + m + n + \dots$. Эта частная производная изображается обыкновенно в следующем сокращенном виде:

$$\frac{d^{l+m+n+\dots} u}{dx^l dy^m dz^n \dots}.$$

На основании сказанного выше, не трудно будет определять полные дифференциалы $d^2 u$, $d^3 u$, Действительно, приняв в соображение формулу

$$du = d_x u + d_y u + d_z u + \dots$$

параграфа 7, найдем сперва

$$\begin{aligned} d^2 u &= d_x (d_x u + d_y u + d_z u + \dots) + d_y (d_x u + d_y u + d_z u + \dots) \\ &\quad + d_z (d_x u + d_y u + d_z u + \dots) + \dots \\ &= d^2_x u + d_x d_y u + d_x d_z u + \dots \\ &\quad + d_y d_x u + d^2_y u + d_y d_z u + \dots \\ &\quad + d_z d_x u + d_z d_y u + d^2_z u + \dots \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

а потому, в силу равенств $d_x d_y u = d_y d_x u$, $d_x d_z u = d_z d_x u$, $d_y d_z u = d_z d_y u$,

$$d^2 u = d^2_x u + d^2_y u + d^2_z u + \dots$$

$$+ 2(d_x d_y u + d_x d_z u + \dots + d_y d_z u + \dots).$$

Это самое уравнение может быть написано в следующем, более употребительном виде:

$$\begin{aligned} d^2 u &= \frac{d^2 u}{dx^2} dx^2 + \frac{d^2 u}{dy^2} dy^2 + \frac{d^2 u}{dz^2} dz^2 + \dots \\ &+ 2 \left[\frac{d^2 u}{dx dy} dx dy + \frac{d^2 u}{dx dz} dx dz + \dots + \frac{d^2 u}{dy dz} dy dz + \dots \right]. \end{aligned}$$

Вот несколько примечаний:

$$d^2(xy) = 2dxdy, \quad d^3(xy) = 0,$$

$$d^2(x^2 + y^2 + z^2) = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$$d^3(xye) = e^2(2dxdy + 2ydzdx + 2xdydz + xydz^2)$$

$$d^3(xy z) = 6dxdydz, \quad d^4(xy z) = 0.$$

Вь снпль: ANALOGIE DES DIFFÉRENCES AVEC LES PUISSANCES показано употребленіе символической формулы

$$d^m s = (d_x + d_y + d_z + \dots)^m s,$$

посредством которой можно найти очень легко дифференциал какого нѣ есть порядка

функции $s = f(x, y, z, \dots)$ отъ скольких угодно переменныхъ независимыхъ x, y, z, \dots .

Можно также привести опредѣленіе высшихъ дифференциаловъ функций отъ несколькихъ переменныхъ независимыхъ къ разсказу дифференциаловъ высшихъ порядковъ для функций съ одною только переменною. Легко достигнуть этой цѣли соображаясь съ тѣмъ, что было сказано въ концѣ § 7. Действительно, принявъ..... $u = f(x, y, z, \dots)$, и положивъ

$$f(x + dx, y + dy, z + dz, \dots) = F(),$$

окажется, что разности

$$F() - F(0), \quad F'() - F'(0), \quad F''() - F''(0), \dots$$

$$F^{(m-1)}() - F^{(m-1)}(0)$$

соотвѣстственно изображаютъ приращенія, принимаемые функциями

$$F(0), \quad F'(0), \quad F''(0), \dots, \quad F^{(m-1)}(0),$$

когда подставимъ въ нихъ $x + dx, y + dy, z + dz, \dots$ на мѣсто x, y, z, \dots . И такъ, наблюдая что $F(0) = u$, найдемъ послѣдовательно:

$$F'(0) = \text{пред.} \left\{ \frac{F() - F(0)}{\epsilon} \right\} = \text{пред.} \frac{du}{\epsilon} = du$$

$$F''(0) = \text{пред.} \left\{ \frac{F'() - F'(0)}{\epsilon} \right\} = \text{пред.} \frac{du}{\epsilon} = d du = d^2 u$$

$$F'''(0) = \text{пред.} \left\{ \frac{F''() - F''(0)}{\epsilon} \right\} = \text{пред.} \frac{d^2 u}{\epsilon} = d d^2 u = d^3 u$$

$$\dots \dots \dots F^{(m)}(0) = \text{пред.} \left\{ \frac{F^{(m-1)}() - F^{(m-1)}(0)}{\epsilon} \right\} = \text{пред.} \frac{d^{m-1} u}{\epsilon} = d d^{m-1} u = d^m u.$$

И такъ

$$u = F(0), \quad du = F'(0), \quad d^2 u = F''(0), \quad d^3 u = F'''(0), \dots, \quad d^m u = F^{(m)}(0).$$

Изъ этихъ формулъ заключаемъ, что для опредѣленія послѣдовательныхъ дифференциаловъ функции $f(x, y, z, \dots)$, можно только найти послѣдовательныя производныя выраженія $f(x + dx, y + dy, z + dz, \dots)$, принимаемого за функцию одной переменной ϵ , и потомъ положить $\epsilon = 0$.

§ 12. Въ силу § 8 легко опредѣлить послѣдовательные дифференциалы функций

$$s = f(u, v, w, \dots),$$

въ которой величины u, v, w, \dots означаютъ извѣстныя функции переменныхъ независимыхъ x, y, z, \dots . . Но здѣсь должно замѣтить, что du, dv, dw, \dots будутъ величинами переменными, почему высшіе ихъ дифференциалы должны были

удержаны. И такъ, на зномъ основаніи, получимъ:

$$ds = \frac{ds}{du} du + \frac{ds}{dv} dv + \frac{ds}{dw} dw + \dots$$

$$d^2s = \frac{d^2s}{du^2} du^2 + \frac{d^2s}{dv^2} dv^2 + \frac{d^2s}{dw^2} dw^2 + \dots$$

$$+ 2 \frac{d^2s}{du dv} du dv + 2 \frac{d^2s}{du dw} du dw + \dots 2 \frac{d^2s}{dv dw} dv dw + \dots$$

$$+ \frac{ds}{du} du + \frac{ds}{dv} dv + \frac{ds}{dw} dw + \dots$$

и проч. и проч.

Очевидно, что въ этихъ формулахъ должно будетъ подставить на мѣсто du , dv , dw , ... d^2u , d^2v , d^2w , ... слѣдующія величины:

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \dots$$

$$dv = \frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy + \frac{dv}{dz} dz + \dots$$

$$dw = \frac{dw}{dx} dx + \frac{dw}{dy} dy + \frac{dw}{dz} dz + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2} dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2} dy^2 + \frac{d^2u}{dz^2} dz^2 + \dots$$

$$+ 2 \left(\frac{d^2u}{dx dy} dx dy + \frac{d^2u}{dx dz} dx dz + \dots + \frac{d^2u}{dy dz} dy dz + \dots \right)$$

$$d^2v = \frac{d^2v}{dx^2} dx^2 + \frac{d^2v}{dy^2} dy^2 + \frac{d^2v}{dz^2} dz^2 + \dots$$

$$+ 2 \left(\frac{d^2v}{dx dy} dx dy + \frac{d^2v}{dx dz} dx dz + \dots + \frac{d^2v}{dy dz} dy dz + \dots \right)$$

$$d^2w = \frac{d^2w}{dx^2} dx^2 + \frac{d^2w}{dy^2} dy^2 + \frac{d^2w}{dz^2} dz^2 + \dots$$

$$+ 2 \left(\frac{d^2w}{dx dy} dx dy + \frac{d^2w}{dx dz} dx dz + \dots + \frac{d^2w}{dy dz} dy dz + \dots \right)$$

$$\dots \dots \dots$$

Для примѣра, доложимъ что имеемъ въпорой дифференціалъ суммы $uv + v^2$, предполагая $u = \varphi(x, y)$ а $v = \psi(y, z)$. Найдемъ послѣдовательно

$$d(uv + v^2) = v du + u dv + 2v dv$$

$$d^2(uv + v^2) = v d^2u + 2dudv + u d^2v + 2dv^2 + 2vd^2v.$$

Сверхъ того

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy$$

$$dv = \frac{dv}{dy} dy + \frac{dv}{dz} dz$$

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2} dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2} dy^2 + 2 \frac{d^2u}{dx dy} dx dy$$

$$d^2v = \frac{d^2v}{dy^2} dy^2 + \frac{d^2v}{dz^2} dz^2 + 2 \frac{d^2v}{dy dz} dy dz.$$

Подставляя эти величины для du , dv , d^2u , d^2v въ найденное выраженіе для $d^2(uv + v^2)$, а также

$\varphi(x, y)$, $\psi(y, z)$ на мѣсто u и v , получимъ искомый дифференціалъ второго порядка въ однихъ x, y, z и дифференціалахъ dx, dy, dz .

Вотъ полное изложеніе правилъ для дифференцірованія функций. Приводимъ теперь краткое обозрѣніе главныхъ способовъ изложенія Дифференціального Исчисленія.

Краткій очеркъ главныхъ способовъ изложенія Дифференціального Исчисленія.

О способѣ безконечно малыхъ величинъ, предложенномъ Лейбницемъ.

При изложеніи правилъ Дифференціального Исчисленія, Лейбницъ руководствовался способомъ безконечно малыхъ величинъ, который основанъ на слѣдующихъ началахъ: онъ предполагалъ, что всякая переменная величина, при переходѣ изъ одного состоянія въ другое, получаетъ безконечно малыя приращенія, но если увеличаться или уменьшиться такими количествами, которыя, по своей малости, не могутъ быть сравниваемы ни съ какою конечною величиною; за сими слѣдуетъ пребываніе, чтобы двѣ величины, разнѣвущія между собою количествомъ безконечно малымъ въ сравненіи съ каждою изъ нихъ, могли быть принимаемы безъ различія одна за другую.

Безконечно малое приращеніе переменной величины Лейбницъ называетъ *дифференціаломъ*, и изображаетъ буквою d , поставленною передъ разсматриваемою величиною. И такъ, дифференціалъ переменной x и y обозначаются соотвѣственно чрезъ dx и dy . Пусть будетъ $y = f(x)$, и положимъ что величина x получила безконечно малое приращеніе dx ; функция $f(x)$ или y получитъ соотвѣствующее приращеніе dy , почему и будетъ $y + dy = f(x + dx)$, или $dy = f(x + dx) - f(x)$. Въ слѣдствіе приведеннаго выше пребыванія, въ разности $f(x + dx) - f(x)$ должно будетъ удерживать только членъ, заключающій въ себѣ первую степень приращенія dx , а члены съ высшими степенями дифференціала dx должны быть опущены. И такъ, если бы имѣли $y = x^3$, то нашли бы сперва

$$dy = (x + dx)^3 - x^3 = 3x^2 dx + 3x dx^2 + dx^3,$$

и какъ $3x dx^2$ и dx^3 въ отношеніи къ $3x^2 dx$ суть количества безконечно малыя, ибо содер-

жания ихъ къ $3x^2dx$ соответственно равны $\frac{dx}{x}$, $\frac{dx^2}{2x^2}$, то и слѣдуетъ ихъ откинуть, по- чему

$$dv = 3x^2dx.$$

Подобнымъ образомъ найдемъ

$$d(xy) = ydx + xdy;$$

и действительно

$$\begin{aligned} d(xy) &= (x+dx)(y+dy) - xy \\ &= ydx + xdy + dxdy. \end{aligned}$$

Но членъ $dxdy$ долженъ быть откинутъ, по- тому что въ разсужденіи величинъ ydx и xdy онъ будетъ количественно безконечно малымъ; и въ самомъ дѣлѣ, отношеніе $dxdy$ къ ydx и xdy будутъ соответственно $\frac{dy}{y}$ и $\frac{dx}{x}$.

На помѣ же основаніи найдемъ

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x+dx}{y+dy} - \frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{y(y+dy)};$$

откинувъ въ знаменателѣ безконечно малую величину dy , сложенную съ конечною y , полу- чимъ

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Съ такою же простотою выводятся по спо- собу Лейбница дифференціалы какихъ нѣ есны функций. Такъ наприимѣръ, для опредѣленія диф- ференціала *синуса*, мы получимъ формулу $d.\sin x = \sin(x+dx) - \sin x$

$$= \sin x.\cos dx + \sin dx.\cos x - \sin x.$$

Но косинусъ безконечно малой дуги развѣтствуетъ отъ радіуса количественно безконечно малымъ; слѣдовательно, положивъ радіусъ равнымъ еди- ницѣ, будемъ $\cos dx = 1$; съ другой стороны, синусъ безконечно малой дуги развѣтствуетъ отъ самой дуги безконечно малою величиною выс- шаго порядка, почему должно принять $\sin dx = dx$. И такъ, предыдущая формула до- ставитъ

$$d.\sin x = \cos x.dx.$$

Переходимъ теперь къ дифференціаламъ выс- шихъ порядковъ.

Безконечно малая величина, которую увели- чивается или уменьшаетъ дифференціалъ пере- мѣнной величины, называется *дифференціаломъ* дифференціала или *вторымъ дифференціаломъ*; безконечно малое приращеніе втораго дифферен- ціала — *третьимъ дифференціаломъ*, и такъ далѣе. Дифференціалы высшихъ порядковъ обо-

значаются повторенною буквою d ; и такъ, ddy , ddd , изображаютъ *второй*, *третій*, дифференціалъ, переменной величины y . Для со- кратенія пишутъ d^2y , d^3y ,

Чтобы показать геометрическое значеніе дифференціаловъ высшихъ порядковъ, пусть бу- детъ плоская кривая AmB (черт. 6 Листъ VIII), описанная къ двумъ прямоугольнымъ коорди- натнымъ осямъ OX , OY . Положимъ $Op = x$, $pm = y$ и $pp' = p'p'' = p''p''' = \dots = dx$. Проведемъ изъ точекъ m , m' , m'' , линіи mq , $m'q'$, $m''q''$, ... параллельно оси x -ой, и $m'n$, $m'n'$, ... парал- лельно прямой qq' , $q'q''$, Если теперь примемъ въ соображеніе равенства

$$\begin{aligned} p'm' &= y + dy \\ p''m'' &= y + dy + d(y + dy) = y + 2dy + d^2y \\ p'''m''' &= y + 2dy + d^2y + d(y + 2dy + d^2y) \\ &= y + 3dy + 3d^2y + d^3y \end{aligned}$$

то выведемъ изъ нихъ слѣдующія значенія для дифференціаловъ ординатъ: $dy = m'q$, $d^2y = m''n$, $d^3y = m'''n' - m''n'$, и такъ далѣе. Легко видѣть, что когда кривая возгнута къ оси x -ой, то d^2y будетъ количественно отрицательнымъ. —

Беская величина, въ отношеніи къ своему дифференціалу, называется *интеграломъ* или *сум- мою*, потому что она действительно изоб- ражаетъ сумму безконечно малыхъ прираще- ній, получаемыхъ этою величиною; Сомм. IN- TÉGRAL (CALCUL). Интегралъ обозначается знакомъ \int (начальной буквою *сумм*, *summa*), поставленнымъ передъ дифференціаломъ. —

Въ приложеніяхъ Дифференціального Исчисле- нія почти всегда придерживаются способа без- конечно малыхъ величинъ, который низѣтъ передъ другимъ то преимущество, что сокра- щаетъ знаменательнымъ образомъ рядъ сужденій, ведущихъ къ доказательству какой либо исти- ны. Некоторые математиками, въ томъ числѣ Ньютонъ и Лейбницъ, современники Лейбница, возста- вали противъ строгости этого способа. Лейб- ницъ, въ первомъ объясненіи на возраженія Нь- евеннинга (Act Lips. 1694), опять не неудовле- творительно; онъ называлъ свои безконечно ма- лые количества или дифференціалы величинами не подлежащими сравненію (*incomparables*); та- кова величина песчинки въ отношеніи къ сѣрѣ

неподвижных звезд. Очевидно, что допуская справедливость такого объяснения, мы разрушили бы точность Дифференциального Анализа в самом его основании. Лейбниц скоро замечал свою ошибку, и, вслѣдъ за первымъ объясненіемъ, сообщивъ дополненіе къ прежнему отвѣту, предлагая на этотъ разъ другія мысли, болѣе основательныя.

Возраженія противъ способа бесконечно малыхъ величинъ неосновательны, ибо Дифференціальное Ичисленіе, въ сущности своей, совершенно независимо отъ разсматриванія подобныхъ количествъ, которыми, какъ уже сказано выше, употребляются единственно для сокращенія суждений. Объяснимъ это примѣромъ.

Пусть будетъ $Amm'B$ (черт. 7 Листъ VІІІ) кривая линія, описанная къ прямоугольнымъ координатамъ $Op \equiv x$, $pm \equiv y$, и предложимъ себѣ найти дифференціалъ площади $OAmrO$. Если означимъ чрезъ $q(x)$ эту площадь, и дадимъ какое нѣ конечное приращеніе $pp' \equiv i$ абсциссѣ x , то $q(x+i)$ изобразитъ площадь... $OAmr'O$, а $q(x+i) - q(x)$ приращеніе $pmr'p'$ первоначальной площади $q(x)$. Разлагая $q(x+i) - q(x)$ въ рядъ по степенямъ i , получимъ

$$pi + q^2 + \dots,$$

гдѣ p , по самому опредѣленію, изображаетъ производную функцию, или, что все равно, дифференціальный коэффициентъ площади $q(x)$. Но, съ другой стороны, площадь $pmr'p'$ составлена изъ площадей $pmqp'$, mqp' , и проч. И такъ, означивъ чрезъ α уголъ mqp' касательной въ точкѣ m къ оси x -овой, площади, о которыхъ говоримъ, изобразятся соответственно чрезъ yi , $\frac{\tan \alpha}{2} \cdot i^2$ и проч., почему и найдемъ

$$pmr'p'p = yi + \frac{\tan \alpha}{2} \cdot i^2 + \dots$$

Слѣдовательно

$$pi + q^2 + \dots = yi + \frac{\tan \alpha}{2} \cdot i^2 + \dots$$

Вопъ равенство, которое должно вѣстъ мѣсто для всѣхъ возможныхъ значеній приращенія i , почему, чрезъ сравненіе коэффициентовъ у одинаковыхъ степеней i , найдемъ

$$p \equiv y, q \equiv \frac{1}{2} \tan \alpha, \text{ и проч.}$$

Но p , какъ сказано выше, есть не что иное, какъ производная отъ функціи $q(x)$; и такъ

$q'(x) \equiv y$. Слѣдовательно, искомый дифференціалъ площади опредѣлится формулою

$$dq(x) \equiv q'(x) dx \equiv y dx.$$

Этотъ самый выводъ получился гораздо проще посредствомъ Лейбницева способа; объяснимъ, если проведемъ ординату pm (иметь же чертѣжъ) на бесконечно близкомъ разстояніи dx отъ ординаты pm , то pm и изобразитъ дифференціалъ площади $q(x)$; эта элементарная площадь составится изъ прямоугольника $pm \equiv y dx$ и треугольника $tm \equiv \frac{dx dy}{2}$, ибо бесконечно малая дуга tm принимается за прямую линію. Такъ какъ отношеніе $\frac{dx dy}{2}$ къ $y dx$ есть бесконечно малая величина $\frac{dy}{y}$, то членъ $\frac{dx dy}{2}$ долженъ быть опущенъ предъ $y dx$, почему и получимъ какъ выше $dq(x) \equiv y dx$.

Чтобы согласить простоту теоріи бесконечно малыхъ величинъ съ строгостію способа чрезъ сравненіе коэффициентовъ, можно поступить слѣдующимъ образомъ: употребимъ первый изъ этихъ способовъ только для опредѣленія коэффициента p у первой степени приращенія i , предполагая сіе послѣднее бесконечно малымъ, а потомъ уже примемъ i произвольнымъ. Такимъ образомъ сохранимъ всю простоту, свойственную теоріи бесконечно малыхъ величинъ, и, вѣстъ съ тѣмъ, оградимъ доказательства отъ возраженій, которыми подверглась Лейбницева аналитика.

Законоположеніе Лейбница вошло во всеобщее употребленіе. Только нѣкоторые Англійскіе математики, благодаря къ памяти Ньютона, и изъ народной гордости, удержали означенный способъ флюкцій.

О способѣ флюкцій, предложенномъ Ньютономъ.

Ньютонъ, въ изложеніи своего способа флюкцій, прибѣгаетъ къ соображеніямъ геометрическимъ и механическимъ. Онъ разсматриваетъ кривыя линіи какъ бы образуемыя равномернымъ движеніемъ шочки, постоянная скорость которой разлагается въ каждое мгновеніе на двѣ другія, параллельныя двумъ координатнымъ осямъ. Эти при скорости Ньютонъ и называетъ флюкціями (*fluxio—meten*) дуги и двухъ координатъ

кривой линии. Флюкція обозначается точкою, и сама линия надъ разсматриваемою величиною. И такъ, если изобразить чрезъ x, y и z абсциссу, ординату и дугу данной кривой линии, то флюкція количества x, y и z будутъ соотносываться именно \dot{x}, \dot{y} и \dot{z} . Наоборотъ, величины x, y и z , въ отношеніи къ ихъ флюкціямъ \dot{x}, \dot{y} и \dot{z} , Нютонъ называетъ *флюэнтами* (*fluenta—текущими*), которыхъ обозначаютъ знакомъ $Fl.$ въ такомъ видѣ: $Fl.\dot{x} = x, Fl.\dot{y} = y, Fl.\dot{z} = z. Fl.\dot{x}^m.\dot{x} = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \text{Пост.}$ и проч. И такъ, флюкція соотносывается Лейбницею дифференціалу, а флюэнта—интегралу. Впрочемъ должно замѣтить, что флюкція, какъ количество конечное, разсчитывается отъ Лейбница дифференціала, изображающаго величину бесконечно малую.

Мы сей-часъ сказали, что скорость точки, описывающей кривую, принимается постоянною. Но можно также предположить движеніе точки неравнообразнымъ, а принявъ постоянною составляющую скорость или по оси абсциссы, или по оси ординатъ. Такъ напримѣръ, принявъ флюкцію абсциссы постоянною, можемъ представить себѣ образованіе параболы слѣдующимъ образомъ: прямая AB (черт. 8 Листа VIII), совмѣщающаяся въ началѣ движенія съ осью OY , движется параллельно этой оси отъ O къ X съ постоянною скоростью; въ то же время точка M , находящаяся въ началѣ координатъ O когда начинается движеніе, движется по прямой AB съ передѣльною скоростью, при которой перейденное пространство AM изображаетъ среднюю пропорціональную между данною линіею (параметромъ параболы) и соотвѣтствующею абсциссою OA . При такомъ движеніи точка M опишетъ полу-параболу OMC . Отношеніе, существующее въ какое нѣ есть отношеніе между скоростью точки M , движущейся по прямой AB , и постоянной скорости: линіи AB , изобразитъ отношеніе флюкціи ординаты къ флюкціи абсциссы; по знаменоложенію Ньютона это отношеніе обозначается чрезъ $\dot{y} : \dot{x}$ или $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, а по Лейбницу, чрезъ $dy : dx$ или

$\frac{dy}{dx}$. Для параболы, о которой идетъ рѣчь, бу-

детъ $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, разутья подъ p данный ея параметръ.

Правила способа флюкцій не отличаются отъ правилъ Дифференціального Истисленія. Но не должно терять изъ виду, что x есть количество конечное, именно, скорость движущейся точки, параллельная оси x -овой, между тѣмъ какъ dx , по Лейбницу, изображаетъ бесконечно малое приращеніе абсциссы x . Пояснимъ это другимъ образомъ: если изобразимъ чрезъ t время, прошедшее отъ начала движенія, то изъ сказаннаго выше легко заключить что $\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}$;

Смол. VITESSE. И такъ, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx}$, и каж-

дая изъ величинъ $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ будетъ величиною конечною.

Если примемъ флюкцію \dot{x} и \dot{y} первоначальной кривой за координаты новой кривой, то флюкція абсциссы и ординаты сей последней будутъ уже флюкціями отъ флюкцій, и изобразятся чрезъ \ddot{x} и \ddot{y} . Очевидно, что эти флюкція второго порядка будутъ также количества конечныя. Точно такимъ образомъ составляется и флюкція третьего порядка, которая изображается знаменоложеніемъ $\ddot{\ddot{x}}, \ddot{\ddot{y}}$ и проч.

Сказанное здѣсь о приложеніи Способа Флюкцій къ образованію кривыхъ линій, можетъ быть распространено на опредѣленіе ихъ площадей, дугъ, также на кривыя поверхности, ихъ объемы и проч. И вообще, способъ Ньютона приимается съ удобностію къ рѣшенію вопросовъ по разнымъ отраслямъ Естественной Философіи.

Здѣсь мѣсто указать на другой способъ, предложенный также Ньютономъ, и имѣющій близкую связь съ Дифференціальнымъ Истисленіемъ. Мы разсмотримъ способъ *первый и послѣдній содержаній*. Смол. DERNIÈRE VALEUR.

Некоторые математикѣ выражали противъ Способа Флюкцій, что онъ вводитъ въ Геометрію, принадлежащую въ некоторомъ отношеніи

къ Числой Математики, понятие о скорости, заимствованное изъ Механики — науки прикладной. Такимъ образомъ, простое понятие о пропорціи замѣнилось сложнымъ — о скорости. Присерженцы Способа Флюкцій отъвѣчали на это, что порядокъ, въ которомъ распределяются различныя отрасли наукъ математическихъ, болѣе или менѣе произволенъ; хотя Геометрія въ прикладнѣхъ распредѣленіи и предшествуетъ Механикѣ, но нѣтъ сомнѣнія, что высшія части первой, отвѣчающія элементарныхъ частей второй. И такъ, не погрѣшая противъ духа Математики, можно, опредѣленіе флюкцій основать на понятіи о скорости, болѣе вразумительномъ для каждаго.

Мы не будемъ разбирать, до какой степени возраженія противъ Способа Флюкцій могутъ быть основательны. Скажемъ только, что понятіе о переменнѣй скорости весьма далеко отъ очевидности. Даже можно догадываться, что самъ Ньютонъ, предвидя возраженіе, сознавалъ его сильную сторону, ибо, во многихъ мѣстахъ своихъ *Диссерт.*, онъ предпочелъ употребленіе способа первыхъ и послѣднихъ содержаній.

Послѣ Ньютонъ и Лейбница нѣкоторые первоспененные геометры излагали начала Дифференціального Ичисленія по собственному воззрѣнію. Эйлеръ, съ цѣлю согласить простоту Лейбницаева способа съ строгостію математическою, разсматривалъ безконечно малыя количества какъ наслояніе нули, различающіеся между собой только происхожденіемъ, почему зависящіе ихъ отношенія приводились къ величинамъ опредѣленнымъ. На основаніи этого мысли, Эйлеръ, въ сочиненіи своемъ *Institutiones Calculi differentialis*, опредѣлялъ Дифференціальное Ичисленіе способомъ, посредникомъ котораго опредѣляются отношенія исчезающихъ приращеній, получаемыхъ какими ни есть функциями, когда самымъ переменнымъ, отъ которыхъ сѣи функции зависятъ, приписываются исчезающія же приращенія. Смол. ÉVANOUISSANTES (QUANTITÉS).

Лагранжъ замѣтилъ въ объясненіи Эйлера то неудобство, что количества разсматриваются въ исчезающихъ ихъ состояніи, следовательно въ тѣ мгновеніе, когда они, собственно говоря,

перестають быть величинами. „И въ самомъ дѣлѣ, говоритъ Лагранжъ *), хотя мы ясно понимаемъ, что должно разумѣть подъ отношеніемъ двухъ количествъ, когда разсматриваются количества конечныя, но это самое отношеніе не представляетъ уму никакого яснаго и опредѣленнаго понятія, когда въ одно время оба числа содержація обращаются въ нуль.“

Лагранжъ, въ Запискахъ Берлинской Академіи за 1772 годъ, предложилъ теорію разложенія функций въ ряды. Его Разсужденіе заключало въ себѣ истинныя начала Дифференціального Ичисленія, освобожденнаго отъ разсматриванія безконечно малыхъ количествъ или исчезающихъ величинъ, и функций или предѣловъ. Позже, онъ издалъ объ этомъ предметѣ два сочиненія: *Théorie des fonctions analytiques* и *Calcul des fonctions*. Отсылаемъ для нѣкоторыхъ подробностей къ страницѣ DE IVÉE нашего Лексикона.

Маклоретъ и Д. Адамсбертъ основали Дифференціальное Ичисленіе на теоріи предѣловъ, или, что все равно, на способѣ первыхъ и послѣднихъ содержаній Ньютонъ. Они разсматривали отношеніе дифференціала функций къ дифференциалу переменнаго количества какъ предѣлъ отношенія конечнаго приращенія функций къ конечному же приращенію переменнаго количества, когда члены этого содержанія обращаются оба въ нуль. Смол. § 3 Изложенія главнѣйшаго Дифференціального Ичисленія, а также страницъ LIMITE, DERNIÈRE VALEUR.

Кромѣ поименованныхъ математиковъ и нѣкоторые другіе предомыслили свои способы разсматриванія Дифференціального Ичисленія. Притомъ наиболѣе изъ нихъ Ландель, изданный въ 1764 году по сему предмету книгу: *The residual analysis*; Пасквичъ (Pasquich), Грюзонъ (Gruzon) [Смол. его *Mémoires sur le Calcul d'exposition* въ *Mémoires de l'Académie de Berlin* за 1798 и 1799 годы]; Крашиль и Арбогастъ. [Смол. DÉRIVATIONS (CALCUL DES)].

Читатели, желающіе почерпнуть довольно подробныя свѣдѣнія объ различныхъ способахъ изложенія Дифференціального Ичисленія, могутъ

*) *Théorie des fonctions analytiques*, 1-ое изданіе, стр. 4

обратились къ сочинению: *Réflexions sur la métaphysique du Calcul Infinitésimal*, par M. Carnot, 2^e édition, 1815.

Въ заключение этой статьи, приводимъ главные законоположенія, которыя были предложены для изображенія дифференціального коэффициента. Вотъ они:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{y}{x}, f'(x), y', [x \perp y], y, \frac{\partial y}{\partial x}, Dy.$$

Первое законоположеніе принадлежит Лейбницу, второе — Нютону, третье и четвертое — Лагранжу, пятое — Ландену, шестое — Паскалю, седьмое — Грону, и наконецъ осьмое — Ар оасту.

Въ статьѣ INTÉGRAL (CALCUL) мы укажемъ на лучшіе трактаты объ Дифференціальномъ и Интегральномъ Ичисленіи. Приуготовительнымъ же пособіемъ къ изученію Дифференціального Анализа можетъ служить превосходное сочиненіе Эйлера: *Introductio in analysin infinitorum*, 1748 г.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. Дифференціальныя уравненія. Уравненія, заключающія въ себѣ переменныя величины съ ихъ дифференціалами. Когда въ уравненіи, сверхъ переменныхъ количествъ, входятъ только дифференціалы перваго порядка, то оно называется дифференціальнымъ уравненіемъ перваго порядка (*équation différentielle du premier ordre*); напримеръ, $f(x, y)dx + F(x, y)dy = 0$. Когда уравненіе заключаетъ въ себѣ дифференціалъ второго порядка зависящей переменной, то оно принимаетъ названіе дифференціального уравненія второго порядка; напримеръ, $f(x, y)d^2y + F(x, y)dx dy + \psi(x, y)dx^2 = 0$, и такъ далѣе.

Степень дифференціального уравненія (*degré de l'équation différentielle*) называется высшая степень, въ которую возвышенъ высшаго порядка дифференціалъ переменной независимой. И такъ, $(\frac{dy}{dx})^2 + x \frac{dy}{dx} + y = 0$ есть дифференціальное уравненіе 1-го порядка и 2-ой степени, а $(\frac{d^2y}{dx^2})^2 + y (\frac{dy}{dx})^2 + xy = 0$, дифференціальное уравненіе 2-го порядка и 2-ой степени.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES. Совокупныя, совместныя дифференціальныя уравненія. Когда имѣемъ

m дифференціальныя уравненія съ $(m+1)$ -ою переменною величиною, то эти m уравненій, разсматриваемыя вмѣстѣ, называются совокупными дифференціальными уравненіями. Таковы напримѣръ два уравненія перваго порядка:

$$(ax+by)dt+dx=0, (a'x+b'y)dt+dy=0,$$

и три уравненія второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{mx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0, \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{ny}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{nz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0.$$

ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES. УРАВНЕНІЯ ВЪ ЧАСТНЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛАХЪ ИЛИ ЧАСТНО-ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ. Уравненія, заключающія въ себѣ сверхъ переменныхъ величинъ, частныя дифференціалы этихъ послѣднихъ. См. DIFFÉRENTIEL (CALCUL) § 6. Таковое частное дифференціальное уравненіе 1-го порядка

$$f(x, y, z) \frac{dz}{dx} + F(x, y, z) \frac{dz}{dy} = \psi(x, y, z)$$

и частное дифференціальное уравненіе 2-го порядка

$$P \frac{d^2z}{dx^2} + Q \frac{d^2z}{dx dy} + R \frac{d^2z}{dy^2} + S \frac{dz}{dx} + T \frac{dz}{dy} = U,$$

въ которыхъ P, Q, R, S, T и U изображаютъ какія нѣ суть функціи переменныхъ x, y и z .

ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES MÊLÉES. Дифференціально-разностныя уравненія. Уравненія, заключающія въ себѣ переменныя величины, ихъ дифференціалы и конечныя разности. Таковы напримѣръ два уравненія

$$\frac{dy}{dx} + 4y + y = 0 \text{ и } \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + x = 0.$$

Что касается до теорій дифференціальныя уравненій и до ихъ интегрированія, то читателямъ надлежитъ надлежати подробнѣе въ статьѣ INTÉGRAL (CALCUL), а также и въ другихъ мѣстахъ нашего Лексикона. Описывая преимущественно къ словамъ: ARBITRAIRES (ÉLIMINATION DES CONSTANTES), BERNOULLI (ÉQUATION DE), HOMOGÈNES (ÉQUATIONS), LINÉAIRES (ÉQUATIONS), RICCATI (ÉQUATION DE), SIMULTANÉES (ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES), TANGENTES (PROBLÈME DES) и проч. и проч.

DIFFÉRENTIELLE. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬ. Смот. DIFFÉRENTIEL (CALCUL).

DIFFÉRENTIER. ДИФФЕРЕНЦИРОВАТЬ. Находить, определять дифференциал какой ни есть функции или уравнения. Смот. DIFFÉRENTIEL (CALCUL).

DIFFÉRENTIO-DIFFÉRENTIELLE (ÉQUATION).

ДИФФЕРЕНЦИАЛО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ. Такъ называлъ *Бйлеръ* дифференциальныя уравнения второго порядка

CALCUL DIFFÉRENTIO-DIFFÉRENTIEL. Уст. выр. Дифференциало дифференциальное исчисление. Совокупность способов служащихъ для нахождения дифференциаловъ высшихъ порядковъ.

DIFFRACTION или INFLEXION DE LA LUMIÈRE. (Физ.) ДИФФРАКЦИЯ, УКЛОНЕНИЕ СВѢТА.

Если сквозь весьма малое отверстие, сделанное въ ставлѣ окна шѣмной комнаты, пропустимъ лучи солнечнаго свѣта такъ, чтобы лучи падали на волосокъ или на тонкую проволоку, установленную въ нѣсколькохъ футмахъ отъ отверстия, то увидимъ слѣдующее явление: тѣнь волоска, принятая въ нѣкоторомъ отъ него разстояніи на бѣлую бумагу, будетъ имѣть ширину гораздо болѣеую противъ той, какую слѣдовало бы получить по разстоянію тѣни отъ волоска, и по диаметру сего послѣдняго, допускала криволинейное распространѣніе свѣта. Сверхъ того, по обѣимъ сторонамъ тѣни, увидимъ цвѣтныя полосы или каймы. Это свойство свѣта, по которому лучи его, коснувшись края тѣла, уклоняются отъ первоначальнаго направленія, называется *"диффракціею или уклоненіемъ"*. Чипалеи найдутъ болѣе или менѣе удовлетворительныя объясненія этого явленія въ новѣйшихъ Запискахъ и Трактатахъ о теоріи свѣта.

Первый, замѣтившій *диффракцію*, былъ, какъ полагаютъ, Іезуитъ *Григальди*, жившій въ концѣ XVII столѣтія. Въ новѣйшія времена это явленіе было предметомъ изслѣдованій *Юнга, Фраунгофера, Френеля* и другихъ физиковъ.

DIFFUSION. (Физ.) РАСПРОСТРАНЕНІЕ. *Diffusion de la lumière; распространѣніе свѣта.* Смот. PROPAGATION.

DIGNITÉ. (Астр.) Уст. выр. СТЕПЕНЬ. Слово *dignité* употреблялось прежними алгебраистами въ одномъ смыслѣ съ *degré*. И такъ, говорили: *l'inconnue de cette équation monte à la 2^e, 3^e dignité; это уравненіе заключаетъ въ себя неизвѣстную величину во 2^ю, 3^ю степени*

DIGRESSION. (Астр.) ОТСТУПЛЕНИЕ. Видимое удаленіе планетъ отъ солнца, и преимущественно нижнихъ, то есть *Меркурія и Венеры*. Смот. ÉLONGATION.

DIGUE. (Гидрав.) ДАМБА, ПЛОТИНА, ЗАПРУДА, ГАТЬ. Всякая претрада, противуположная водѣ для воспрепятствованія ея разлитію.

DINÉLIE. (Астр.) ДИГЕЛИЙ. Такъ называлъ *Леплеръ* динію, перпендикулярную къ большой оси эллипса, и проходящую чрезъ фокусъ этой кривой, въ которой, по предположенію, находится солнце. Это названіе вышло совсѣмъ изъ употребленія.

DINÉXAÈDRE. (Геом. и Кристал.) ДИГЕКСАЗДРЪ. — Двойная шестигульная пирамида. Геометрическое тѣло, ограниченное двѣнадцатию треугольниками. *Правильный дигексаэдръ* состоитъ изъ двухъ правильныхъ шестигульных пирамидъ, равныхъ между собою, и соединенныхъ своими основаніями.

DILATABILITÉ. (Физ.) РАСШИРЯЕМОСТЬ, РАСШИРИТЕЛЬНОСТЬ. *Dilatabilité des corps aériformes или force élastique, force expansive des corps aériformes; расширяемость, упругость воздушныхъ тѣлъ.* Стремленіе воздухообразныхъ тѣлъ увеличиться въ объемъ. Смот. CORPS, CHALEUR, AÉRIFORMES (CORPS).

DILATATION. (Физ.) РАСШИРЕНІЕ. Увеличеніе объема какого либо тѣла отъ дѣйствія теплоты или отъ другой причины. *Dilatation des corps solides, liquides et aériformes; расширение тѣлъ твердыхъ, жидкихъ и воздухообразныхъ.* — Въ Астрономіи подъ словомъ *dilatation* разумѣютъ видимое увеличеніе діаметра планетъ, происходящее отъ большаго свѣта, которымъ онѣ бываютъ окружены.

DIMENSION. (Геом.) ИЗМѢРЕНІЕ. Свойства различныхъ промѣнностей, составляющія предметъ

Геометрія, совершенно зависящая отъ нашихъ понятій о пространствѣ. Въ пространствѣ, каковыи мы его понимаемъ, можемъ вообразить только *три* различныхъ пропѣжия: 1^о *линію*; 2^о *поверхность*, и 3^о *объемъ*. Сообразно съ этимъ, геометры вообразили и *три* измѣренія въ шѣлѣ: *длину* (*longueur*), *ширину* (*largeur*) и *высоту* (*hauteur*), называемую также *глубиною* и *толщиною* (*profondeur*, *épaisseur*). Длина, разсматриваемая опѣдѣльно, называется *линіею*; длина въ совокупности съ шириною — *поверхностію*; наконецъ, длина, ширина и высота, принимаемая вмѣстѣ, составляютъ *тѣло*. Слѣд. LIGNE, SURFACE, SOLIDE. Для соображенія, отсылаемъ читателя также къ слѣдующей ГЕОМЕТРИЕ.

GÉOMÉTRIE A DEUX DIMENSIONS или ГЕОМЕТРИЕ PLANE; Геометрія двухъ измѣреній или Геометрія въ плоскости. ГЕОМЕТРИЕ A TROIS DIMENSIONS или ГЕОМЕТРИЕ DANS L'ÉSPACE; Геометрія трехъ измѣреній или Геометрія въ пространствѣ. Слѣд. LIGNE, SURFACE, SOLIDE.

DIMENSION. (Алг.) ИЗМѢРЕНИЕ, СТЕПЕНЬ.

Измѣреніемъ какого нѣ есть количества называемся суема показателѣй нѣхъ величинъ, произведение которыхъ составляетъ данное количество. И такъ, измѣреніе количества x^2y есть 3; количество xy^2z^3 будетъ *шестяго* измѣренія; измѣреніе дроби $\frac{x}{y}$ есть 0, ибо она можетъ быть написана въ видѣ $x^1.y^{-1}$, и тогда ясно, что $1-1=0$. и проч. — Въ томъ же смыслѣ употребляемъ это слово, когда говоримъ объ однородной функціи. И такъ, измѣренія или степени однородныхъ функцій $Ax^2+Bxy+Cy^2$, $\frac{ax}{x^2}+\frac{by}{x^2}$ будутъ соответственно +2 и -1.

DIMENSIONS (SIGNES DE). ЗНАКИ ИЗМѢРЕНИЯ.

Физикъ, Берлинскій ученый, извѣстный многими полезными трудами, и преимущественно своею *Механическою Физикою*, издалъ въ 1792 году сочиненіе подъ заглавіемъ: *Theorie der Dimensionszeichen*, Halle, 2 тома, in 4^o. Въ этой книгѣ Физикъ употребилъ особенныя знаки, которые назвалъ *знаками измѣренія*; или обозначать онъ последовательные коэффициенты рядовъ и ихъ степеней. Новое законоположеніе казалось ему выгоднымъ для приведенія въ оче-

видность закона коэффициентовъ такихъ рядовъ, которые получаются чрезъ подстановленіе въ известную строку степеней другихъ рядовъ.

Коэффициенты одного и того же ряда означаются одинакии и тѣмъ же символомъ или знакомъ, но съ различными цифрами, которые ставятся надъ знакомъ; эти цифры служатъ для обозначенія мѣста, занимаемаго членомъ въ разсматриваемомъ ряду. Символы, о которыхъ говоримъ, суть частію Римскіе числительные знаки I, II, III, ..., а частію Нѣмецкія буквы A, B, C, D, Напримеръ

$$y = Ix + Ix^2 + Ix^3 + Ix^4 + \dots$$

$$y^2 = IIx^2 + IIx^3 + IIx^4 + IIx^5 + \dots$$

$$y^3 = IIIx^3 + IIIx^4 + IIIx^5 + IIIx^6 + \dots$$

$$y^m = mAx^m + mAx^{m+1} + mAx^{m+2} + \dots$$

$$y^{2m} = 2Ax^{2m} + 2Ax^{2m+1} + 2Ax^{2m+2} + \dots$$

Здѣсь символъ II означаетъ произведение двухъ простыхъ коэффициентовъ первого ряда, III, произведение трехъ, и т. д.; отсюда происходитъ и названіе *знаковъ измѣренія*. Число надъ символомъ, разложенное на цѣлыя его частіи, показываетъ изъ какихъ коэффициентовъ ряда y составленъ разсматриваемый коэффициентъ. И такъ II состоитъ изъ 1^{го} и 4^{го}, 2^{го} и 3^{го}, ибо $1+4=5$, $2+3=5$; III состоитъ изъ коэффициентовъ, соответствующихъ мѣстамъ 1, 1, 4; 1, 2, 3; 2, 2, 2.

Сочиненіе Физика заключаетъ въ себѣ приложеніе теоріи знаковъ измѣренія къ рѣшенію числовыхъ уравненій, къ возвышенію въ степень рядовъ конечныхъ и бесконечныхъ, къ обращенію строкъ (retour des suites, и еще къ нѣкоторымъ другимъ задачамъ изъ математическаго анализа.

DIMINUTION. (Ариф.) УМЕНЬШЕНИЕ.

DIMONSTRATE (QUADRATRICE DE). (Геом.) ДИНОСТРАТОВА КВАДРАТРИССА, КРУГОСПРЯМЛЯЮЩАЯ КРИВАЯ. Слѣд. QUADRATRICE.

DIOPHÈS (CISSOÏDE DE). (Геом.) **ДИОКЛОВА**
ЦИССОИДА. Смол. CISSOÏDE.

ДИОРНАНТЕ (PROBLÈMES или QUESTIONS DE)
или еще ANALYSE DE DIORNAUTE. **ДИО-**
ФАНТОНЫ задачи или ДИОФАНТОВЪ ана-
лизъ. Греческій математикъ Диофантъ Алек-
сандрійскій, жившій какъ думаютъ въ IV сто-
лѣтій по Р. Х., написалъ объ Алгебрѣ 13 книгъ,
изъ которыхъ только 6 дошли до насъ. Первый
переводъ имѣетъ 6 книгъ, съ Греческаго языка на
Латинскій, былъ напечатанъ *Хесландеромъ* въ
1575 году, а въ 1621, извѣстный *Башетъ de Ми-*
зириакъ издалъ, на Латинскомъ же языкѣ, гораз-
до лучший переводъ, обогативъ его превосходны-
ми комментаріями. Въ 1670 году *Ферматъ* на-
печаталъ также изданіе Диофанна, и дополнилъ
текстъ собственными примѣчаніями.

Въ твореніи Греческаго математика болѣе
всего примѣчательны рѣшенія особеннаго рода
неопредѣляемыхъ вопросовъ о числахъ квадра-
тныхъ, кубичныхъ, о прямоугольныхъ треуголь-
никахъ и проч. Въ задачахъ такого рода ищутъ
раціональных, а часто только цѣлыхъ рѣшенія
неопредѣленныхъ уравненій, допускающихъ без-
конечное число рѣшеній ирраціональныхъ. На-
примѣръ, если бы предложено было найти пря-
моугольный треугольникъ такого свойства, что-
бы оба катета а также гипотенуза его изобра-
жались цѣлыми числами, то такая задача при-
надлежала бы къ числу *Диофантовыхъ*. Впрочемъ,
Диофантовъ Анализъ преимущественно называ-
ютъ *Щедеръ Неопредѣленныхъ Анализомъ*, ко-
торый самъ входяща въ составъ *Теоріи чиселъ*,
или, что всё равно, *Трансцендентной Ариме-*
тики.

Чтобы ознакомить читателей съ Диофанто-
вымъ Анализомъ, предлагаемъ рѣшеніе нѣсколь-
кихъ задачъ.

Задача 1. Найти прямоугольный треу-
гольникъ такого свойства, чтобы три стороны
его изображались цѣлыми числами.

Пусть будутъ x и y катеты искомаго тре-
угольника, а z его гипотенуза. Получимъ урав-
неніе

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

въ которомъ, по условію вопроса, неизвѣстныя
 x , y и z должны быть цѣлыя числа. Во пер-

выхъ замѣтимъ, что x и y можно принимать
простыми между собою; дѣйствительно, если
бы x и y имѣли общаго дѣлителя, напримѣръ λ ,
то получили бы $x = \lambda x'$, $y = \lambda y'$, и слѣдова-
тельно

$$(\lambda x')^2 + (\lambda y')^2 = \lambda^2 (x'^2 + y'^2) = z^2;$$

изъ этого уравненія видимъ, что z^2 долженъ дѣ-
литься безъ остатка на λ^2 , почему $z = \lambda z'$, и
первоначальное уравненіе $x^2 + y^2 = z^2$ приметъ
видъ $x'^2 + y'^2 = z'^2$, въ которомъ величины x' ,
 y' и z' просты между собою. И такъ, поло-
жимъ прямо что количества x , y и z , удовле-
творяющія уравненію $x^2 + y^2 = z^2$, не имѣютъ ни-
какого общаго дѣлителя. Сверхъ того замѣ-
тимъ, что одно изъ чиселъ x или y будетъ
чѣтное, а другое нечѣтное; оба чѣтными не
могутъ быть, ибо въ такомъ случаѣ они имѣли
бы общаго дѣлителя 2, что противно предпо-
ложенію, а нечѣтными потому что сумма ква-
дратовъ двухъ нечѣтныхъ чиселъ $(2k+1)^2 +$
 $(2k'+1)^2 = 4(k^2 + k'^2 + k + k') + 2$ не можетъ быть
квадратнымъ числомъ, ибо дѣлился только на
2, а не дѣлился на 4. Пусть будемъ x нечѣт-
ное, а y чѣтное число, и положимъ $x = x + \frac{p}{q} y$,

разумѣя подъ $\frac{p}{q}$ несократимую дробь; получимъ

$$x^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{q} y\right)^2 = x^2 + \frac{2pxy}{q} + \frac{p^2 y^2}{q^2},$$

откуда

$$\frac{p}{q} = \frac{q^2 - p^2}{2pq}.$$

Такъ какъ по предположенію p и q не имѣютъ
никакого общаго дѣлителя, то дробь $\frac{q^2 - p^2}{pq}$ бу-
детъ несократимая; сверхъ того замѣтимъ,
что числа p и q не могутъ быть оба нечѣт-
ныя, ибо тогда разность $q^2 - p^2$ дѣлилась бы
на 4, и, по сокращеніи на 2, остался бы множи-
тель 2 въ числитель, чего не должно быть по
причинѣ x нечѣтнаго. И такъ, одно изъ чиселъ
 p или q чѣтное, а другое нечѣтное, почему числи-
тель $q^2 - p^2$ не дѣлился на 2, и вся дробь $\frac{q^2 - p^2}{2pq}$
несократимая. Слѣдовательно

$$x = q^2 - p^2, \quad y = 2pq,$$

$$z = x + \frac{p}{q} y = q^2 - p^2 + \frac{p}{q} \cdot 2pq = p^2 + q^2.$$

Вотъ общее рѣшеніе уравненія $x^2 + y^2 = z^2$

въ цѣлыхъ числахъ. Величины p и q , какъ уже сказано выше, изображаютъ цѣлыя числа, изъ которыхъ одно чѣтное, а другое нечѣтное; сверхъ того предполагается, что дробь $\frac{p}{q}$ несокращаема, то есть, что числа p и q не имѣютъ никакого общаго дѣлителя.

Пологая послѣдовательно

$$\begin{array}{ll} p=1, q=2 \text{ получимъ } x=3, y=4, z=5 \\ p=1, q=4 \dots\dots\dots x=15, y=8, z=17 \\ p=2, q=3 \dots\dots\dots x=5, y=12, z=13 \\ p=3, q=4 \dots\dots\dots x=7, y=24, z=25 \\ \text{и проч.} \qquad\qquad\qquad \text{и проч.} \end{array}$$

Задача 2. Решить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе $x^2 - Ay^2 = z^2$, гдѣ подъ A разумѣемъ какое ни есть цѣлое число, положительное или отрицательное, но только не квадратное.

Разлагаемъ сумму $x^2 - Ay^2$ на два множителя, и получаемъ

$$(x + y\sqrt{A})(x - y\sqrt{A}) = z^2.$$

Если, подобно предыдущему, положимъ что числа x , y и z не имѣютъ общаго дѣлителя, то и суммы $x + y\sqrt{A}$, $x - y\sqrt{A}$ будутъ простыми между собою, и слѣдовательно каждая изъ нихъ будетъ оцѣлкою равнявшася квадрату. Изобразивъ чрезъ $(p + q\sqrt{A})^2$ квадраты, которому равняется выраженіе $x + y\sqrt{A}$, получимъ

$$x + y\sqrt{A} = (p + q\sqrt{A})^2 = p^2 + Aq^2 + 2pq\sqrt{A};$$

количества p и q , какъ въ предыдущей задачѣ, изображаютъ два цѣлыя числа, простые между собою. Но \sqrt{A} есть число ирраціональное или даже мнимое, смотря по тому, будетъ ли A положительное или отрицательное; слѣдовательно, по причинѣ x , y , p и q цѣлыхъ, послѣднее уравненіе доставитъ

$$x = p^2 + Aq^2, \quad y = 2pq,$$

и сверхъ того

$$z^2 = (p^2 + Aq^2)^2 - A(2pq)^2 = (p^2 - Aq^2)^2,$$

откуда

$$z = p^2 - Aq^2.$$

Для примѣра, возьмемъ неопредѣленную формулу $x^2 - 5y^2 = z^2$, въ которой $A=5$; получимъ

$$x = p^2 + 5q^2, \quad y = 2pq, \quad z = p^2 - 5q^2.$$

Положимъ $p=4$, $q=1$, найдемъ

$$x=24, \quad y=8, \quad z=11,$$

и дѣйствительно: $24^2 - 5 \cdot 8^2 = 121 = 11^2$.

Пусть будетъ еще уравненіе $x^2 + 7y^2 = z^2$, въ которомъ $A=-7$; слѣдовательно получимъ

$$x = p^2 - 7q^2, \quad y = 2pq, \quad z = p^2 + 7q^2.$$

Положивъ $p=2$, $q=1$, найдемъ

$$x=-5, \quad y=4, \quad z=11.$$

Очевидно, что вышло отрицательной величины для x , можемъ допустить положительную. И такъ: $x=5$, $y=4$, $z=11$, что и справедливо, ибо $5^2 + 7 \cdot 4^2 = 121 = 11^2$.

Задача 3. Решить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе $x^2 + Ay^2 = z^2$, въ которомъ A изображаетъ произвольное цѣлое число, положительное или отрицательное.

Положимъ что x , y и z не имѣютъ никакого общаго дѣлителя, и представимъ $x^2 + Ay^2$ въ видѣ $(x + y\sqrt{-A})(x - y\sqrt{-A})$; такъ какъ выраженія $x + y\sqrt{-A}$ и $x - y\sqrt{-A}$ будутъ простыми между собою, то и должно имѣть

$$x + y\sqrt{-A} = (p + q\sqrt{-A})^2,$$

разумѣя подъ p и q числа цѣлыя, также простые между собою. Это уравненіе, по разложеніи второй его части, приметъ видъ

$$x + y\sqrt{-A} = p^2 - 3Apq^2 + (3p^2q - Aq^3)\sqrt{-A};$$

уравнивъ x рациональной части, а $y\sqrt{-A}$ ирраціональной или мнимой, получимъ

$$x = p^2 - 3Apq^2, \quad y = 3p^2q - Aq^3,$$

и слѣдовательно

$$z = p^2 + Aq^2.$$

Пусть $A=1$; получимъ слѣдующія рѣшенія уравненія $x^2 + y^2 = z^2$:

$$x = p^2 - 3pq^2, \quad y = 3p^2q - q^3, \quad z = p^2 + q^2.$$

Принявъ, напримѣръ, $p=2$, $q=1$, найдемъ: $x=2$, $y=11$, $z=5$; и дѣйствительно $2^2 + 11^2 = 125 = 5^3$.

Положимъ еще $A=2$; рѣшенія уравненія $x^2 + 2y^2 = z^2$ опредѣлятся формулами

$$x = p^2 - 6pq^2, \quad y = 3p^2q - 2q^3, \quad z = p^2 + 2q^2.$$

Если бы искали рѣшенія неопредѣленнаго уравненія съ двумя независимыми

$$x^2 + 2 = z^2,$$

или, что все равно, имѣли бы въ виду опредѣлить такіа квадраты числа, которыя, будучи сложены съ 2, доставляли бы кубы, то надлежало бы положить $y = \pm 1$, то есть..... $3p^2q - 2q^3 = \pm 1$; написавъ это уравненіе въ видѣ $(3p^2 - 2q^2)q = \pm 1$, заключаемъ, что $q = \pm 1$, и

следовательно $3p^2 - 2 = \pm 1$, откуда $p = \pm 1$ и $p = \pm \sqrt[3]{3}$; последнее значение p , как иррациональное, должно быть откинуто. И такъ, остаются только значения $p = \pm 1$; подставляя эти величины въ уравненіе $x = p^3 - 6pq^2$, а также $+1$ на мѣсто q^2 , получимъ $x = \pm(1-6) = \mp 5$, или, удержавъ только положительную величину, $x = 5$. Действительно, $5^2 + 2 = 27 = 3^3$. И такъ, {кромя квадратнаго числа 25, нѣтъ другого, которое, будучи сложено съ 2, доспавало бы кубичное число. —

Диофантовъ Анализъ, то есть способъ для приведенія ирраціональныхъ выраженій къ раціональнымъ, полезенъ и въ Интегральномъ Ичисленіи. См. INTÉGRAL (CALCUL), BINOMES (DIFFÉRENTIELLES) и проч.

Для полаго изученія Диофантова Анализа можно руководствоваться слѣдующими сочиненіями: изданіями *Диофанта*, о которыхъ упомянуто въ началѣ этой статьи; *Disquisitiones Arithmeticae*, *Gauß*; *Théorie des nombres*, *Легжандра*, и преимущественно вторымъ томомъ *Алгебры Эйлера*.

DIOPTRÉS. ДИОПТРЫ. Узкія скважины или небольшие круглыя отверстія, дѣлаемыя на визирахъ (pinules), то есть на дощечкахъ, опытно посматриваемыхъ на обоихъ концахъ алидады. Смотри сквозь діоптры, и наводя такимъ образомъ алидаду на различные предметы, опредѣляемъ направленія, на которыхъ эти предметы находятся. См. ALIDADE, GRAPHOMÈTRE, PLANCHETTE и проч.

DIOPTRIQUE. ДИОПТРИКА. Отъ Греческ. *dió*, *сквозь* и *dioptra*, *визиръ*. Часть Оптики, занимающаяся законами преломленія свѣта. Эта наука называлась прежде *Анаклатикой* (*Anacлатique*).

Всѣ тѣла воздухообразныя, значительная часть жидкихъ, и весьма многія твердыя тѣла, одарены свойствомъ пропускать лучи свѣта, почему и называются *тѣлами прозрачными* (*corps transparents, diaphanes*). Большая часть изъ нихъ просто *преломляютъ* свѣтъ, то есть, лучи свѣта, проходя сквозь сія тѣла, не раздѣляются. Это явленіе называется *простымъ преломленіемъ*. Но есть и такія тѣла, въ которыхъ лучи свѣта раздѣляются на двѣ кисти. Такое свойство свѣта, замѣченное еще въ 1669 году

Датскимъ математикомъ *Бартолиномъ*, извѣстно подъ наименованіемъ *двойнаго преломленія*; оно обнаруживается въ тѣлахъ окристаллованныхъ, коихъ первообразная форма не есть ни кубъ, ни правильный осмигранникъ.

Всякій лучъ свѣта, переходящій косвенно изъ одной прозрачной среды въ другую, болѣе или менѣе плотную, *преломляется*, то есть уклоняется отъ начальнаго своего направленія. Положимъ что чрезъ точку, въ которой лучъ встрѣтилъ вторую среду, проведена нормальная линія къ преломляющей поверхности; лучъ свѣта, по преломленіи, приблизится или удалился отъ этой нормали смотря по тому, будетъ ли среда, въ которую онъ входитъ, плотнѣе или рѣже той, изъ которой вышелъ.

Назовемъ *угломъ паденія* (*angle d'incidence*) уголъ *IMN* (черп. 3 Листъ VIII), составляемый лучемъ *IM*, падающимъ на преломляющую поверхность *AMB*, съ нормалью *LMN*, проведенною въ точкѣ *M* къ этой самой поверхности. Если чрезъ направленіе *IM* и нормаль *LMN* вообразимъ плоскость, то преломленный лучъ останется въ этой плоскости, но не пойдетъ по продолженію направленію *MI'*, когда разсматриваемыя двѣ среды будутъ имѣть различныя плотности. Если нижняя среда, то есть та, въ которую входитъ лучъ, будетъ плотнѣе, то онъ по преломленіи приблизится къ нормали, и пойдетъ по *MR*; напротивъ того, если верхняя среда плотнѣе, то лучъ удалится отъ нормали, и направится по *MR'*. Въ томъ и другомъ предположеніи уголъ *LMR* или *LMR'* называется *угломъ преломленія* (*angle de réfraction*). Основной законъ Диоптрики состоитъ въ томъ, что *отношеніе синуса угла паденія къ синусу угла преломленія есть постоянное величина, каково бы ни было первоначальное направленіе падающаго луча*. Это постоянное отношеніе синусовъ называется *показателемъ преломленія* (*rapport de réfraction*). Итоны, Малюсъ, Воластонъ, Фраунгоферъ, Бiotъ, Араго и другіе физики произвели весьма много опытовъ для опредѣленія показателя преломленія при различныхъ средахъ. Вообще замѣчено, что большая или меньшая степень преломляемости зависитъ немного отъ плотности прозрачнаго тѣла, но и отъ химическихъ его свойствъ.

Читатели найдут почти во всех курсах Физики таблицы показателей преломления для разных срединь.

Хотя первую мысль о преломлении света приписывают знаменитому *Шотландцу*, жившему во втором столетии по Р. Х.*), но достоверно, что Диоптрика, до конца XVI века, не получила никакого приращения, но крайней мере в теоретическом отношении. В конце XVI столетия *Антоний де Доминис*, первый предпринявший объяснение образования радуги преломлением солнечного света в дождевых каплях. *Кеплер* и *Декарт*, современники *Антония де Доминиса*, производили многочисленные опыты с целью найти законы преломления света; но усилия их не имели успеха. *Снелл* (*Snellius*), Голландский математик, живший в половине XVII столетия, открыл вновь законы, соотношений, как сказано выше, в пропорциональности синусов углов падения к синусам углов преломления. Впоследствии многие математики и физики занимались усовершенствованием Диоптрики; примечательнейшие из них: *Барроу*, *Ньютон*, *Гуенс*, *Гершель*, *Шмитт*. В новейшие времена особенного внимания заслуживают исследования о двойном преломлении *Малюса*, *Бюта*, *Френеля* и *Волластона*.

Читатели могут почерпнуть некоторые сведения об Диоптрике в словах: ACHROMATIQUE, ARC-EN CIEL, COULEUR, DIACAUSTIQUE, LENTILLE, MICROSCOPE, RÉFRACTION, TÉLESCOPE, VERRE и проч. См. также LUMIÈRE, OPTIQUE.

ДИОПТРИКЕ. ДИОПТРИЧЕСКИЙ. Относящийся к Диоптрике; происходящий чрез преломление лучей. *Télescope dioptrique*; *диоптрический телескоп*. Телескоп составленный из одних стекол, и следовательно основанный на законе преломления света; говорится в противоположность *катадиоптрического* телескопа, устройство которого основано на законах преломления и отражения света; поэтому катадиоптрические телескопы и составлены из стекол и зеркал.

DIORISME. DÉTERMINATION, DISCUSSION.

ДИОРИЗМЪ. Разборъ. При решении задачи,

сверхъ Анализа и Синтеза, Греческие геометры разсматривали еще третию часть суждения, которую называли *диоризмомъ*. Диоризмъ состоялъ въ подробномъ разборѣ различныхъ случаевъ, къ которымъ приводило найденное решение задачи, и поному принадлежалъ къ числу приемовъ аналитическихъ. См. ANALYSE.

DIPLANTIDIENNE (LUNETTE). (Опш.) **ДВУ-ПРЕДМЕТНАЯ ТРУБА.** Зрительная труба о двухъ предметныхъ стеклахъ. Посредствомъ этой трубы наблюдаемый предметъ усматривается *двойнымъ*: одно изображение въ прямомъ, а другое въ опрокинутомъ положеніи. Этого снарядъ изобрѣтенъ аспрономомъ *Жора* (*Jean-gal*), и описанъ имъ въ *Mémoires de l'Académie* за 1779 годъ.

DIRECT. (Анал.) ПРЯМОЙ. *Rapport direct* или *raison directe*; *прямое отношение*, *прямое со-держаніе*. Когда отношение $\frac{A}{B}$ двухъ количествъ *A* и *B* есть постоянное, то говоримъ, что они въ *прямомъ отношеніи* одно къ другому. Если же произведение *AB* постоянно, то *A* и *B* будутъ находиться между собою въ *обратномъ отношеніи* (*rapport inverse*). Напримѣръ, пусть будетъ *φ* сила тяготѣнія, *m* и *m'* массы взаимно притягивающихся шѣлъ, а *ρ* взаимное ихъ разстояние; извѣстно, что отношеніе $\frac{φ m^2}{m m'}$ будетъ постоянное, а это значить, что *сила тяготѣнія дѣйствуетъ въ прямомъ отношеніи массъ и въ обратномъ квадрата ихъ взаимнаго разстоянія*. — Подъ *quantité directe* (прямое количество) некоторые авторы разумѣютъ *количество положительное*; въ такомъ случаѣ *quantité inverse* (обратное количество) принимается уже въ смыслѣ отрицательной величины.

DIRECT. (Астр. Мех. Опш.) ПРЯМОЙ. Когда планета движется отъ запада къ востоку, то есть, по порядку зодіакальныхъ знаковъ, то говоримъ, что она имѣетъ *прямое* или *поступательное движеніе* (*mouvement direct*). Стояніе (*station*) планеты бываетъ въ то время, когда она представляется какъ неподвижною. Наконецъ, говоримъ, что планета имѣетъ *возвратное движеніе* (*mouvement rétrograde*), когда по видимому она движется противъ порядка зодіа-

*) См. Histoire des Mathématiques par Montucla. T. I. стр. 312 (Париж 1759—1802 г.)

кальных знаковъ, то есть отъ востока къ западу. — Въ Механикѣ *mouvement direct* значить прямое, прямолинейное, прямонаправленное движение. *Choc direct*, прямой ударъ; СМОТ. СНОС. — Въ Оптикѣ, *прямые* или непосредственные видѣніи (*vision directe*) предмета, называется видѣніе, происходящее отъ дѣйствія *прямыхъ* лучей свѣта на органъ зрѣнія. Подъ *прямыми* лугами разужемъ такіе, которые идутъ непосредственно отъ предмета къ нашему глазу, въ противоположность лучамъ, достигающимъ до него чрезъ отраженіе или преломленіе.

DIRECTE (PROPOSITION). ПРЯМОЕ ПРЕДЛОЖЕНІЕ. СМОТ. PROPOSITION.

DIRECTEMENT OPPOSES. (Геом. и Мех.) **ПРЯМОПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ, ПРЯМОПРОТИВНЫЕ.** *Dropes directement opposées*; *прямопротивоположныя прямая*, то есть двѣ прямыя, примыкающія одна къ другой, и составляющія одну и ту же линію. — *Forces directement opposées*; *прямопротивоположныя силы*. Силы, дѣйствующія по одной и той же прямой, но въ противоположныя стороны.

DIRECTEUR. (Геом.) **НАПРАВЛЯЮЩИЙ.** *Cercle directeur*; *направляющій кругъ*. *Courbe directrice*; *направляющая кривая*. СМОТ. DIRECTRICE.

DIRECTION. (Геом. и Мех.) **НАПРАВЛЕНІЕ.** *Direction oblique*; *косвенное направленіе*. *Ces trois points se trouvent dans la même direction*; *эти три точки находятся на одномъ направленіи*, то есть, расположены по одной прямой линіи. — *Direction d'une force*; *направленіе силы*. Прямая, по направленію которой сила дѣйствуетъ или спрессована дѣйствовать.

DIRECTION или SIGNE DE DIRECTION. **НАПРАВЛЕНІЕ ТЯЖЕСТИ.** Такъ называли прежде авторы прямую, проходящую чрезъ средоточіе земли и центръ тяжести разсматриваемаго тѣла.

ANGLE DE DIRECTION. **УГОЛЪ НАПРАВЛЕНІЯ, УГОЛЪ СЛѢД.** Уголъ, составляемый двумя пересекающимися силами.

DIRECTION DE L'AIGUILLE AIMANTÉE. **НАПРАВЛЕНІЕ МАГНИТНОЙ СТРЕЛКИ.** СМОТ. BOUSSOLE, MAGNÉTISME.

DIRECTRICE. (Геом.) **НАПРАВЛЯЮЩАЯ; НАПРАВЛЯТЕЛЬНИЦА.** Въ обширномъ смыслѣ, линія прямая или кривая, по которой движется другая линія или поверхность, образующія при такомъ движеніи: первая — плоскую или кривую поверхность, а вторая — геометрическое тѣло. ↓

Въ Коническихъ Сѣченіяхъ *направляющая* есть прямая линія, коей положеніе опредѣляется по условію слѣдующей задачи: *изъясн. кривая линія OMS* (черт. 10 Листъ VIII) *такого свойства, чтобы разстоянія MF и MQ каждой ея точки M отъ постоянной точки F и отъ неподвижной прямой AB, относились между собою какъ два данныя числа m и n.* Кривая, удовлетворяющая этому требованію, будетъ принадлежать къ роду коническихъ; ось ея совмѣстится съ прямою *CX*, перпендикулярною къ *AB*, фокусъ — съ данною точкою *F*, а вершина — съ точкою *O*, въ которой разстояніе *FC* раздѣлено въ отношеніи *m* къ *n*. Неподвижная прямая *AB*, въ отношеніи найденной кривой, называется ея *направляющею*.

Мы сказали, что искома кривая будетъ коническая; и дѣйствительно, раздѣлимъ линію *FC*, то есть перпендикулярное разстояніе данной точки отъ данной прямой въ отношеніи *m:n*. Пусть будетъ *O* точка дѣленія, и положимъ *OF = m*, *OC = n*. Сверхъ того, проведемъ прямоугольныя координатныя оси *OX*, *OY*, и изобразимъ *OP* чрезъ *x*, а *PM* чрезъ *y*. По условію вопроса найдемъ

$$\overline{MF} : \overline{MQ} :: m : n;$$

$$\text{но } \overline{MF} = \sqrt{FP^2 + \overline{PM}^2} = \sqrt{(x-m)^2 + y^2},$$

$$\text{а } \overline{MQ} = \overline{PC} = n + x;$$

слѣдовательно

$$\sqrt{(x-m)^2 + y^2} : n + x :: m : n,$$

откуда

$$n\sqrt{(x-m)^2 + y^2} = m(n+x),$$

или, по возвышеніи въ квадраты и по сокращеніи,

$$y^2 = \frac{2m(m+n)}{n}x + \frac{m^2-n^2}{n^2}x^2.$$

Это уравненіе, какъ извѣстно, принадлежитъ конической кривой; начало координатъ совпа-

дасть съ ея вершиною, а ось x -овъ, съ осью кривой.

Если сравнимъ предыдущее уравненіе съ каждаымъ изъ трехъ слѣдующихъ:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2)$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax + x^2)$$

$$y^2 = px,$$

принадлежащихъ эллипсу, гиперболѣ и параболѣ, то найдемъ:

Для эллипса: $\frac{m^2 - n^2}{n^2} = -\frac{b^2}{a^2}$, откуда $\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

Для гиперболы: $\frac{m^2 - n^2}{n^2} = +\frac{b^2}{a^2}$, откуда $\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

Для параболы: $\frac{m^2 - n^2}{n^2} = 0$, откуда $\frac{m}{n} = 1$.

Мы не будемъ останавливаться на разборѣ сихъ трехъ случаевъ, не представляющемъ никакого затрудненія. Скажемъ только, что для эллипса, а равно и для гиперболы, существуютъ двѣ направляющія, а для параболы только одна.

Свойство параболы относительно ея направляющей, доставляетъ весьма простой способъ для начертенія этой кривой посредствомъ непрерывнаго движенія. И въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ BL направляющая параболы GAN (черт. 11 Листъ VIII). Присланивъ къ лансѣтѣ, совпадающей съ прямою BL , наугольникъ EQR спороною QR , и возьмемъ нитъ, равную по длинѣ своей линіи EQ , прикрѣпимъ ее однимъ концомъ въ пунктѣ E , а другимъ въ фокусѣ F параболы; потомъ спланимъ накладывать нитъ посредствомъ иглы или карандаша, прикасающаго къ линіи EQ въ пунктѣ M . Двигая теперь наугольникъ по линіи направляющей такъ чтобы иглы скользила по EQ , окажется, что конецъ ея опишетъ параболу, ибо, при такомъ движеніи, линія FM будетъ постоянно равна линіи MQ , что и должно быть по свойству параболы.

Читатели найдутъ во многихъ мѣстахъ нашего Лексикона разныя подробности о направляющихъ. Смот. между прочимъ слѣдующія: CONIQUE, CYLINDRIQUE, GAUCHE, SURFACE.

DISCONTIGUE (FONCTION). ПЕРЫВАЮЩАЯСЯ ФУНКЦІЯ. Смот. CONTIGUE (FONCTION).

DISCONTINU. ПЕРЫВНЫЙ. *Fonction, proportion discontinue; прерывная функція, пропорція.* Смот. CONTINUE (FONCTION), DISCRÈTE.

DISCONTINUITÉ. ПЕРЫВНОСТЬ. Смот. CONTINUE (FONCTION).

DISCRÈTE. (Ариф.) ПЕРЫВНАЯ. *Proportion discrète, disjointe, или, употребительнѣе, discontinue; прерывная, прерывающаяся пропорція;* такая пропорція, въ которой средніе члены не равны между собою. Таковы, напримѣръ, геометрическая $6:8::3:4$ и арифметическая $7-5=8-4$. Напримѣръ того, пропорція $3.6::6.12::12.24$, или, что все равно, $3:6::6:12::12:24$, въ которой члены сохраняющіе послѣдовательную пропорціональность, есть *непрерывная (proportion continue)*. Такого же свойства и арифметическая пропорція $\div 20.17.14.11$. Смот. PROPORTION.

QUANTITÉ DISCRÈTE или DISCONTINUE. ПЕРЫВНОЕ, РАЗЪЕДИНЕННОЕ КОЛИЧЕСТВО. Такъ называется количество, составленное изъ отдѣльныхъ частей, не подлежащихъ закону непрерывности. Такъ напримѣръ число есть *количество прерывное*, потому что оно состоитъ изъ отдѣльныхъ единицъ. Напримѣръ того, величина, разсѣпанная въ видѣ непрерывнаго, называется *непрерывнымъ количествомъ (quantité continue)*. И такъ, разстояніе между двумя точками, поверхность, определяющая видъ и протѣканіе какого либо тѣла, суть *величины непрерывныя*, ибо каждая изъ нихъ принимается за одно цѣлое, сплошное, безъ различія его частей. Смот. GRANDEUR.

DISCUTER или ANALYSER UNE COURBE. ДѢЛАТЬ РАЗБОРЪ КРИВОЙ. Смот. ниже.

DISCUSSION D'UNE COURBE. (Геом.) РАЗБОРЪ КРИВОЙ. Исследование различныхъ свойствъ кривой линіи, какъ то: опредѣленіе ея вида, разысканіе особенныхъ точекъ, проведеніе къ ней касательныхъ, нормалей и проч. Смот. COURBE.

DISGRÉGATION. Уст. выраж. То же что DISPERSSION DES COULEURS (Смот.).

DISJOINT. РАЗЪЕДИНЕННЫЙ, ПЕРЫВНЫЙ. *Masses disjointes; разединенныя, несоприкасающіяся.*

венная масса *Proportion disjointe*; прерывная пропорция. Смол. DISCRETE.

DISPARAITRE (FAIRE). (Астр.) УНИЧТОЖИТЬ, ОСВОБОДИТЬСЯ. *Faire disparaître les quantités irrationnelles, les dénominateurs des fractions. Уничтожить иррациональные количества, освободиться от иррациональностей, от знаменателей.*

DISPERSIF (POUVOIR). (Опш.) СИЛА СЪТОРАЗЪЯНІЯ. Сила съторазъянія какого либо прозрачнаго тѣла вътрѣшеніи отношеніемъ угла съторазъянія (Смол. ниже) къ углу уклоненія луча средней преломляемости отъ первоначальнаго его направленія. Читатели найдутъ во многихъ курсахъ Физики таблицы численныхъ величинъ этой силы для разныхъ веществъ.

DISPERSION DES COULEURS, DE LA LUMIÈRE. (Опш.) РАЗЪЯНЕНІЕ цвѣтныхъ лучей, съторазъяненіе. Уклоненіе различныхъ цвѣтныхъ лучей отъ первоначальнаго ихъ направленія, когда они преломляются по выходѣ изъ какого либо прозрачнаго тѣла, напримѣръ изъ стеклянной призмѣ. Величина съторазъяненія опредѣляется угломъ, составленнымъ направленіями наиболѣе и наименѣе преломляющихся цвѣтныхъ лучей, то есть фиолетоваго и краснаго, или еще разностию показателей преломленія этихъ самыхъ лучей. И такъ, на чертѣ 3 (Листъ VI), уголъ съторазъяненія есть *bac*. Смол. COULEUR.

DISPOSER DES QUANTITÉS. (Анал.) РАСПОЛАГАТЬ величинами. Давать неопредѣленнымъ количествамъ значенія, сообразныя съ предполагаемою цѣлю. Напримѣръ, если бы требовалось рѣшить уравненія

$$ax + by = c \text{ и } a'x + b'y = c';$$

то помноживъ второе изъ нихъ на неопредѣленную величину λ , и взявъ потомъ ихъ сумму, получили бы

$$a + \lambda a' x + (b + \lambda b') y = c + \lambda c'.$$

Такъ какъ количество λ неопредѣленное, то мы можемъ *располагать* имъ по произволу. Если имѣть въ виду опредѣлить неизвѣстную x , то приравняемъ $b + \lambda b' = 0$ или $\lambda = -\frac{b}{b'}$, и

находимъ

$$x = \frac{bc - b'c'}{ab' - a'b}.$$

Для опредѣленія неизвѣстной y , располагаемъ величиною λ другимъ образомъ, а именно, полагаемъ $a + \lambda a' = 0$, откуда $\lambda = -\frac{a}{a'}$, и получаемъ

$$y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}.$$

DISQUE. (Астр. и Опт.) ДИСКЪ, КРУГЪ. Астрономы разумѣютъ подъ *дискомъ солнца* или *луны* плоскій кругъ, въ видѣ котораго каждое изъ сихъ тѣлъ представляется глазу зрителя. Ширина диска, какъ солнечнаго такъ и луннаго, раздѣляется на 12 равныхъ частей, называемыхъ *дойками* (*doigts*). Величину записный часто опредѣляютъ числомъ такихъ дойковъ. — Слово *disque* употреблялось также прежними оптиками въ одномъ смыслѣ съ *ouverture* (*отверстіе*), *champ d'une lunette* (*поле трубы*).

DISQUE HORAIRE, DISQUE D'ARISTARQUE. (Гном.) Часовой, Аристарховъ дискъ. Родъ солнечныхъ часовъ, бывшихъ некогда въ употребленіи.

DISSEMBLABLE. (Геом. и Теор. Чис.) НЕПОДОБНЫЙ. Противопологается прилагательному *подобный*. *Triangles dissemblables*; *треугольники неподобные*, то есть такіе, у которыхъ углы не равны соответственно. — *Transformations semblables, dissemblables*; *подобныя, неподобныя преобразованія*. Наименованія, употребляемыя Гауссомъ въ теоріи видовъ второй степени; (Смол. его сочиненіе *Disquisitiones arithmeticae*, N°. 159).

DISSIMILAIRE. РАЗНОРОДНЫЙ. Смол. HÉTÉROGENE.

DISTANCE. (Геом.) РАЗСТОЯНІЕ. Собственно, кратчайшій путь между двумя предметами. И такъ, разстояніе одной точки отъ другой опредѣляется прямою линіею, соединяющею эти двѣ точки; разстояніе точки отъ какой либо поверхности измѣряется перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ данной точки на эту поверхность.

Въ Практической Геометріи разстояніа между предметами измѣряются или непосредственно, употребляя на сей конецъ межевую цѣпь, сажень

и проч., или помощью тригонометрических приёмов. В последнем случае предполагается, что предварительно измерено на землѣ основаніе, и определены углы, заключающіеся между лучами зрѣнія, направленными къ предметамъ изъ крайнихъ точекъ основанія. Для дальнѣйшихъ подробностей отсылаемъ къ статьямъ: ARPENTAGE, BASE, CHAÎNE, GRAPHOMÈTRE, PLANCHETTE.

DISTANCES (CENTRE DES MOYENNES). Центрѣ среднихъ разстояній. Смол. CENTRE.

DISTANCE. (Астр.) **РАЗСТОЯНІЕ.** Это слово употребляется астрономами въ разныхъ значеніяхъ, а именно:

DISTANCE APPARENTE или ANGULAIRE. Видимымъ или угловымъ разстояніемъ двухъ свѣтилъ или какихъ ни есть точекъ небесной сферы, называется уголъ, заключающійся между лучами зрѣнія, проведенными отъ глаза наблюдателя къ этимъ двумъ свѣтиламъ или точкамъ. И такъ, *разстояніе звѣзды отъ полюса* есть дуга круга склоненія (выраженная въ градусахъ, минутахъ, секундахъ и проч.), заключающаяся между звѣздою и сѣвернымъ полюсомъ; дуга того же круга, заключающаяся между звѣздою и зенитомъ, называется *разстояніемъ отъ зенита*. Чтобы получить истинное угловое разстояніе, надобно освободить непосредственно наблюденный уголъ отъ дѣйствія преломленія и параллакса.

DISTANCE HORAIRE DE LA LUNE AU SOLEIL. Подъ часовымъ разстояніемъ луны отъ солнца разумѣютъ разность прямыхъ восхожденій сихъ двухъ свѣтилъ.

DISTANCE HORAIRE. Часовое разстояніе. Такъ называется въ Геономикѣ уголъ, составленный часовой линіею съ направлениемъ полуденной.

DISTANCES DES PLANÈTES AU SOLEIL. Разстоянія, удаленія планетъ отъ солнца можно изображать разнымъ образомъ: 1° Въ миляхъ, верстахъ и вообще посредствомъ какой либо употребительной мѣры. 2° Отношениемъ къ разстоянію произвольной планеты, напримѣръ земли, отъ солнца; въ такомъ случаѣ разстояніе земли отъ солнца принимаемъ

ся за единицу. Астрономы преимущественно употребляютъ второй способъ.

Такъ какъ планеты описываютъ около солнца орбиты эллиптическія, то разстоянія ихъ отъ этого свѣтила должны перемѣняться. Приводимъ здѣсь среднія разстоянія планетъ, выраженные въ числахъ разстоянія земли отъ солнца, которое равно 20666838 географическихъ миль. Во второмъ столбцѣ помѣщены ихъ же разстоянія въ миллионѣхъ верстъ.

ТАБЛИЦА СРЕДНИХЪ РАЗСТОЯНІЙ ПЛАНЕТЪ ОТЪ СОЛНЦА.

Планеты:	Пропорциональные разстоянія:	Въ верстахъ приблизительно:
☿ Меркурій ..	0,3870981	58 миллион.
♀ Венера	0,7233523	104 м.
♁ Земля	1,0000000	144 м.
♂ Марсъ	1,5236935	219 м.
♂ Веста	2,3730000	340 м.
♂ Юнона	2,6671650	384 м.
♀ Церера	2,7674060	398 м.
♂ Паллада	2,7675920	399 м.
♂ Юпитеръ ..	5,2027911	748 м.
♂ Сатурнъ ...	9,5587705	1371 м.
♂ Уранъ	19,1833050	2757 м.
С Среднее разстояніе луны отъ земли 51821 геогр. миль или 360594 версты.		

DISTANCE ASSOUCIÉE (по Латин. *distancia cur-tata*). Укращенное разстояніе есть проекція на плоскости эллиптика истиннаго разстоянія планетъ отъ солнца. Оно называется *укращеннымъ* или *укоротеннымъ* потому что всегда бываетъ менѣ истиннаго разстоянія. Смол. CURTATION.

DISTANCE APPARENTE DES OBJETS. (Опт.) **ВИДИМОЕ РАЗСТОЯНІЕ, УДАЛЕНІЕ ПРЕДМЕТОВЪ.** Хотя человѣческій глазъ и не можетъ съ точностію судить о разстояніяхъ предметовъ, даже не весьма отдаленныхъ, однакоже при видѣніи есть такіа ощущенія, которыя могутъ привесити насъ къ приблизительной оцѣнкѣ этихъ разстояній, или, по крайней мѣ-

рѣ, къ оптиченію большихъ отъ меньшихъ. Къ числу признаковъ, способствующихъ къ утвержденію нашихъ понятій объ разстояніяхъ предметовъ, принадлежатъ слѣдующія соображенія:

1°. Въ нормальномъ состояніи нашихъ глазъ, оси ихъ должны направляться къ предмету, на который смотримъ. Чѣмъ ближе отъ насъ предметъ, тѣмъ болѣе будетъ уголъ, составляемый двумя осями, и съ увеличеніемъ этого угла мы должны болѣе и болѣе сжимать зрачокъ; самое это усиліе обнаруживаетъ близость предмета.

2°. Степень освѣщенія, яркость красокъ и ясность изображенія на сетчатой оболочкѣ глаза уменьшаются съ увеличеніемъ разстоянія предмета.

3°. Видимая величина такихъ предметовъ, какъ истинные размѣры намъ известны, приводитъ насъ къ приближительной оцѣнкѣ ихъ разстояній.

4°. Изъ положенія предмета въ отношеніи къ другимъ, коихъ вѣданы положенія намъ известны, мы составляемъ себѣ понятіе, болѣе или менѣе вѣрное, объ его отдаленіи.

DISTANCE FOCALE. Фокусное разстояніе. Такъ называется разстояніе фокуса выпуклаго оптического стекла отъ ближайшей поверхности сего послѣдняго. Смол. **LENTILLE.**

DISTANCE EXPLOSIVE. (Физ.) **ДАЛЬНОСТЬ РАЗРЯДА, РАЗРЯЖЕНІЯ.** Наибольшее разстояніе, на которомъ наземноразованное тѣло сообщаетъ свое электричество посредствомъ искры дуговой шашки.

DISTANCE (BASE). (Оптика.) **РАЗСТОЯНІЕ ОБЪЕКТА ОТЪ ГЛАЗА.** Это выраженіе употреблялось прежними оптиками въ одномъ смыслѣ съ *фокуснымъ разстояніемъ*; Смол. **DISTANCE FOCAL.**

DISTRIBUTION DES EAUX. (Гидрав.) **РАЗДѢЛЪ, РАСПРЕДѢЛЕНІЕ ВОДЫ.** Раздѣленіе известнаго количества воды на части, пропорціональныя даннымъ числамъ. На практикѣ, эта задача приводится вообще къ слѣдующему:

Положимъ, что водохранилище снабжается водою посредствомъ водопроводной трубы или лѣній образомъ. Требуемъ сдѣлать въ стѣнѣ этого водохранилища известное число отвер-

стій, и опредѣлить ихъ диаметры по двумъ слѣдующимъ условіямъ: 1°. Чтобы количество воды, вытекающей изъ известнаго вѣтра изъ всѣхъ сихъ отверстій, равнялось количеству воды, доставляемой въ то же время водопроводною трубою. 2°. Чтобы частные расходы отверстій находились между собою въ известныхъ отношеніяхъ.

Читатели найдутъ подробное рѣшеніе этой задачи въ *Encyclopédie méthodique. Mathématique* (Том. 1 стр. 542).

DISTRIBUTIVES (FONCTIONS). (Анал.) **РАСПРЕДѢЛИТЕЛЬНЫЯ ФУНКЦІИ.** Смол. **COMMUTATIVES (FONCTIONS).**

DIURNE. (Астр.) **ДНЕВНОЙ. — СУТОЧНЫЙ.** *Arc diurne, дневная дуга*; Смол. **ARC.** — *Cercle diurne, суточный кругъ*; кругъ, параллельный экватору, описываемый заѣздомъ или какою ии есть точкою небесной сферы въ суточномъ ея движеніи. *Mouvement diurne de la terre, суточное движеніе земли.* Обращеніе земли около ея оси, совершающееся въ промежутокъ времени, равняющійся на 24 часа, и называемый *сутками*.

DIVERGENCE. (Геом. Анал. и Оптика.) **РАСХОЖДЕНІЕ, РАСХОДИМОСТЬ.** *Divergence de deux droites, des rayons visuels; расхождение, расходи́мость двухъ прямыхъ; расхожденіе лучей зрѣнія.* Состояніе двухъ прямыхъ или лучей зрѣнія, коихъ направленія удаляются одно отъ другаго. — **DIVERGENCE D'UNE SÉRIE; расходи́мость ряда.** Смол. **CONVERGENCE.**

DIVERGENCE (VERRE DE). Разсѣвательное стекло. Выгнутое оптическое стекло; выпуклое же называется *собирательнымъ* (*verre de convergence*) или *зажигательнымъ*. Смол. **LENTILLE.**

DIVERGENT. (Геом. Анал. и Оптика.) **РАСХОДЯЩІЙСЯ, УДАЛЯЮЩІЙСЯ.** *Droites divergentes, rayons divergents; расходящіяся прямыя, расходящіяся лучи. Série divergente; расходящійся рядъ.* Смол. **CONVERGENCE.**

DIVERGENTE (HYPERBOLE). Расходящаяся гипербола. Такъ называлъ *Нютонъ* гиперболу третьей степени, коей вѣтви расходятся, и проецируются въ пропавшія спороны. Въ томъ

же смыслъ онъ употребляетъ названіе *расходящейся параболы*.

DIVERSITÉ DE DIAMÈTRE. (Астр.) **РАЗНОСТЬ ДИАМЕТРА.** Такъ называлась въ древней Астрономіи дуга эклиптика, изображающая разность между уравненіемъ центра эпикла (prosthaphère de l'épicycle) въ перигей и его уравненіемъ въ апогей. *Итолемей* и *Коперникъ* называли эту дугу *excess* (*избытокъ*).

DIVIDENDE. (Ариэ.) **ДѢЛИМОЕ.** Смол. DIVISION — Въ Коммерціи — дивидендъ, доля, участокъ

DIVIDENDO. Смол. COMPOSITION.

DIVINATOIRE (ARITHMÉTIQUE). **ГАДАТЕЛЬНАЯ АРИТМЕТИКА.** Смол. ARITHMÉTIQUE AMUSANTE.

DIVISER. (Ариэ. и Геом.) **ДѢЛИТЬ, РАЗДѢЛИТЬ.** Смол. DIVISION. Въ Механическомъ Искусствѣ, *дѣлать на градусы*. Смол. GRADUER. *Machine à diviser*; *дѣлительная машина*. — *Diviser une droite en moyenne et extrême raison*; *раздѣлить прямую въ среднемъ и крайнемъ содержаніи*. Смол. EXTRÊME.

DIVISEUR. (Ариэ.) **ДѢЛИТЕЛЬ.** Число означающее на сколько частей дѣлимое должно быть раздѣлено. Смол. DIVISION.

DIVISEURS PREMIERS или SIMPLES. **Простые, первые дѣлители.** Простыя числа, раздѣляющія на-цѣло данное цѣлое число. И такъ, простые дѣлители числа 60 суть 2, 3, 5. Смол. PREMIER (NOMBRE). *Сложныя дѣлители (diviseurs composés)* того же числа будутъ: 4, 6, 10, 12, 15, 20, 30.

Всякое цѣлое число N можетъ быть изображено произведеніемъ $a^p b^q c^r \dots$, въ которомъ $a, b, c \dots$ означаютъ простыя числа, а $p, q, r \dots$ цѣлые показатели. И такъ, число 1176 равно произведенію $2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$; въ этомъ частномъ случаѣ имѣемъ $a=2, b=3, c=7, p=3, q=1, r=2$.

Ясно, что каждый изъ дѣлителей числа $N = a^p b^q c^r \dots$ будетъ вида $a^l b^m c^n \dots$, разумѣя подъ $l, m, n \dots$ числа, не превосходящія $p, q, r \dots$. Слѣдовательно все дѣлители числа N , включая сюда и само число N , изобразятся последовательными членами разложенія

$$(1+a+a^2+\dots+a^p)(1+b+b^2+\dots+b^q)(1+c+c^2+\dots+c^r)\dots$$

Если означимъ чрезъ P число этихъ членовъ, или, что все равно, число всехъ дѣлителей N , то получимъ

$$(1) \quad P = (p+1)(q+1)(r+1)\dots$$

Сверхъ того, мыслѣ будетъ

$$S = (1+a+\dots+a^p)(1+b+\dots+b^q)(1+c+\dots+c^r)\dots; \text{ найдемся}$$

$$(2) \quad S = \frac{a^{p+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{q+1}-1}{b-1} \cdot \frac{c^{r+1}-1}{c-1} \dots$$

Величина S изображаетъ сумму всехъ дѣлителей числа N . Приложивъ формулы (1) и (2) къ числу $N=1176=2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$, для котораго $a=2, b=3, c=7, p=3, q=1, r=2$, получимъ

$$P = (3+1)(1+1)(2+1) = 24$$

$$S = \frac{2^4-1}{2-1} \cdot \frac{3^2-1}{3-1} \cdot \frac{7^3-1}{7-1} = 15 \cdot 4 \cdot 57 = 3420.$$

DIVISEUR LINÉAIRE. **Линейный дѣлитель, дѣлитель первой степени.** Алгебраическое выраженіе или число вида $ax+b$, дѣлящее на-цѣло какую либо функцію количества x или вообще какую ни есть формулу.

DIVISEUR QUADRATIQUE. **Квадратичный дѣлитель, дѣлитель второй степени.** Выраженіе или число вида $ax^2+bx+cy^2$, раздѣляющее на-цѣло какую либо функцію количествъ x и y или вообще известную формулу.

Соммун-дѣлитель. **Общій дѣлитель.** Общимъ дѣлителемъ двухъ или нѣсколькихъ предложенныхъ цѣлыхъ чиселъ называется такое число, которое раздѣляется на-цѣло все данныя числа. То же самое должно разумѣть и объ общемъ дѣлителѣ двухъ или нѣсколькихъ алгебраическихъ выраженій. И такъ, общіе дѣлители чиселъ 60 и 42 будутъ 2, 3 и 6, а общіе дѣлители выраженій $x^3+bx^2-a^2x-a^2b$ и x^3-a^2x суть: $x-a, x+a$ и x^2-a^2 . Наибольшій изъ всехъ общихъ дѣлителей называется *наибольшимъ общимъ дѣлителемъ* (*le plus grand commun diviseur*). И такъ, наибольшій общій дѣлитель данныхъ чиселъ или алгебраическихъ выраженій есть тотъ изъ общихъ дѣлителей, который дѣлится на-цѣло на все остальные. Таковы количества 6 и x^2-a^2 въ приведенныхъ сей-часъ примѣрахъ.

Определение общаго наибольшаго дѣлителя

скольких угодно количествъ $A, B, C, D \dots$ приводится къ опредѣленію подобнаго дѣлителя для двухъ величинъ. Дѣйствительно, пусть будетъ Q общій наибольшій дѣлитель между A и B , Q' между Q и C , Q'' между Q' и D , и такъ далѣе; легко видѣть, что послѣдній изъ нихъ принадлежитъ совокупности количествъ $A, B, C, D \dots$. И такъ, если бы даны были три количества A, B и C , то величина Q' изображала бы наибольшій ихъ дѣлитель.

Приступимъ теперь къ опредѣленію общаго наибольшаго дѣлителя двухъ цѣлыхъ рациональных функций

$$A = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m$$

$$B = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_{n-1} x + b_n$$

въ которыхъ предполагаемъ $m > n$. Для краткости условимся называть *большее* ту изъ двухъ полиномовъ, которой степеней выше, и *обратно*; и такъ, въ этомъ смыслѣ A больше B , B меньше A . Пусть будетъ D общій наибольшій дѣлитель полиномовъ A и B .

Прежде всего замѣтимъ, что D не можетъ быть больше B . Если B дѣлится на-цѣло A , то B будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ. Но если по раздѣленіи A на B , кромѣ частнаго числа q , получимъ остатокъ r , то D будетъ меньше B . Въ послѣднемъ предположеніи имѣемъ $A = qB + r$, и какъ A и B дѣлятся на D , то и остатокъ r долженъ дѣлиться на то же количество D , и другихъ общихъ дѣлителей съ B имѣть не можетъ. И такъ, мы приведены теперь къ разысканію наибольшаго дѣлителя между выраженіями B и r , кои въ степеняхъ соотвѣстственно ниже степеней предложенныхъ двухъ полиномовъ A и B . Разсуждая по предыдущему, выведемъ заключеніе, что если r дѣлится на-цѣло B , то будетъ искомымъ наибольшимъ дѣлителемъ между B и r , и слѣдовательно между A и B ; если же по раздѣленіи B на r получимся, кромѣ частнаго числа q' , остатокъ r' , то наибольшій дѣлитель величинъ r и r' будетъ искомымъ дѣлителемъ D . Продолжая такимъ образомъ, дойдемъ наконецъ до дѣленія безъ остатка; послѣдній дѣлитель будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ полиномовъ A и B .

Вотъ рядъ послѣдовательно получаемыхъ уравненій:

$$A = qB + r$$

$$B = q'r + r'$$

$$r = q''r' + r''$$

$$\dots \dots \dots$$

$$r^{(k-2)} = q^{(k)}r^{(k-1)} + r^{(k)}$$

$$r^{(k-1)} = q^{(k+1)}r^{(k)}$$

Очевидно, что послѣдній остатокъ $r^{(k)}$ дѣлится на-цѣло количества $r^{(k-1)}, r^{(k-2)}, \dots, r', r, B$ и A , и, въ слѣдствіе сказаннаго выше, будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ предложенныхъ выраженій A и B , почему и найдемъ $D = r^{(k)}$.

И такъ, для опредѣленія общаго наибольшаго дѣлителя между двумя количествами A и B , надобно большее изъ нихъ раздѣлить на меньшее, потомъ меньшее на первый остатокъ, первый остатокъ на второй, второй на третій, и такъ далѣе до тѣхъ поръ, пока не дойдемъ до дѣленія безъ остатка. Послѣдній остатокъ, дѣлящій на-цѣло предпоследній, будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ предложенныхъ двухъ количествъ. Если окажется, что послѣдній остатокъ величина постоянная, то есть, не заключается въ себя переменной, отъ которой данная величина зависитъ, то это послужитъ признакомъ, что A и B не имѣютъ никакого общаго дѣлителя.

Когда при разысканіи общаго наибольшаго дѣлителя усмотримъ, что въ одинъ изъ двухъ смежныхъ остатковъ входитъ множитель, на который другой остатокъ не дѣлится, то этотъ множитель можетъ быть откинутъ. Должно также замѣтить, что всякій остатокъ можетъ быть умноженъ на какое угодно количество, лишь бы сіе послѣднее не имѣло никакого дѣлителя съ смежнымъ остаткомъ. Эти два замѣчанія, въ справедливости которыхъ весьма легко удостовѣриться, во многихъ случаяхъ значительно упрощаютъ разысканіе наибольшаго дѣлителя.

Для опредѣленія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ M и N руководствуемся тѣмъ же правиломъ, какое предложили выше для алгебраическихъ выраженій. Должно только замѣтить, что если послѣдній остатокъ равенъ 1, то предложенныя два числа M и N не будутъ имѣть никакихъ общихъ дѣлителей, но есть дробь $\frac{M}{N}$ будетъ несократимая.

Примеръ 1. Найти общій наибольшій дѣлитель двухъ чиселъ 1428 и 1036.

Вотъ подробности вычисления:

$$\begin{array}{r}
 1 \ 56 \overline{) 1428} \ 1 \\
 \underline{1036} \\
 1 \text{ Остаток: } 392 \overline{) 1036} \ 2 \\
 \underline{784} \\
 2 \text{ Остаток: } 252 \overline{) 592} \ 1 \\
 \underline{252} \\
 3 \text{ Остаток: } 140 \overline{) 252} \ 1 \\
 \underline{140} \\
 4 \text{ Остаток: } 112 \overline{) 140} \ 1 \\
 \underline{112} \\
 5 \text{ Остаток: } 28 \overline{) 112} \ 4 \\
 \underline{112} \\
 0
 \end{array}$$

Такъ какъ пятый остатокъ, то есть 28, дѣлится на-цѣло предшествующій ему 112, то заключаемъ, что 28 есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ 1428 и 1036. И такъ, числитель и знаменатель дроби $\frac{1428}{1036}$ сокращаются на 28, въ слѣдствіе чего и получимъ $\frac{1428}{1036} = \frac{28 \times 51}{28 \times 37} = \frac{51}{37}$.

Примеръ 2. Найти общій наибольшій дѣлитель двухъ члѣновъ функций $A = 5x^3 - 18ax^2 + 11a^2x - 6a^3$ и $B = 7x^2 - 23ax + 6a^2$.

По предложенному выше правилу слѣдовало бы раздѣлить A на B ; въ частномъ числѣ получили бы для перваго члена дробь $\frac{5}{7}x$. Для избѣжанія этого неудобства, помножаю A на число 7, не дѣлящее на-цѣло B ; и такъ, надобно раздѣлить $7A$ на B . Произведя это дѣленіе, получили 5х въ частномъ числѣ, а $-11ax^3 + 47a^2x - 42a^3$ въ остаткѣ; но степень этого остатка равна степени дѣлителя B : слѣдовательно можно продолжать дѣленіе. Замѣнимъ при томъ, что найденный остатокъ можеть быть раздѣленъ на a , потому что a не дѣлится на-цѣло количеству B ; сверхъ того, для избѣжанія дробей, помножаемъ сокращенный остатокъ $-11x^2 + 47ax - 42a^2$ на 7, и получаемъ $-77x^2 + 529ax - 294a^2$. Раздѣливъ на B это выраженіе, найдемъ частное число -11 , и остатокъ $r = 76ax - 228a^2 = 76a(x - 3a)$. Этотъ остатокъ опять можеть быть сокращенъ на 76а, потому что 76а не дѣлится на-цѣло выраженія $7x^2 - 23ax + 6a^2$. Раздѣливъ B , то есть $7x^2 - 23ax + 6a^2$ на сокращенный остатокъ $x - 3a$,

получимъ въ частномъ числѣ $7x - 2a$, а въ остаткѣ нуль; и такъ, $x - 3a$ дѣлится на-цѣло B ; слѣдовательно $x - 3a$ есть общій наибольшій дѣлитель выражений A и B . Изъ этого заключаемъ, что дробь $\frac{A}{B}$ сокращается; по раздѣленіи числителя и знаменателя на $x - 3a$, получимъ $\frac{5x^2 - 18ax^2 + 11a^2x - 6a^3}{7x^2 - 23ax + 6a^2} = \frac{5x^2 - 5ax + 3a^2}{7x - 2a}$.

Способъ общаго, наибольшаго дѣлителя употребляется во многихъ алгебраическихъ теоріяхъ; описываемъ по сему предмету преимущественно къ слѣдующимъ: CONTINUE (FRACTION), ÉGALÉS (RACINES), ÉLIMINATION, STURM (THÉORÈME DE).

DIVISIBILITÉ. (Теор. Чис.) **ДѢЛИМОСТЬ.** Свойство, въ слѣдствіе котораго какое либо цѣлое число, или, общѣе, алгебраическая формула дѣлится безъ остатка на другое число или на некоторое алгебраическое выраженіе. См.от. FER-MAT (THÉORÈME DE), CONGRU, RESIDU.

Въ сочиненіяхъ объ Арифметикѣ обыкновенно предлагаютъ нѣкоторыя правила, относящіяся къ дѣлимости чиселъ; приводимъ здѣсь наиболѣе употребительныя, а именно, *признаки дѣлимости члѣновъ чиселъ* на 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13.

Боякое число, оканчивающееся чѣтною цифрою (включая сюда и нуль), дѣлится на 2, ибо десятки, сотни, тысячи и проч., какъ числа чѣтныя, дѣлятся на 2 безъ остатка.

Число дѣлится на 3, когда сумма его цифръ дѣлится безъ остатка на 3. Дѣйствительно, пусть будетъ данное число

$$N = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + 10^3a_3 + \dots$$

гдѣ $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ изображаютъ его послѣдовательныя цифры, считаемыя отъ правой руки къ лѣвой. Оттому уравненію можно дать видъ $N = a_0 + (9 + 1)a_1 + (99 + 1)a_2 + (999 + 1)a_3 + \dots$
 $= 9a_1 + 99a_2 + 999a_3 + \dots + a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

И такъ

$$\frac{N}{9} = 3a_1 + 33a_2 + 333a_3 + \dots + \frac{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{9}$$

Слѣдовательно, когда сумма $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ цифръ числа N будетъ дѣлится безъ остатка на 3, то вторая часть предыдущаго уравненія изобразитъ цѣлое число; осюда заключаемъ, что въ этомъ предположеніи и N будетъ дѣлится на 3.

Всякое число, которого десятки съ единицами дѣлятся на 4, дѣлится на 4. И такъ, 1836 дѣлится на 4, ибо $\frac{36}{4} = \text{цѣлому числу } 9$. Въ справедливости этого признака удостоверяемся замѣтивъ, что сотни, тысячи и проч. дѣлятся на-цѣло на 4.

На основаніи сего правила можемъ поспѣшь рѣшить, будетъ ли предложенный годъ простой или високосный. Для этого споймъ только раздѣлить на 4 послѣдніа двѣ цифры даннаго года: если выйдетъ остатокъ, то годъ *простой*, а если не выйдетъ остатка, то годъ *високосный*. И такъ, 1839 годъ *простой*, ибо раздѣливъ 39 на 4 получаемъ въ остаткѣ 3; 1840 годъ *високосный*, потому что $\frac{40}{4} = \text{цѣлому числу } 10$.

Всякое число, оканчивающееся нулемъ или цифрою 5, дѣлится на-цѣло на 5, ибо десятки, сотни, тысячи и проч. дѣлятся безъ остатка на 5.

Чтобы узнать, дѣлится ли предложенное число на 7, разлагаемъ его сперва на трехцифренныя грани отъ правой руки къ лѣвой. Послѣдняя грань можетъ заключать въ себѣ менѣе трехъ цифръ. Потомъ беремъ сумму 1-ой, 3-ей, 5-ой и вообще всѣхъ граней нечетнаго порядка; находимъ также сумму 2-ой, 4-ой, 6-ой и вообще всѣхъ граней четнаго порядка. Вычли меньшую изъ найденныхъ двухъ суммъ изъ большей, получимъ известную разность; число N будетъ дѣлиться на-цѣло на 7, если эта разность дѣлится на 7 безъ остатка. Напримѣръ, если бы дано было число 651150859436, то, разложивъ его на грани, получили бы

5-ая 4-ая 3-ая 2-ая 1-ая
6, 511, 509, 594, 436

Сумма 1-ой, 3-ей и 5-ой грани, то есть $436 + 509 + 511 = 951$, а 2-ой и 4-ой, то есть $594 + 6 = 594$. Такъ какъ разность $951 - 594 = 357$ дѣлится на 7 безъ остатка, то заключаемъ, что и предложенное число дѣлится на-цѣло на 7.

Чтобы доказать это предложеніе, замѣнимъ что равенство $10^3 = 1000 \equiv -1 + 7 \cdot 143$, или, что все равно, остаточное сравненіе $10^3 \equiv -1 \pmod{7}$ приводитъ къ слѣдующимъ двумъ: $10^{3 \cdot 2^k} \equiv +1 \pmod{7}$ и $10^{3 \cdot 2^k + 1} \equiv -1 \pmod{7}$, въ которыхъ k изображаетъ какое нѣсть цѣлое число,

включая сюда и нуль; См. CONGRUENCE. Помогая каждое изъ силъ двухъ сравненій на 10 и на 10^3 , получимъ слѣдующія равноостаточности по модулю 7:

$$(1) \begin{cases} 10^{3 \cdot 2^k} \equiv +1 \\ 10^{3 \cdot 2^k + 1} \equiv +10 \\ 10^{3 \cdot 2^k + 2} \equiv +10^2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 10^{3 \cdot 2^k + 1} \equiv -1 \\ 10^{3 \cdot 2^k + 1} + 1 \equiv -10 \\ 10^{3 \cdot 2^k + 1} + 2 \equiv -10^2 \end{cases}$$

Пусть будемъ теперь предложенное число $N = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + 10^3a_3 + 10^4a_4 + 10^5a_5 + 10^6a_6 + 10^7a_7 + 10^8a_8 + 10^9a_9 + 10^{10}a_{10} + 10^{11}a_{11} + \dots$. Когда раздѣлимъ оба члена этого уравненія на 7, то впорядъ члени его, въ силу формулы (1) и (2), примемъ простѣйшій видъ. Дѣйствительно, положивъ сперва $k=0$ въ сравненіяхъ (2), получимъ $10^3 \equiv -1$, $10^4 \equiv -10$, $10^5 \equiv -10^2$; положивъ $k=1$, сравненія (1) и (2) доспавлятъ: $10^6 \equiv +1$, $10^7 \equiv +10$, $10^8 \equiv +10^2$, $10^9 \equiv -1$, $10^{10} \equiv -10$, $10^{11} \equiv -10^2$; и такъ далѣе. Слѣдовательно

$$N \equiv a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 - a_3 - 10a_4 - 10^2a_5 + a_6 + 10a_7 + 10^2a_8 - a_9 - 10a_{10} - 10^2a_{11} + \dots \pmod{7},$$

или, что все равно,

$$N \equiv (a_0 + 10a_1 + 10^2a_2) + (a_6 + 10a_7 + 10^2a_8) + \dots - (a_3 + 10a_4 + 10^2a_5) - (a_9 + 10a_{10} + 10^2a_{11}) - \dots \pmod{7}.$$

Эта равноостаточность выражаетъ правило, предложенное выше для узнанія, дѣлится ли безъ остатка предложенное число N на 7.

Число дѣлится на 9, когда сумма его цифръ дѣлится безъ остатка на 9. И такъ, 67585 дѣлится на-цѣло на 9, ибо $6+7+5+8+5=27=3 \cdot 9$; дѣйствительно, $\frac{67585}{9} = 7487$.

Чтобы узнать, дѣлится ли данное число на 11, составляемъ сумму 1-ой, 3-ей, 5-ой и вообще всѣхъ цифръ нечетнаго порядка, начиная съ правой или съ лѣвой руки по произволію; складываемъ также цифры четнаго порядка, и получаемъ новую сумму. Если разность этихъ суммъ дѣлится на-цѣло на 11, то и предложенное число дѣлится безъ остатка на 11. И такъ, число 92019279 дѣлится на 11, ибо $9+2+1+2=14$, $7+9+0+9=25$, а $\frac{25-14}{11} = \text{цѣлому}$

числу 1; дѣйствительно, $\frac{92019279}{11} = 8365389$

Доказательства признаковъ делимости чиселъ на 9 и на 11 чаше всего найдутъ въ статьѣ CONGRUENCE.

Чтобы узнать, будет ли предложенное число делиться на 13, постушаем точно так же, как для 7. Разбиваем данное число на переходящие грани, и сложив сперва все грани нечетного порядка, а потом четного, вычтем меньшую сумму из большей. Если разность делится на 13, то и предложенное число будет делиться на 13. Например, число 881559909247485 делимо на 13, ибо сумма нечетных граней $485 + 909 + 881 = 2275$, четных же $247 + 559 = 806$, а разность двух сумм $2275 - 806$ равняется числу 1469, которое делится на 13 без остатка.

Это правило доказывается весьма простым образом замечая, что $10^3 \equiv 1009 \equiv -1 + 13.77 \equiv -1 \pmod{13}$, ибо из этой формулы выводятся следующие ряды остаточных сравнений по модулю 13:

$$\begin{array}{lll} 10^3 \equiv -1, & 10^6 \equiv -10, & 10^9 \equiv -10^3; \\ 10^6 \equiv -10^3 \equiv +1, & 10^9 \equiv +10, & 10^{12} \equiv +10^3; \\ 10^9 \equiv 10^3 \equiv -1, & 10^{12} \equiv -10, & 10^{15} \equiv -10^3; \end{array}$$

и проч.

Из этих равносоставленностей, точно так же как для 7, выведем справедливость приведенного сейчас признака делимости целых чисел на 13.

Замечим, что из равенства

$$10^3 \equiv -1 + 7.11.15$$

выводятся следующие три равносоставленности: $10^3 \equiv -1 \pmod{7}$, $10^3 \equiv -1 \pmod{11}$, $10^3 \equiv -1 \pmod{13}$. Среднее из них показывает, что признак делимости чисел на 7 и на 13, приличествует также и делителю 11.

Можно найти подобные признаки, более или менее выгодные на практике, и для других простых чисел, как то для 17, 19, 23 и проч.

На основании сказанного в этой статье об делимости чисел на 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, легко будет найти и признаки делимости их на сложные числа 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26 и проч.

DIVISIBILITÉ. (Матем. и Физ.) ДЕЛИМОСТЬ.

Свойство, по которому всякая величина может быть разделена на части действительным образом, или только умственно. В математическом смысле, делимость можно продолжать

в бесконечность. Что касается до физической делимости شيء, то пределы ее нам неизвешны; опыты показывают только, что тела раздробляются искусственными или естественным образом на частицы, до такой степени мелкия, что они, для наших чувств, являются совершенно неощущительными. Смол. ATOMISTIQUE (SYSTÈME), DYNAMIQUE (SYSTÈME).

DIVISION. (Ариф. и Алг.) **ДЕЛЕНИЕ.** Арифметическое или алгебраическое действие, посредством которого по данному произведению двух величин, называемых множителями, определяется один из сих множителей, когда другой известен. Можно также определять деление действий, посредством которого данная величина разлагается на известное число равных частей. Например, если бы требовалось разложить число 15 на 3 равных части, то наша бы посредством деления, что каждая из искоемых частей равна 5, ибо $15 \equiv 3 \times 5$.

Величина, которую требуется разделить, то есть разложить на два множителя, называется *делимым* (*dividende*), данный множитель — *делителем* (*diviseur*), а искомый множитель — *частным числом* (*quotient*). И так, в предыдущем примере 15 есть *делимое*, 3 *делитель*, а 5 — *частное число*. Когда делитель не будет заключаться целое число раз в делимом, то сверх частного, получим число, называемое *остатком деления* (*reste de la division*). Например, разделив 19 на 5, получаем частное число 3, и остаток 4, ибо $19 \equiv 3 \times 5 + 4$.

Арифметическое деление можно разделить на два рода: на *простое* и на *сложное*. Деление называется *простым*, когда делимое и делитель суть целые числа, а *сложным*, когда делимое и делитель, или только одно из этих чисел, будут заключать в себя дроби.

Чтобы разделить одночленное алгебраическое выражение на другое, такого же рода, надобно под делимым провести черту, а под нею подписать делитель, потом, если можно, сократить дробь. Например, деление количества $2ax$ на bc изобразится следующим образом: $\frac{2ax}{bc}$, и как $2ax$ и bc не имеют никакого об-

чаго дѣлителя, по частное $\frac{15x^3}{bc}$ не допускаясь никакого сокращенія. Но если бы требовалось раздѣлить $-6a^2x^3$ на $+5a^2bx$, то написать частное въ видѣ дроби $\frac{-6a^2x^3}{+5a^2bx}$, замѣнили бы, что числитель и знаменатель ея дѣлятся на $5a^2x$; сокративъ эту дробь, получили бы выражение $-\frac{6x^2}{b}$, изображающее *частное*, происшедшее отъ раздѣленія $-6a^2x^3$ на $+5a^2bx$.

Вообще, когда дѣлимое и дѣлитель будутъ одночленныя количества, то для опредѣленія частнаго надобно руководствоваться слѣдующими правилами: 1°. Частное будетъ съ *плюсомъ* или съ *минусомъ* смотря по тому, имѣетъ ли дѣлимое одинакій или противный знакъ съ дѣлителемъ. 2°. Численный коэффициентъ дѣлимаго должно раздѣлить на коэффициентъ дѣлителя по обыкновеннымъ правиламъ Арифметики. 3°. Когда дѣлимое и дѣлитель заключаютъ въ себѣ одинакія буквы съ одинакими показателями, то должно ихъ или совсѣмъ умножить, или поставивъ 1 въ числитель, когда сей послѣдній по сокращенію не будетъ заключать въ себѣ никакихъ чиселъ или буквъ. 4°. Когда одна и та же буква, но возвышенная въ различныхъ степеняхъ, входитъ въ дѣлимое и въ дѣлитель, то должно удержавъ эту букву въ томъ членѣ, въ которомъ она имѣетъ болѣе показателя, написать на мѣсто сего послѣдняго разность

Примѣръ 1. Раздѣлить $15x^3 - 10ax^4 + 14a^2x^5 - 12a^3x^3 + 7a^4x - 2a^5$ на $5x^3 - 2ax + a^2$.

$$\begin{array}{r} 15x^3 - 10ax^4 + 14a^2x^5 - 12a^3x^3 + 7a^4x - 2a^5 \quad | \quad 5x^3 - 2ax + a^2 \\ 15x^3 - 10ax^4 + 5a^2x^3 \quad | \quad 5x^3 + 3a^2x - 2a^5 = \text{частному.} \\ \hline 9a^2x^5 - 12a^3x^3 + 7a^4x \\ 9a^2x^5 - 6a^3x^3 + 3a^4x \\ \hline - 6a^3x^3 + 4a^4x - 2a^5 \\ - 6a^3x^3 + 4a^4x - 2a^5 \\ \hline 0 \end{array}$$

Примѣръ 2. Раздѣлить $a^4 + b^4$ на $a + b$.

$$\begin{array}{r} a^4 + b^4 \quad | \quad a + b \\ a^4 + a^3b \quad | \quad a^4 - a^2b + ab^2 - b^5 = \text{частному.} \\ \hline 1 \text{ Остатокъ: } -a^3b + b^4 \\ -a^3b + a^2b^2 \\ \hline 2 \text{ Остатокъ: } a^2b^2 + b^4 \\ a^2b^2 + ab^3 \\ \hline 3 \text{ Остатокъ: } -ab^3 + b^4 \\ -ab^3 + b^4 \\ \hline 4 \text{ Остатокъ: } 2b^4 \end{array}$$

двухъ показателей. Буква съ меньшимъ показателемъ или совсѣмъ опкидывается, или замѣняется 1-ю въ числитель, когда сей послѣдній по сокращенію не будетъ заключать въ себѣ никакихъ чиселъ или буквъ.

Для раздѣленія многочленного алгебраическаго выраженія на другое, также многочленное, должно прежде всего, для удобности вычисленія, расположить оба выраженія по нисходящимъ степенямъ какой ни есть буквы, общей дѣлному и дѣлителю. Потомъ, первый членъ дѣлимаго дѣлимъ на первый членъ дѣлителя, и получивъ такимъ образомъ первый членъ частнаго, умножаемъ на него всѣ члены дѣлителя; это произведеніе вычитаемъ изъ дѣлимаго, и получаемъ первый остатокъ. Далѣе, дѣлимъ первый членъ остатка на первый членъ дѣлителя, и находимъ второй членъ частнаго, на который умножаемъ опять всѣ члены дѣлителя; вычитая это произведеніе изъ перваго остатка, получимъ второй остатокъ, съ которымъ поступаемъ точно такъ, какъ съ первымъ. Продолжаемъ дѣйствіе на этомъ основаніи, и когда дойдемъ до остатка, равнаго нулю, то дѣленіе будетъ кончено. Но если получимъ остатокъ, котораго степень относительно буквы, общей дѣлному и дѣлителю, будетъ ниже степени дѣлителя, то изъ этого заключимъ, что предположенное выраженіе не можетъ быть раздѣлено безъ остатка на данный дѣлитель. Для объясненія приводимъ два примѣра.

Такъ какъ буква a не входитъ въ 4-ый остатокъ, то дѣленіе не можетъ быть продолжено далѣе. И такъ

$$\frac{a^4 + b^4}{a + b} = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 + \frac{b^4}{a + b}.$$

DIVISION ORDONNÉE. (Арм.) СОКРАЩЕННОЕ

ДѢЛЕНИЕ. *Фурье*, въ сочиненіи своемъ: *Analyse des équations déterminées*, 1831 г., предлагалъ весьма удобный способъ для опредѣленія частнаго числа въ томъ случаѣ, когда дѣлимое и дѣлитель, заключающіе въ себѣ значительное число цифръ. Онъ назвалъ это дѣйствіе *division ordonnée*. Способъ *Фурье* имѣетъ большое преимущество предъ сокращеннымъ дѣленіемъ, предложеннымъ нами въ статьѣ: *DÉCIMALE (FRACTION)*; руководствуясь правиломъ *Фурье*, мы принимаемъ въ расчётъ только нѣ цифры дѣлителя, которыя имѣютъ вліяніе на послѣдовательные знаки частнаго числа, и, главное, всегда бываемъ увѣрены въ точности каждой найденной цифры въ частномъ числѣ. Вотъ въ какомъ видѣ *Фурье* предлагаетъ свой способъ.

Прежде всего въ данномъ дѣлителѣ отдѣляемъ по усмотрѣнію нѣсколько изъ первыхъ его цифръ, какъ то: одну, или двѣ или болѣе. Число, изображенное отдѣленными такимъ образомъ цифрами, принимается за дѣлитель, который назовемъ *сокращеннымъ*; *Фурье* назвалъ его *diviseur désigné*. Потомъ, данное дѣлимое дѣлимъ на этотъ сокращенный дѣлитель по обыкновенному правилу, отъ котораго отсчитываемъ только въ одномъ отношеніи. Вотъ въ чѣмъ состоитъ отсчитываніе, о которомъ говоримъ: каждый разъ какъ при дѣленіи сносимъ цифру дѣлагаго къ остатку, получаемому послѣ вычитанія, и составляемъ такимъ образомъ *частное дѣлимое*, должно исправить это дѣлимое, вычитъ изъ него пѣкоторое число, опредѣленіе котораго будетъ показано ниже. Найдя по этому правилу *исправленное частное дѣлимое*, ищемъ сколько разъ содержится въ немъ сокращенный дѣлитель; въ частномъ числѣ пишемъ цифру, означающую это число разъ. Произведеніе найденной цифры на сокращенный дѣлитель вычитаемъ изъ исправленнаго частнаго дѣлагаго, и къ остатку сносимъ новую цифру данного дѣлагаго. Продолжаемъ дѣйствіе на томъ же основаніи, и нахо-

димъ въ частномъ числѣ сколько угодно цифръ, которыя всѣ будутъ вѣрны.

Поправка частнаго дѣлагаго, то есть число, которое должно вычесть изъ этого частнаго дѣлагаго, опредѣляется слѣдующимъ образомъ: пусть будетъ m число уже найденныхъ цифръ; предположивъ, что онѣ написаны въ обратномъ порядкѣ прописвъ настоящаго, подписываемъ ихъ подъ m цифрами даннаго дѣлителя, непосредственно слѣдующими за послѣднею цифрою сокращеннаго дѣлителя. Умножаемъ попомъ каждую изъ разсматриваемыхъ m цифръ нижняго ряда на соотвѣтствующую ей въ верхнемъ ряду, и получаемъ такимъ образомъ m произведеній; сумма всѣхъ произведеній будетъ искоюмъ *поправка*, то есть число, которое должно вычесть изъ частнаго дѣлагаго. Напримѣръ, если бы данный дѣлитель былъ 35206735..., сокращенный 35, а найденныя цифры въ частномъ числѣ 58264,

то слѣдовало бы написать

20673
46285;

сумма произведеній каждыхъ двухъ соотвѣтствующихъ цифръ, именно

$$5 \times 5 + 8 \times 7 + 2 \times 6 + 6 \times 0 + 4 \times 2 = 91$$

изобразило бы искоюмъ поправку.

Заклѣпимъ, что всякій разъ какъ сносимъ цифру дѣлагаго къ остатку, должно смирить, будетъ ли этотъ остатокъ *болѣе*, или по крайней мѣрѣ *равенъ* суммѣ цифръ, уже написанныхъ въ частномъ числѣ. Если это условіе удовлетворяется, то заключаемъ, что написанная въ частномъ числѣ послѣдняя цифра вѣрна.

Когда число цифръ, изъ которыхъ состоитъ сокращенный дѣлитель, окажется слишкомъ малымъ, то приведенное сей-часъ условіе не удовлетворится, то есть, остатокъ послѣдняго дѣйствія будетъ *менѣе* суммы цифръ, уже написанныхъ въ частномъ числѣ: тогда послѣдняя цифра частнаго числа будетъ сомнительна; въ такомъ случаѣ выгодно будетъ увеличивъ число цифръ сокращеннаго дѣлителя. А чтобы перейти къ другому сокращенному дѣлителю, продолжемъ сперва дѣйствіе по прежнему правилу, то есть, сносимъ цифру дѣлагаго, и подписываемъ поправку; если нельзя вычесть этой поправки, то заключаемъ, что послѣдняя цифра частнаго числа слишкомъ велика, почему и умень-

П р и м е р ь 2-ой.

$$\begin{array}{r}
 \overline{95'0'6'8'8'1'2'2'0'566669} \dots \left| \overline{85'1'7'6'1'5'4'5'9'42} \dots \right. \\
 \underline{8} \quad \left| \underline{11 \ 1 \ 6 \ 1 \ 4 \ 5 \ 7 \ 7} \dots \right. \\
 15' \ (1=1: \text{цифра 1 верна}) \\
 \underline{5=1.5} \\
 \text{2-ое испр. частн. дѣлимое} \dots \underline{10} \\
 \underline{8} \\
 20' \ (2=1+1: \text{цифра 1 верна}) \\
 \underline{6=1.1+1.5} \\
 \text{3-ье испр. частн. дѣлимое} \dots \underline{14} \\
 \underline{8} \\
 66' \ (6>1+1+1: \text{цифра 1 верна}) \\
 \underline{13=1.7+1.1+1.5} \\
 \text{4-ое испр. частн. дѣлимое} \dots \underline{53} \\
 \underline{48} \\
 58' \ (5<1+1+1+1+6: \text{цифра 6 сомнительна}) \\
 \underline{44=1.6+1.7+1.1+6.5} \\
 \text{Новое частное дѣлимое} \dots \underline{148'} \quad (\text{такъ какъ поправка } 44 < 58, \text{ то заключаемъ, что цифра 6 верна;} \\
 \quad \cdot \text{ но, для избѣжанія сомнительныхъ цифръ, прибавляемъ къ сокра-} \\
 \quad \cdot \text{ щенному дѣлителю одну цифру, и получаемъ } \underline{85}. \text{ Выше съ} \\
 \quad \cdot \text{ тѣмъ сносимъ слѣдующую цифру 8 дѣлимаго.)} \\
 \underline{20=1.1+1.6+1.7+6.1} \\
 \text{Новое испр. частн. дѣлимое} \dots \underline{128} \\
 \underline{85} \\
 451' \ (45>1+1+1+6+1: \text{цифра 1 верна}) \\
 \underline{55=1.5+1.1+1.6+6.7+1.1} \\
 \text{2-ое новое испр. частн. дѣлимое} \dots \underline{578} \\
 \underline{340} \\
 382' \ (38>1+1+1+6+1+4: \text{цифра 4 верна}) \\
 \underline{55=1.4+1.3+1.1+6.6+1.7+4.1} \\
 \text{3-ье новое испр. частн. дѣлимое} \dots \underline{527} \\
 \underline{255} \\
 722' \ (72>1+1+1+6+1+4+5: \text{цифра 3 верна}) \\
 \underline{55=1.5+1.4+1.3+6.1+1.6+4.7+3.1} \\
 \text{4-ое новое испр. частн. дѣлимое} \dots \underline{667} \\
 \underline{595} \\
 720' \ (72>1+1+1+6+1+4+5+7: \text{цифра 7 верна}) \\
 \underline{89=1.9+1.5+1.4+6.3+1.1+4.6+3.7+7.1} \\
 \text{5-ое новое испр. частн. дѣлимое} \dots \underline{631} \\
 \underline{595} \\
 35 \ (36>1+1+1+6+1+4+3+7+7: \text{цифра 7 верна}) \\
 \text{и такъ далѣе.}
 \end{array}$$

Пределы нашего Лексикона не позволяютъ намъ привести любопытное приложение способа сокращеннаго дѣленія къ опредѣленію вещественныхъ корней уравненій какой ни есть степени. Ошсылаемъ по сему предмету къ книгѣ Фурье: *Analyse des équations déterminées* (стр. 193).

Доказательство *сокращеннаго дѣленія Фурье* можно основать на разсмотрѣніи рядовъ единицъ, составляющихъ различныя произведенія, копорыя входятъ въ составъ *поправокъ*. Каждая поправка дѣлается съ такою цѣлю, чтобы онять отъ частнаго дѣлимаго сумму произведеній одинаковаго разряда

съ цифрою даннаго дѣлимаго, которую снесли къ остатку. Впрочемъ, читатели найдутъ доказательство этого способа въ книгахъ: *Supplément zu Georg Simon Klügel's Wörterbuche der reinen Mathematik*; von J. H. Grunert; zweite Abtheilung, 1836, и въ *Grundzüge der Lehre von den höheren numerischen Gleichungen*; von M. W. Drobesch, 1834.

DIVISION. (Ариф.) *Par division de raison, de proportion*, или просто *dividendo*. Смол. COMPOSITION.

DIVISION. (Геом.) **ДѢЛЕНИЕ.** *Геометрическое дѣленіе* состоитъ въ опредѣленіи линіи, которая равнялась бы частному, получасмому чрезъ раздѣленіе произведена двухъ линій на одну, или произведениа трехъ линій на произведение двухъ, и проч. И такъ, геометрическое дѣленіе приводится къ построению выражений $\frac{ab}{c}$, $\frac{abc}{de}$ и проч., въ которыхъ a, b, c, d, e, \dots изображаютъ данныя линіи. Смол. CONSTRUCTION.

DIVISION. (Лог.) **РАЗДѢЛЕНІЕ, ДѢЛЕНІЕ.** Предложеніе, состоящее въ исчисленіи частей, коихъ совокупность составляетъ какое нибудь целое. И такъ, когда говоримъ, что дѣлая числа бываютъ четныя или нечетныя, то такое раздѣленіе вѣрно, ибо нѣтъ ни одного дѣлага числа, которое бы не было или четнымъ, или нечетнымъ.

DIX. (Ариф.) **ДЕСЯТЬ.** Наименьшее изъ чиселъ, изображаемыхъ двумя знаками въ общепринятой Арифметикѣ. — DIXIÈME; десятый. UN DIXIÈME, одна десятая. DIX-HUIT, восемнадцать.

DIXMES (ÉCHELLE DES). (Практ. Геом.) **ДЕСЯТИЧНЫЙ МАСШТАБЪ.** Смол. ÉCHELLE.

DIX-NEUF. ДВЯТНАДЦАТЬ.

DIX-SEPT. СЕМНАДЦАТЬ.

DIX-SEPT COTES (POLYÈNE RÉGULIER DE).

Правильный семнадцатигуольникъ. Въ статьѣ BINOMES (ÉQUATIONS) мы показали, что построение правильнаго многоугольника объ m сторонахъ зависитъ отъ рѣшенія двучленаго уравненія m -ой степени. И такъ, для вписанія въ кругъ семнадцатигуольника, надобно рѣшить уравненіе $x^{17} - 1 = 0$, которое, по

общей теоремѣ, доказанной Гауссомъ, приводится къ рѣшенію четырехъ уравненій 2-ой степени. Смол. ANGULAIRES (SECTIONS).

На основаніи общей теоріи, изложенной въ статьѣ BINOMES (ÉQUATIONS) [Смол.], мы могли бы рѣшить уравненіе $x^{17} - 1 = 0$, или, что все равно, раздѣливъ окружность круга на 17 равныхъ частей. Но такъ какъ выкладки были бы довольно сложны, то мы приведемъ здѣсь простѣйшій способъ, предложенный Гауссомъ, и основанный на известныхъ тригонометрическихъ формулахъ. Этого самый способъ чинатели найдутъ въ Тригонометріи Лежандра.

Пусть будетъ π полуокружность круга при радиусѣ 1, и $\frac{\pi}{17} = q$. Изобразимъ чрезъ P сумму

$$\cos q + \cos 3q + \cos 5q + \cos 7q + \cos 9q + \cos 11q + \cos 13q + \cos 15q,$$

и покажемъ сперва, что она равна $\frac{1}{2}$. Для этого помножимъ величину P и равную ей сумму $\cos q + \cos 5q + \dots + \cos 15q$ на $2 \cos q$, и выразимъ каждое произведение двухъ косинусовъ въ простѣхъ косинусахъ, употребляя на сей конецъ известную формулу

$$2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b).$$

Найдемъ

$$2P \cos q = 1 + 2 \cos 2q + 2 \cos 4q + 2 \cos 6q + 2 \cos 8q + 2 \cos 10q + 2 \cos 12q + 2 \cos 14q + \cos 16q.$$

Но, по причинѣ $17q = \pi$, имѣемъ

$$\cos 2q = \cos(\pi - 15q) = -\cos 15q$$

$$\cos 4q = \cos(\pi - 13q) = -\cos 13q$$

$$\cos 6q = \cos(\pi - 11q) = -\cos 11q$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\cos 14q = \cos(\pi - 3q) = -\cos 3q$$

$$\cos 16q = \cos(\pi - q) = -\cos q;$$

слѣдовательно

$$2P \cos q = 1 - 2 \cos 15q - 2 \cos 13q - 2 \cos 11q - 2 \cos 9q - 2 \cos 7q - 2 \cos 5q - 2 \cos 3q - \cos q,$$

или, вводя во вторую часть уравненія величину P ,

$$2P \cos q = 1 - 2P + \cos q, \text{ откуда } P = \frac{1}{2}.$$

Разлагаемъ теперь сумму $P = \frac{1}{2}$ на слѣдующія двѣ части:

$$x = \cos 3q + \cos 5q + \cos 7q + \cos 11q$$

$$y = \cos q + \cos 9q + \cos 13q + \cos 15q.$$

И такъ, $x + y = \frac{1}{2}$; для опредѣленія x и y надобно имѣть еще одно уравненіе. Для этого, перемено-

жаемъ между собою послѣднія формулы, и, какъ выше, замѣняемъ произведенія косинусовъ произведеніями косинусами. Такимъ образомъ получимъ

$$\begin{aligned}xy &= 2(\cos 2f + \cos 4f + \cos 6f + \dots + \cos 16f) \\&= 2(\cos 15f + \cos 13f + \cos 11f + \dots + \cos f) \\&= 2P = -1.\end{aligned}$$

Изъ уравненій $x+y=\frac{1}{2}$ и $xy=-1$ выводимъ

$$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{17}, \quad y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{17}.$$

Разлагаемъ опять каждую изъ суммъ x и y на двѣ части, полагая

$$\begin{aligned}x &= s + t & y &= u + v \\s &= \cos 5f + \cos 9f & u &= \cos f + \cos 13f \\t &= \cos 7f + \cos 11f & v &= \cos 3f + \cos 15f,\end{aligned}$$

и ищемъ, подобно предыдущему, произведенія st и uv ; найдемъ $st = -\frac{1}{2}$ и $uv = -\frac{1}{2}$. И такъ, для опредѣленія четырехъ величинъ s, t, u и v , надобно будетъ рѣшить два уравненія второй степени.

Наконецъ, для опредѣленія $\cos f$, пусть будетъ $\cos 5f = w$ и $\cos 13f = z$. Мы уже имѣемъ одно уравненіе $w + z = u$; чтобы найти другое, составляемъ произведеніе wz . Найдемъ послѣдующее

$$\begin{aligned}wz &= \cos 5f \cdot \cos 13f \\&= \frac{1}{2}(\cos 18f + \cos 12f) \\&= -\frac{1}{2}(\cos 5f + \cos 9f) \\&= -\frac{1}{2}w.\end{aligned}$$

Изъ двухъ уравненій

$$w + z = u \quad \text{и} \quad wz = -\frac{1}{2}w,$$

въ которыхъ u и s извѣстны, опредѣляемъ окончательно посредствомъ новаго уравненія 2-ой степени величины w и z . Но $w = \cos 5f = \cos \frac{\pi}{17}$, следовательно сторона правильного семнадцатиугольника, вписаннаго въ кругъ, коего радиусъ предполагается равнымъ 1, будетъ $2\sin f = 2\sqrt{1 - \cos^2 f} = 2\sqrt{1 - w^2}$. Такъ какъ для опредѣленія величины w мы рѣшали только уравненія 2-ой степени, то и заключаемъ, что построение правильного многоугольника объ семнадцати сторонахъ возможно *геометрически*, то есть, при употребленіи одной линейки и циркуля.

Легко доведши до конца обозначенное выше вычисленіе количествъ $\cos f, \cos 2f, \cos 3f, \dots$. Приведемъ одну изъ сихъ величинъ, имѣя въ виду

$$\cos 2f = \cos \frac{2\pi}{17}. \quad \text{Вотъ эта формула:}$$

$$\begin{aligned}\cos \frac{2\pi}{17} &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{54 - 2\sqrt{17}} \\&- \frac{1}{8}\sqrt{[(17 + 3\sqrt{17}) - \sqrt{54 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{54 + 2\sqrt{17}}]}.\end{aligned}$$

Въ заключеніе скажемъ, что извѣстный Французскій математикъ *Луперъ*, основываясь на теоріи Гаусса, предложилъ геометрическое построение правильного семнадцатиугольника.

DIZAINE. (Архе) **ДЕСЯТОКЪ.**

DO.

DODÉCADIQUE, то же что **DUODÉCIMAL** (Смол.).

DODÉCAÈDRE. (Гесом.) **ДВѢНАДЦАТИГРАНИКЪ, ДОДЕКАЭДРЪ.** Тѣло, ограниченное двѣнадцатью правильными, равными между собою пятиугольниками. Двѣнадцатигранникъ есть одинъ изъ пяти правильныхъ многогранниковъ, расширяемыхъ въ Дедешипарной Геометріи. Половина обыкновеннаго правильного двѣнадцатигранника изображена въ разверзаніи на черт. 17 (Листъ VII).

Г. Поиско (Poisot), въ своемъ *Mémoire sur les Polygones et les Polyèdres*, описалъ четыре правильные многогранника, отличные отъ тѣхъ пяти тѣлъ, которыя обыкновенно расширяются въ Геометріи. Онъ нашелъ три новые двѣнадцатигранника и одинъ двадцатигранникъ.

Новые двѣнадцатигранники получаются слѣдующимъ образомъ:

1°. Если въ обыкновенномъ додекаэдрѣ продолжимъ стороны двѣнадцати пятиугольниковъ, то получимъ *звѣздообразный додекаэдръ второго рода* (*dodécaèdre étoilé de seconde espèce*).

2°. Если въ обыкновенномъ додекаэдрѣ продолжимъ плоскость каждаго пятиугольника до встрѣчи съ пятию плоскостями граней, окружающихъ противоположный пятиугольникъ, то есть, пятиугольникъ, параллельный расширяемому, то получимъ *додекаэдръ третьего рода*, ограниченный обыкновенными правильными пятиугольниками.

3°. Продолживъ стороны двѣнадцати пятиугольниковъ, образующихъ додекаэдръ прѣшняго рода, составимъ *додекаэдръ четвертого рода*.

Г. Коши, въ XVI томѣ *Журнала Полиматематическаго Училища* (1813 г.), въ Разсужденіи подъ заглавіемъ: *Recherches sur les polyèdres*, доказалъ,

что сверхъ давно известныхъ пяти правильныхъ многогранниковъ и четырехъ новыхъ, построенныхъ Г. Поэнсо, не можеть существовать другихъ.

DODÉCAÈDRE GNOMONIQUE. Гномоническій додекаэдръ. Двѣнадцатигранникъ, на граняхъ котораго начерчены солнечные часы.

DODÉCAGONE. (Геом.) **ДВѢНАДЦАТИУГОЛЬНИКЪ.** Плоская фигура, имѣющая двѣнадцать сторонъ и столько же угловъ. При равныхъ сторонахъ и углахъ, двѣнадцатигульникъ называется *правильнымъ* (*dodécagone régulier*).

Поспирокіе правильнаго двѣнадцатигульника очень просто: выписываемъ въ кругъ шестигульникъ, что весьма легко, ибо сторона его, какъ извѣстно, равна радіусу. Потомъ, дѣлимъ пополамъ каждую изъ дугъ, стягиваемыхъ сторонами шестигульника, и такимъ образомъ раздѣляемъ окружность круга на 12 равныхъ частей; проводя прямыя отъ каждой точки дѣленія къ смежной съ нею, получимъ правильный двѣнадцатигульникъ. —

Сверхъ описаннаго сѣк-часть правильнаго двѣнадцатигульника, есть еще другой, называемый *звѣздообразнымъ* (*dodécagone étoilé*). Вотъ его построение: раздѣливъ по предыдущему на 12 равныхъ частей окружность круга, и означивъ буквами *a, b, c, d, ...* (черт. 12 Листъ VIII) точки дѣленія, соединимъ сіи послѣднія, пропуская каждый разъ четыре смежныя точки. Такимъ образомъ, начиная отъ *a* идемъ къ *f*, отъ *f* къ *k*, отъ *k* къ *d*, отъ *d* къ *i*, отъ *i* къ *b*, отъ *b* къ *g*, отъ *g* къ *l*, отъ *l* къ *e*, отъ *e* къ *j*, отъ *j* къ *c*, отъ *c* къ *h*, и наконецъ отъ *h* возвращаемся къ *a*, и замыкаемъ многоугольникъ.

DODÉCAHÈDRE или **DODÉCAEDRE** (Смоч.).

DODÉCATÉMOIRIE. Уст. выраж. Двѣнадцатая часть окружности круга, то есть 30°. Смоч. CERCLE, ARC. Въ древней Астрономіи подъ словомъ *додекатеморія* разумѣли *зодіакальные знаки*, потому что каждый изъ нихъ занимаетъ двѣнадцатую часть зодіака, или 30°.

DOIGT. (Астр.) **ДЮЙМЪ.** Смоч. DISQUE.

DOMINICALE (Lettre). (Календ.) **ВОСКРЕСНЯЯ БУКВА, ВЪ-РУЦЪ-ЛѢТО, ВРУЦЪЛЪ-**

ТИЕ. Буква, соотвѣствующая воскресенью въ теченіи цѣлаго года. Въ Греко-Россійской Церковномъ мѣсяцесловѣ недѣльные дни изображаются первыми семью численными буквами Славянскаго алфавита въ слѣдующемъ порядкѣ: З, С, Ё, А, Г, Е, Ъ. Первому числу Марша мѣсяца соотвѣствуетъ буква Г, второму — буква Б, третьему — Ъ, четвертому — З, пятому — С, шестому — Ё, седьмому — А, восьмому, какъ первому, буква Г, и такъ далѣе. Следовательно, въ продолженіи цѣлаго года, одна и та же буква будетъ показывать одинъ и тотъ же недѣльный день. Напримѣръ, въ 1841 году первое Марша приходится въ субботу; потому, въ продолженіи 1841 года, буква Г будетъ означать субботы, буква К воскресенья, Ъ — понедѣльники, З — вторники, С — среды, Ё — четверги, и наконецъ А — пятницы. И такъ, *Воскресная буква* 1841 года будетъ Б.

Опредѣленіе Воскресной буквы для даннаго года показано въ слѣдѣ: CALENDRIER, къ которой и отсылаемъ читателей.

DONNÉ. ДАНИЙ. — ИЗВѢСТІЙ, ОПРЕДѢЛЕНІЙ. *Quantité donnée en fonction d'une autre; количество, данное отъ функции другаго. Une droite donnée de longueur et de position; линия, данная по длинѣ своей и по направленію. Un cercle donné de grandeur; даннаго, извѣстнаго радіуса кругъ. Courbes données d'espèces; даннаго вида кривыя, и проч.*

DONNÉES. ДАННЫЯ ВЕЛИЧИНЫ, ДАННЫЯ, ДАННОСТИ. Величинами, которыя при рѣшеніи какой либо задачи предполагаются извѣстными. Даныя служатъ для опредѣленія неизвѣстныхъ величинъ. — *Les données du problème; данныя задачи. Ces données sont insuffisantes pour résoudre le question; этихъ данныхъ недостаточно для рѣшенія вопроса.* Смоч. DATA, ÉLÉMENTS D'UNE QUESTION.

DONNER. ДАТЬ. *Les trois côtés d'un triangle étant donnés, trouver les angles; по даннымъ тремъ сторонамъ треугольника, опредѣлить углы.*

DORMANT. (Практ. Мех.) **СТОЙКА — ЛЕЖЕНЬ.**

Стойками вообще называются неподвижные брусья, деревянные или металлические, сползающие въ вертикальномъ положеніи. Когда же брусья утверждены горизонтально, то они принимаютъ названіе *лежней*.

DOUBLE. ДВОЙНОЙ, УДВОЕННЫЙ, ВДВОЕ ВОЛЬШІЙ. — ДВОЯКІЙ.

Величина бываетъ *вдвое больше* данной величины, когда послѣдняя содержится въ ней два раза. *Double produit de deux quantités; удвоенное произведение двухъ количествъ*; таково, напримѣръ, произведение *2ab* относительно двухъ величинъ *a* и *b*. *Quantité sous-double; половинное количество.* — *Courbe à double courbure; кривая двойкой кривизны.* Смот. **COURBE.**

RAISON DOUBLE. ДВУКРАТНОЕ СОДЕРЖАНІЕ.

Когда первый членъ данного отношенія *вдвое больше* второго его члена, какъ напримѣръ въ отношенія 10:5, то такое содержаніе называется *двукратнымъ*.

RAISON SOUS-DOUBLE. Половинное содержаніе.

Если первый членъ данного отношенія *вдвое меньше* второго его члена, то такое содержаніе называется *половиннымъ*. Таково содержаніе 5:10.

DOUBLE (SÉRIE). (Анал.) ДВОЙНОЙ РЯДЪ.

Такъ называется рядъ

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \\ u_1' + u_2' + u_3' + \dots + u_n' + \dots \\ u_1'' + u_2'' + u_3'' + \dots + u_n'' + \dots \\ u_1''' + u_2''' + u_3''' + \dots + u_n''' + \dots \end{aligned}$$

$$u_1^{(m)} + u_2^{(m)} + u_3^{(m)} + \dots + u_n^{(m)} + \dots$$

сосланный изъ безконечнаго числа горизонтальныхъ рядовъ $u_1 + u_2 + u_3 + \dots, u_1' + u_2' + u_3' + \dots, u_1'' + u_2'' + u_3'' + \dots$ и проч. и вертикальныхъ $u_1 + u_1' + u_1'' + \dots, u_2 + u_2' + u_2'' + \dots, u_3 + u_3' + u_3'' + \dots$ и проч. Общій членъ такого ряда будетъ $u_n^{(m)}$.

Для некоторыхъ подробностей объ этомъ родѣ рядовъ, отсылаемъ читателей къ слѣдующимъ **SÉRIE** нашего Лексикона, а также къ VII примѣчанію сочиненія Г. Коши: Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique; 1^{ère} Partie, *Analys. Algèbre*, 1821.

DOUBLE SIGNE. (Алг.) ДВОЯКІЙ, ДВОЙНОЙ

ЗНАКЪ. Знакъ \pm или \mp (*плюсъ-минусъ* или *минусъ-плюсъ*), употребляемый во многихъ случаяхъ, и преимущественно передъ корнями четной степени. Напримѣръ, рѣшивъ уравненіе второй степени $x^2 + px + q = 0$, найдемъ $x = -\frac{p}{2}$

$$\pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Подъ этимъ выраженіемъ разумѣемъ, что неизвѣстная x имѣетъ два значенія:

$$\text{одно, } -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \text{ а другое, } -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

но, для краткости, соединимъ оба въ одну формулу, употребляя въ ней *двойной знакъ* \pm . — Cette quantité doit être affectée du double signe; это количество должно быть принимаемо съ двойнымъ знакомъ. Смот. **AMBIGU.**

DOUBLE SIGNE (RÈGLE DU). (Алг.) ПРАВИЛО

ДВОЙНАГО ЗНАКА. Смот. **FOURIER (ANALYSE DES ÉQUATIONS DÉTERMINÉES PAR).**

DOUBLE (POINT). (Геом.) ДВОЙНАЯ ТОЧКА.

Точка, въ которой двѣ вѣтви кривой линіи пересѣкаются. Очевидно, что для двойной точки кривая имѣетъ *два* касательныя, а для простой, только *одну*. Это самое и составляетъ отличительный признакъ двойной точки.

Вотъ примѣры: кривая, изображенная на чертѣжѣ 23 (Листъ IV), и опредѣляемая уравненіемъ $y^2 = x^2(x+c)$, имѣетъ двойную точку въ началѣ координатъ. Равнымъ образомъ *конхоида* (черт. 17, Листъ IV) имѣетъ двойную точку въ своемъ полюсѣ, когда высота ея a больше параметра b . Смот. **CONCHOÏDE.**

Что касается до разысканія двойныхъ, и вообще кратныхъ точекъ, то отсылаемъ читателей къ слѣдующимъ **POINTS SINGULIERS.**

DOUBLE CADRAN или CADRAN DOUBLE. (Гном.)

ДВОЙНОЙ КВАДРАНЪ. Особеннаго устройства солнечные часы, изображенные Уггетредомъ (*Oughtred*). Они названы *двойными*, потому что имѣли два гнома.

DOUBLE RÉFRACTION. (Физ.) ДВОЙНОЕ ПРЕ-

ЛОМЛЕНІЕ. Смот. **RÉFRACTION.**

DOUBLE. (Арие.) *Raison doublée*; *квадратное со-
держание*. Отношение между квадратами данныхъ
количествъ. И такъ, *квадратное содержание*
числа 3 къ 4, будетъ 9:16. Выраженіе *en raison
doublée* нынѣ мало употребляется, а говорятъ
преимущественно *en raison des carrés*. — *En ra-
ison sous-doublée*, или, употребительнѣе, *en ra-
ison des racines carrées*; въ *содержаніи корней
квадратныхъ*. Такъ напримѣръ, *содержаніе кор-
ней квадратныхъ* изъ чиселъ 9 и 16 будетъ
 $\sqrt{9}:\sqrt{16}$ или 3:4.

DOUBLEMENT. **ДВОЙКО, ВДВОЙНѢ.** *Nombre
doublement pair*, или, употребительнѣе, *nombre
pairement pair*; *чётно-чётное число*. Число, дѣ-
лящееся на-цѣло на 4, какъ напримѣръ 4, 12, 20
и проч. Подъ *нечётно-чётными* (*nombre im-
pairement pair*) разумѣютъ такое число, которое,
по раздѣленіи на 2, даётъ въ частномъ нечёт-
ное число; таковы напримѣръ числа 2, 6, 10 и
проч. — *Fonction doublement périodique* или *fonc-
tion à double période*; *двойко-периодическая функ-
ція*. Смол. PERIODIQUE. — **УДВОЕНИЕ.**

DOUBLER. **УДВОИТЬ.** *Doubler un cube*; *удвоить
кубъ*. Смол. DUPLICATION DU CUBE.

DOUELLE. (Разр. Камн.) **ГРАНЬ, ПОВЕРХНОСТЬ
КЛИНА.** Смол. VOUSOIR.

DOUILLE. (Прикл. Мех.) **ГНѢЗДО, ПОДПЯТКА,
ГЛАЗОКЪ.** Смол. CHAPE.

DOUTEUX (CAS). **СОМНИТЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ.**
Смол. AMBIGUITÉ.

DOUZAIN. (Арие.) **ДЮЖИНА.**

DOUZE. (Арие.) **ДВѢНАДЦАТЬ.** — Douzième;
двѣнадцатый. Un douzième; одна двѣ-
надцатая.

DR

DRACONTIQUE или **DRACONTIQUE (MOIS).**

(Астр.) **ДРАКОНИЧЕСКІЙ МѢСЯЦЪ.** Проме-
жутокъ времени, равный 27,321214, протекающій
между двумя послѣдовательными возвращеніями
луны къ восходящему ея узлу, который прежніе
астрономы называли *драконовою головою* (*caput
draconis*). Драконическій мѣсяцъ почти не упо-
требляется въ новѣйшей Астрономіи.

DRAPEAU D'ARRENTAGE. (Практ. Геом.) **ВЪ-
ХА СЪ ЦѢЛЮ.** Шесть длиною отъ 8 до 10

футовъ, и болѣе, съ вкладною, а иногда непод-
вижною въ верхней его части жестяною доскою,
имѣющею видъ прямоугольника. Чтобы можно
было видѣть цѣль по возможности съ бѣльшаго
разстоянія, то жестяную доску раздѣляютъ
горизонтальною чертою на двѣ половины, изъ
которыхъ одну покрываютъ обыкновенно бѣ-
лою краскою, а другую, красною. — **РЕЙКА.**
Смол. LEVÉE DE PLANS, NIVELLEMENT.

DROIT. (Геом.) **ПРЯМОЙ.** *Angle, cône droit*; *пря-
мой уголъ, конусъ*. Смол. ANGLE, CONE. *Sinus
droit*; *прямой синусъ* или просто *синусъ*. Въ
этомъ случаѣ прилагательное *прямой* упопре-
бляется для отличенія обыкновеннаго синуса
отъ *обращеннаго* (*sinus-verse*). Смол. SINUS.

DROITE. (Геом.) **ПРЯМАЯ, ПРЯМАЯ ЛИНІЯ.**
Смол. COURBE. *Equation d'une droite*; *уравне-
ніе прямой*.

Выведемъ сперва уравненіе прямой линіи, от-
несенной къ двумъ пересекающимся координат-
нымъ осямъ, въ плоскости которыхъ она за-
ключается. Пусть будетъ *LK* (черп. 13 Листъ
VIII) эта прямая, *X'X*, *Y'Y* координатныя оси,
а *O* начало координатъ. Изъ точки *A* пересѣ-
ченія данной прямой съ осью ординатъ *OY* про-
водимъ линію *AB*, параллельную оси абсциссъ
OX. Означимъ чрезъ α и β углы *BAK*, *KAY*,
составляемые направлениемъ *LK* съ положитель-
ными полуосями *OX*, *OY*, а чрезъ b известную
длину \overline{OA} . Если возьмемъ какую ни есть поч-
ку *M* на данной прямой *LK*, и проведемъ *MP*
параллельно оси *OY*, то длина \overline{OP} изобразитъ
абсциссу, а \overline{PM} ординату разсматриваемой поч-
ки. Пусть будетъ $\overline{OP}=x$, $\overline{PM}=y$. Изъ тре-
угольника *AQM* найдемъ

$$\overline{MQ}:\overline{AQ}=\sin\alpha:\sin\beta,$$

откуда

$$\overline{MQ}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\overline{AQ};$$

но $\overline{MQ}=\overline{MP}-\overline{QP}=\overline{MP}-\overline{AO}=y-b$, $\overline{AQ}=\overline{OP}=x$;
следовательно

$$y-b=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}x,$$

или

$$(1) \quad y=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}x+b$$

Вот уравнение прямой линии, описанной косоугольным координатным осям. Если положим, что эта прямая проходит через точку, определяемую координатами x_0 и y_0 , то получим

$$y_0 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} x_0 + b;$$

вычтя это равенство из формулы (1), найдем уравнение

$$y - y_0 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} (x - x_0),$$

из которого выводим следующее:

$$\frac{x - x_0}{\sin \beta} = \frac{y - y_0}{\sin \alpha},$$

симметрическое относительно обеих координат x и y .

Заметим, что когда прямая проходит через начало координат, то последнее уравнение принимает простейший вид. Действительно, в таком предположении можно принять $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, в следствии чего получаем просто

$$\frac{x}{\sin \beta} = \frac{y}{\sin \alpha} \quad \text{или} \quad y = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} x.$$

Положим теперь, что координатные оси пересекаются под прямым углом; в таком случае $\alpha + \beta = 90^\circ$, почему $\sin \beta = \cos \alpha$, и уравнение (1) примет вид

$$y = \tan \alpha \cdot x + b;$$

положив для краткости $\tan \alpha = a$, будем

$$y = ax + b.$$

Когда прямая проходит через начало координат, то получаем в одно время $x = 0$ и $y = 0$; следовательно и $b = 0$, почему $y = ax$.

Мы не будем останавливаться на решении разных задач, относящихся к прямым линиям. Вообще, такого рода вопросы не представляют никакого затруднения. Ограничимся решением одной задачи, состоящей в определении угла, составленного двумя прямыми, которые даны по их уравнениям. Пусть будем

$$y = ax + b \quad \text{и} \quad y' = a'x' + b'$$

уравнения двух прямых AB , CD (черт. 14 Листа VIII), описанных к одной и той же системе прямоугольных координатных осей. Положим теперь, что величина a изображает тригонометрический тангенс угла, составляемого прямою AB с положительною полу-осью x -овъ. То же самое можно сказать о величине

a' , входящей в уравнение прямой CD . Следовательно, прямая KL и $K'L'$, проходящая через начало координат, и соответственно параллельны направлениям AB и CD , определяются уравнениями

$$y = ax \quad \text{и} \quad y' = a'x'.$$

Угол LOL' будет равен углу $BO'D$, под которым данные прямые AB и CD пересекаются. Назначим этот угол через φ . Если радиусом Om , равным единице, опишем дугу mm' , и на хорду mm' опустим из точки O перпендикуляр Oq , то длина этого перпендикуляра изобразит косинус половины угла LOL' , то есть косинус $\frac{1}{2}\varphi$, а mq , синус $\frac{1}{2}\varphi$. Сверх того, положив $Op = x$, $pm = y$, $Op' = x'$, $p'm' = y'$, получим из прямоугольных треугольников Omp , Omp' ,

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{и} \quad x'^2 + y'^2 = 1.$$

Но, из уравнений прямых KL и $K'L'$, выведем

$$y^2 = a^2 x^2 \quad \text{и} \quad y'^2 = a'^2 x'^2;$$

следовательно

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \quad y = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}},$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1+a'^2}}, \quad y' = \frac{a'}{\sqrt{1+a'^2}}.$$

С другой стороны, из прямоугольного треугольника $mm'q$ имеем

$$\overline{mm'}^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2,$$

или

$$\overline{mm'}^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - 2(xx' + yy') \\ = 1 + 1 - 2(xx' + yy').$$

Но $\overline{mm'} = 2 \sin \frac{1}{2}\varphi$, почему и получим

$$4 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi = 2 - 2(xx' + yy'),$$

откуда

$$xx' + yy' = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi = \cos \varphi.$$

Подставляя на место x , x' , y , y' выведенные выше значения для этих количеств, найдем окончательно

$$\cos \varphi = \frac{1 + aa'}{\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{1+a'^2}}.$$

Так как a и a' изображают данные величины, то косинус угла φ будет известен; по известному же косинусу, найдем посредством тригонометрических таблиц и самый угол φ .

Когда рассматриваемые две прямые линии взаимно перпендикулярны, то $\varphi = 90^\circ$, и $\cos \varphi = 0$;

следовательно $1 + aa' = 0$, или $a' = -\frac{1}{a}$. Вольг условие, называемое обыкновенно *условием перпендикулярности*.

Переходим теперь къ уравнениямъ прямой линіи, разсматриваемой въ пространствѣ. Опредѣлимъ данную прямую KL (черт. 15 Листъ VIII) къ тремъ прямоугольнымъ координатнымъ плоскостямъ XY , XZ , YZ , и пусть будутъ $\overline{OP} = x$, $\overline{PN} = y$, $\overline{NM} = z$ координаты какой нѣ есть точки M , взятой на этой прямой. Если изъ какой нѣ есть другой точки t линіи KL опустимъ перпендикуляръ tn на плоскость XY , и соединимъ попомъ прямою линіею точки N и n , то Nn будетъ *протью* предложенной прямой на плоскости XY . Очевидно, что плоскость, перпендикулярная къ координатной XY , и проходящая чрезъ Nn , будетъ заключать прямую KL . Означимъ эту плоскость чрезъ M_1 . Подобнымъ образомъ, опустивъ перпендикуляры M_2 и m_2 на плоскость YZ , и проведя попомъ чрезъ прямую m_2 плоскость, перпендикулярную къ координатной YZ , увидимъ, что эта новая плоскость, которую назовемъ M_2 , заключаетъ предложенную прямую KL . Геометрическое мѣсто пересѣченія двухъ плоскостей M_1 и M_2 будетъ предложенная прямая линія KL . На этомъ основаніи можемъ заключить, что совокупность уравненій, опредѣляющихъ плоскости M_1 и M_2 , принадлежитъ разсматриваемой прямой KL . Уравненіе первой плоскости, или, что все равно, уравненіе ея слѣда Nn , будетъ $y = ax + b$, разумѣя подъ a знакомъ угла PTN , составленнаго направленіемъ nN съ положительною полу-осью OX , а подъ b разстояніе точки пересѣченія прямой Nn съ осью y -овъ отъ начала координатъ O . Уравненіе плоскости M_2 будемъ $z = a'y + b'$, гдѣ a' и b' изобразятъ соотношенія: изъ же значенія въ разсужденіи координатныхъ осей y -овъ и z -овъ. Смол. PLAN, PROJECTION. Мы употребили въ уравненіяхъ первой и второй плоскости одну и ту же переменную y потому что всѣ точки прямой KL находятся въ одно время на обѣихъ плоскостяхъ, въ слѣдствіе чего координаты этихъ точекъ должны быть одинаковы для обѣихъ плоскостей M_1 и M_2 .

И такъ, уравненій прямой KL , разсматривае-

мой въ пространствѣ, будутъ

$$y = ax + b \quad \text{и} \quad z = a'y + b'.$$

Если исключимъ y изъ этихъ уравненій, то получимъ

$$z = a''x + b'',$$

гдѣ $a'' = aa'$, $b'' = ba' + b'$. Совокупность двухъ какихъ нѣ есть изъ трехъ уравненій

$$(2) \quad y = ax + b, \quad z = a'y + b', \quad z = a''x + b''$$

во всякомъ случаѣ опредѣлитъ прямую, отнесенную къ тремъ координатнымъ плоскостямъ. Отсюда можемъ заключить, что всякая прямая, отнесенная къ тремъ прямоугольнымъ координатнымъ плоскостямъ, опредѣляется посредствомъ двухъ своихъ проэкцій на двѣ какія нѣ есть изъ трехъ плоскостей XY , YZ , XZ .

Совокупность двухъ какихъ нѣ есть изъ уравненій (2) можно замѣнить двойнымъ равенствомъ, симметрическимъ относительно всѣхъ трехъ координатъ x , y , z . Для этого изобразимъ чрезъ x_0 , y_0 , z_0 координаты какой нѣ есть определенной точки разсматриваемой прямой, напиримръ, точки t (черт. 15), а чрезъ α , β , γ углы, составленные направленіемъ KL , или, что все равно, линіею OS , параллельною KL , съ тремя положительными полу-осями OX , OY , OZ . Сверхъ того, пусть будетъ r длина tM . Проекція линіи tM на ось OX будетъ длина rP , которая, какъ извѣстно изъ Тригонометріи, равна $r \cos \alpha$; съ другой стороны $rP = x - x_0$, почему $r \cos \alpha = x - x_0$. Точно такимъ образомъ найдемъ $r \cos \beta = y - y_0$ и $r \cos \gamma = z - z_0$. Изъ этихъ равенствъ получимъ $r = \frac{x - x_0}{\cos \alpha}$, $r = \frac{y - y_0}{\cos \beta}$, $r = \frac{z - z_0}{\cos \gamma}$. Следовательно

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\cos \beta} = \frac{z - z_0}{\cos \gamma}.$$

Это двойное равенство опредѣляетъ прямую линію, отнесенную къ тремъ прямоугольнымъ координатнымъ плоскостямъ.

Разсматриваніе одной или нѣсколькихъ прямыхъ въ пространствѣ приводитъ къ многимъ вопросамъ, которые легко рѣшаются посредствомъ уравненій сихъ прямыхъ. Приведемъ рѣшеніе одной задачи, состоящей въ опредѣленіи условия, которое должно удовлетворяться, чтобы двѣ прямыя, данныя по ихъ уравненіямъ, пересѣкались, или, что все равно, находились въ

одной плоскости. Пусть будутъ

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-x_0}{\cos \alpha_0} = \frac{y-y_0}{\cos \beta_0} = \frac{z-z_0}{\cos \gamma_0} \\ \frac{x-x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{y-y_1}{\cos \beta_1} = \frac{z-z_1}{\cos \gamma_1} \end{array} \right.$$

уравнения данныхъ двухъ прямыхъ. Если онѣ пересѣкаются, то для точки взаимнаго ихъ пересѣченія будемъ $X=x$, $Y=y$, $Z=z$. Въ этомъ предположеніи, изобразивъ чрезъ r_0 каждую изъ трехъ первыхъ дробей, а чрезъ r_1 каждую изъ трехъ вторыхъ, получимъ

$$\begin{aligned} x &= r_0 + r_0 \cos \alpha_0, & y &= r_0 + r_0 \cos \beta_0, & z &= r_0 + r_0 \cos \gamma_0 \\ x &= r_1 + r_1 \cos \alpha_1, & y &= r_1 + r_1 \cos \beta_1, & z &= r_1 + r_1 \cos \gamma_1; \end{aligned}$$

сдѣлавъ слѣдующее

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= r_1 \cos \alpha_1 - r_0 \cos \alpha_0 \\ y_1 - y_0 &= r_1 \cos \beta_1 - r_0 \cos \beta_0 \\ z_1 - z_0 &= r_1 \cos \gamma_1 - r_0 \cos \gamma_0. \end{aligned}$$

Если помножимъ первое уравненіе на λ , второе на μ , третье на ν , и сложимъ, то получимъ

$$\begin{aligned} \lambda(x_1 - x_0) + \mu(y_1 - y_0) + \nu(z_1 - z_0) &= \\ &= r_1(\lambda \cos \alpha_1 + \mu \cos \beta_1 + \nu \cos \gamma_1) \\ &\quad - r_0(\lambda \cos \alpha_0 + \mu \cos \beta_0 + \nu \cos \gamma_0). \end{aligned}$$

Опредѣлимъ теперь λ , μ , ν такъ, чтобы

$$\begin{aligned} \lambda \cos \alpha_0 + \mu \cos \beta_0 + \nu \cos \gamma_0 &= 0 \\ \lambda \cos \alpha_1 + \mu \cos \beta_1 + \nu \cos \gamma_1 &= 0; \end{aligned}$$

найдемъ двойное равенство

$$\frac{\lambda}{\cos \beta_0 \cos \gamma_1 - \cos \gamma_0 \cos \beta_1} = \frac{\mu}{\cos \gamma_0 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_1} = \frac{\nu}{\cos \alpha_0 \cos \beta_1 - \cos \beta_0 \cos \alpha_1},$$

въ слѣдствіе котораго, уравненіе

$$\lambda(x_1 - x_0) + \mu(y_1 - y_0) + \nu(z_1 - z_0) = 0$$

приметъ видъ

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} (x_1 - x_0)(\cos \beta_0 \cos \gamma_1 - \cos \gamma_0 \cos \beta_1) \\ + (y_1 - y_0)(\cos \gamma_0 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_1) \\ + (z_1 - z_0)(\cos \alpha_0 \cos \beta_1 - \cos \beta_0 \cos \alpha_1) \end{array} \right\} = 0.$$

Вотъ уравненіе, которое должно удовлетворяться, чтобы разсматриваемыя двѣ прямыя пересѣкались. Впрочемъ, необходимо замѣтить, что оно удовлетворяется и въ томъ случаѣ, когда прямыя параллельны между собою, ибо, въ этомъ предположеніи, найдемъ

$$\begin{aligned} \cos \beta_0 \cos \gamma_1 - \cos \gamma_0 \cos \beta_1 &= 0 \\ \cos \gamma_0 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_0 \cos \gamma_1 &= 0 \\ \cos \alpha_0 \cos \beta_1 - \cos \beta_0 \cos \alpha_1 &= 0. \end{aligned}$$

Два какия ни есть въ сихъ трехъ уравненій выражающъ условіе параллельности двухъ разсматриваемыхъ прямыхъ. Легко удостовѣриться,

что третье уравненіе есть слѣдствіе двухъ остальныхъ.

Когда, вѣсто формулы (3), употребимъ уравн. (2) для изображенія двухъ прямыхъ, то получимъ для первой прямой: $x=ax+b$, $y=a'z+b'$ для второй прямой: $x=Ax+B$, $y=A'z+B'$.

Исключая x , y , z изъ сихъ четырехъ уравненій, найдемъ условіе

$$(A-a)(B'-b')=(A'-a')(B-b),$$

равнозначущее съ (4), но представляющееся въ простѣйшемъ видѣ.

DROITE. (Мех.) **ПРЯМАЯ.** — **ПРУТЬ.** *Drotte flexible, rigide, extensible, inextensible* и проч. *Гибкая, твердая, растяжимая, нерастяжимая* прямая. Смол. **FLEXIBLE, RIGIDE, EXTENSIBLE, INEXTENSIBLE** и проч.

DU

DUCTIBILITÉ или **DUCTILITÉ, MALLÉABILITÉ.**

(Физ.) **ТЯГУЧЕСТЬ, КОВКОСТЬ.** Способность нѣкоторыхъ металловъ, и въ особенности металловъ, плнуться въ проволоку и превращаться въ тонкіе листы отъ дѣйствія сильнаго давленія или удара молота. Первое свойство преимущественно называется *ductibilité* (*тягучесть*), а второе, *malleabilité* (*ковкость*). Степень тягучести и ковкости различныхъ металловъ опредѣляется тонкостью получаемыхъ изъ нихъ проволокъ и листовъ. Впрочемъ, должно замѣтить, что способность одного и того же металла плнуться въ проволоку и коваться въ листъ не всегда одинакова; напримѣръ, желѣзо плнется въ весьма тонкую проволоку, а не можетъ быть превращено въ такой же по соразмѣренности тонкій листъ.

DUCTIBLE или **DUCTILE, MALLÉABLE.** **ТЯГУЧИЙ, КОВКИЙ.** Смол. выше.

DUODÉCADIQUE или

DUODÉCIMAL. (Ариф.) **ДВѢНАДЦАТЕРИЧНЫЙ.**

Système duodécimal; двѣнадцатеричная система. *Progression duodécimale*; двѣнадцатеричная прогрессія, то есть, геометрическая прогрессія

$$1, 12, 12^2, 12^3, 12^4 \text{ и проч.}$$

ARITHÉTIQUE DUODÉCIMALE. Двѣнадцатеричная, двѣнадцатеричная, двѣнадцатеричная Арифметика. Арифметическая система счисления, въ которой упо-

применяют двенадцать знаков. Основанием двенадцатеричной Арифметики служат геометрическая прогрессия

1, 12, $12^2=144$, $12^3=1728$, $12^4=20736$, и проч. такъ что 1 на второмъ мѣстѣ (считая отъ правой руки къ лѣвой) изображаетъ двенадцать, на третьемъ, сто сорокъ четыре, на четвертомъ, тысячу семь сотъ двадцать восемь, и такъ далѣе.

Для изображенія первыхъ девяти чиселъ по двенадцатеричной системѣ, можно удержатъ цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Но для означенія десяти и одиннадцати должно ввести особенные знаки; пусть $\text{десять} = a$, $\text{одиннадцать} = b$. Сверхъ того, сохранимъ знак 0 (нуль), который, какъ и въ десятичной Арифметикѣ, будемъ употреблять для означенія отсутствія единицъ различныхъ разрядовъ. При такихъ условіяхъ, послѣдовательныя числа изображены по двенадцатеричной системѣ слѣдующимъ обра-

По двенадцатеричной системѣ.	1 = 1	По десятичной системѣ.	1a = 22	По десятичной системѣ.
	2 = 2		1b = 23	
	3 = 3		20 = 24	
	
	9 = 9		26 = 30	
	a = 10		
	b = 11		42 = 50	
	10 = 12		
	11 = 13		84 = 100	
	12 = 14		100 = 144	
		6b4 = 1000	
	18 = 20		1000 = 1728	
	19 = 21		и проч.	

Что касается до перехода отъ десятичной системы къ двенадцатеричной, то этотъ вопросъ рѣшается почти такъ, какъ объяснено въ главѣ BINAIRE (ARITHMÉTIQUE) для двадцатеричной системы. Только, въ настоящемъ случаѣ, вмѣсто дѣлителя 2, слѣдуетъ употребить число двенадцать, и, при полученіи остатка, равнаго десяти или одиннадцати, пишемъ a или b . Для перехода же отъ двенадцатеричной системы къ десятичной, надобно предварительно составить таблицу послѣдовательныхъ степеней числа 12; поможемъ уже, чрезъ простое

сложеніе, получаемъ число, которое имѣли въ виду выразить по десятичной системѣ.

Замѣтимъ, что основаніе двенадцатеричной системы, то есть число двенадцать, имѣетъ четыре дѣлителя 2, 3, 4 и 6, между тѣмъ какъ основаніе общепринятаго счисленія, именно число десять, разлагается только на два множителя 2 и 5. Въ этомъ отношеніи двенадцатеричная система имѣетъ частно преимущество передъ десятичною. Такъ напримѣръ дуги $35^\circ 15' 25''$, $46^\circ 10' 50''$, выражающіяся по десятичной системѣ безконечными десятичными дробями..... $35^\circ,2569444...$ и $46^\circ,1805555...$ изобразятся конечными двенадцатеричными дробями $26^\circ,51$ и $3a^\circ,22$, которыхъ прощѣ первыхъ.

Въ заключеніе приводимъ по одному примѣру первыхъ четырехъ арифметическихъ дѣйствій по системѣ двенадцатеричной.

Примѣръ сложенія:

$$\begin{array}{r} a123574ab \\ 6787787a \\ 123567a1 \\ ba5ab1a2 \\ \hline 178bab1 \\ b90528a21 \end{array}$$

Примѣръ вычитанія:

$$\begin{array}{r} 1400b5a63 \\ 9ab0639a \\ \hline 611ab665 \end{array}$$

Примѣръ умноженія:

$$\begin{array}{r} 73a0b6a \\ 8a3b \\ \hline 6862a732 \\ 19b62a86 \\ 51243781 \\ \hline 4a687868 \\ 54a38681792 \end{array}$$

Примѣръ дѣленія:

$$\begin{array}{r|l} 72b930a8b & 36a70b \\ 71921a & 2041 \\ \hline 12712a8 \\ 1236438 \\ \hline 36a70b \\ 36a70b \\ \hline 0 \end{array}$$

DUODÉCUPLE и
DUODÉNAIRE. ДВНАДЦАТЕРИЧНЫЙ. Смол.
DUODÉCIMAL.

DUPLICATION. (Ариф. и Геом.) **УДВОЕНИЕ.** Дѣйствіе, посредствомъ котораго удвоимъ, то есть помножимъ на 2 какую нибудь величину

DUPLICATION DU CUBE (PROBLÈME DE LA)
 или **PROBLÈME DÉLIQUE. ЗАДАЧА ОБЪ**

УДВОЕНІИ КУБА или Делійская задача состояла въ опредѣленіи стороны такого куба, который, по объѣму своему, былъ бы вдвое больше другаго, даннаго куба.

По преданіямъ древней Греческой Мифологіи, задача объ удвоеніи куба получила свое происхожденіе по поводу слѣдующаго случая: чума опустошала Аппику; бѣдствующіе Афиняне послали на островъ Делосъ вопросить оракула о мѣрахъ, который надлежало имъ принять для прекращенія моровой заразы. Пророчатель отвѣчалъ, что для этого они должны *удвоить алтарь* храма, посвященнаго Аполлону въ Афинахъ; алтарь, на который указывалъ оракулъ, былъ правильнаго кубическаго вида. Требованіе показало маловажнымъ: но нѣсколько неудачныхъ попытокъ вскорѣ удостовѣрили Афинлянъ, что рѣшеніе предложенной имъ задачи не такъ просто, какъ они сначала полагали. Въ недоумѣніи, они обратились къ Греческимъ геометрамъ, въ числѣ которыхъ былъ Платонъ, знаменитѣйшій изъ нихъ. По этому баснословному преданію, о которомъ повѣствуетъ одинъ древній писатель, *Филопонъ (Philopponus)*, задача объ удвоеніи куба получила свое происхожденіе за IV вѣка до Р. Х. на островѣ Делосѣ, и вошъ почему она и теперь часто называется *Делійскою*.

Эратосвенъ приводитъ другое обстоятельство, по поводу котораго будто бы возникъ вопросъ объ удвоеніи куба. Онъ рассказываетъ, что какой-то прагматъ ввелъ на сцену Царя Миноса, воздвигнутаго надгробный памятникъ сыну своему Главку. Монументъ былъ кубическаго вида, и имѣлъ сто локтей во всѣ стороны. Размѣры памятника показались Миносу слишкомъ незначительными, и онъ велѣлъ удвоить его. Этотъ вопросъ былъ предложенъ всѣмъ геометрамъ того времени, и ни одинъ изъ нихъ не могъ найти его рѣшенія.

Каково бы ни было происхожденіе Делійской задачи, но можно сказать утвердительно, что она относится къ временамъ весьма отдаленнымъ. Древніе пытались рѣшить сей вопросъ *геометрически*, то есть, помощію линейки и циркуля, или, что всё равно, употребляя только прямую линію и кругъ. Но съ этой стороны всѣ ихъ усилія остались безплодными, что и весьма естественно, ибо рѣшеніе Делійской задачи приводитъ къ построенію кубическаго корня, которое не можетъ быть произведено посредствомъ прямыхъ и круговыхъ линій, опредѣляющихъ пересѣченіемъ своихъ только корни квадратныхъ уравненій. Однакожъ, несмотря на признанную невозможность *геометрическаго* рѣшенія, есть еще и теперь мечтатели-математики, которые не теряютъ надежды найти это рѣшеніе. —

Сколько извѣстно, *Гиппократъ Хиосскій*, жившій около середины V вѣка до Р. Х., первый занимался Делійскою задачею. Онъ показалъ, что ея рѣшеніе приводится къ построенію двухъ среднихъ геометрическихъ между стороною даннаго куба и тою же стороною удвоеннаго. И такъ, если положить, что сторона даннаго куба равна a , и изобразить чрезъ x и y искомыя двѣ среднія, то получимъ двѣ пропорціи: $a : x :: x : y$ и $x : y :: y : 2a$, изъ которыхъ выведемъ $x^2 = 2a^2 \cdot x$ или $x = \sqrt{2}a^{\frac{2}{3}}$. Слѣдовательно, первая изъ двухъ среднихъ пропорциональныхъ будетъ искомая сторона удвоеннаго куба.

Вскорѣ послѣ Гиппократа, эта задача обратила на себя особенное вниманіе Греческихъ геометровъ. *Платонъ* изобрѣлъ особаго рода инструментъ для построенія двухъ среднихъ геометрическихъ, и слѣдовательно рѣшилъ *механически* Делійскую задачу. *Архимъ*, другъ Платона, *Евдокій*, *Менелъ* и другіе геометры того времени, предложили свои рѣшенія, вообще основанныя на построеніи коническихъ и другихъ кривыхъ. Одинъ изъ способовъ Менелая, состоящій въ употребленіи двухъ параболъ, объясненъ въ нашемъ Лексиконѣ въ статьѣ: **CONSTRUCTION DES ÉQUATIONS**, къ которой и отсылаемъ читателей. Другой, его же, основанъ на построеніи обыкновенной параболы и равносложной гиперболы, описанной къ своимъ

асимптотич. Параметр параболы равен стороне данного куба; вершина ее совпадает с центром гиперболы, а ось, с одною из асимптот. Степень гиперболы определяется произведением стороны данного куба на ту же удвоенную сторону. Легко показать, что ордината точки пересечения рассматриваемых двух кривых, изобразить сторону удвоенного куба. Действительно, если означим чрез a сторону данного куба, то уравнение параболы будет $y^2 = ax$, а гиперболы $xy = 2a^2$; исключая x , найдем $y^2 = 2a^3$ или $y = \sqrt{2a^3}$.

После Платона и современных ему геометров, задача об удвоении куба часто была предметом более или менее удачных попыток. *Никмедь* (в III столетии до Р. Х.) изобрел *конхонду* (Смол. CONCHOÏDE), посредством которой легко могут быть построены корни уравнений 3-ей и 4-ой степени. *Эратосфену*, жившему около того же времени, приписывают изобретение инструмента, известного под названием *мезолаб* (Смол. MESOLABE), и посредством которого решалась механически задача об удвоении куба. Знаменитый *Аполлоний*, живший за два столетия до Р. Х., решил Делийскую задачу посредством пересечения круга с гиперболою. *Герон Александрийский* (в середине II века до Р. Х.), *Филон* и некоторые другие геометры, жившие до Р. Х., предложили также свои решения. Александрийский геометр *Папп* (*Pappus*) (в V веке по Р. Х.), в известном сочинении своем *Alexandrini Collectiones mathematicae*, предлагал остроумный способ для построения двух средних пропорциональных. Впоследствии *Диокл*, Греческий же геометр, изобретением *циссоиды* усовершенствовал способ *Паппа*. В слове *ЦИССОИДЕ* нашего Лексикона читатели найдут решение Делийской задачи посредством циссоиды. Наконец скажем, что многие математики позднейших столетий занимались также этим вопросом. Знаменитый *Декарт*, создавший Аналитическую Геометрию, приложил свой анализ и к Делийской задаче: предложившая ему решения приводила к определению пересечения круга с одною из конических кривых.

В заключение приведем весьма простое построение двух средних геометрических между двумя данными линиями. Предлагаемое решение, требующее только описания круга и обыкновенной параболы, заключает в себя как частный случай задачу об удвоении куба.

Пусть будут a и b (черт. 16 Лист V III) данные две линии; проведем прямоугольный координатный ось OX , OY , и от точки O отложим линию $OA = \frac{1}{2}a$; потом возставим из A перпендикуляр AC , равный $\frac{1}{2}b$, принимаем C за центр, из которого радиусом..... $CO = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ описываем круг $ODEFG$. Далее, строим обыкновенную полу-параболу OKL так, чтобы вершина ее совпала с началом координат O , а ось, с осью абсцисс OX ; параметр параболы берем равным данной прямой a . В этом предположении, координаты точки пересечения M круга с параболою, изобразят искомым две средние пропорциональные, именно: ордината PM будет равняться первой средней пропорциональной $\sqrt{a^2 b}$, а абсцисса OP — второй $\sqrt{ab^2}$. Действительно, уравнение рассматриваемого круга будет

$$(x - \frac{1}{2}a)^2 + (y - \frac{1}{2}b)^2 = (\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2})^2,$$

или

$$x^2 - ax + y^2 - by = 0;$$

что касается до параболы, то она, как известно, определяется уравнением

$$y^2 = ax.$$

Исключая y из этих двух уравнений, получим для координат точки пересечения M

$$x = OP = \sqrt{ab^2} \text{ и } y = PM = \sqrt{a^2 b},$$

что и имеем в виду доказать.

Для решения Делийской задачи положим, что сторона данного куба $= a$. Если примем $b = 2a$, то ордината PM изобразит сторону искомого куба, ибо в этом предположении найдемся

$$PM = \sqrt{a^2 \cdot 2a} = \sqrt{2a^3}.$$

Нельзя сомневаться, что самый точный способ для графического решения задачи об удвоении куба состоит в арифметическом определении кубичного корня из 2, можно пропустить это

извлеченіе: съ какою угодно точностію. Такъ, напримѣръ, найдя что $\sqrt{2} = 1,2599 \dots$, сложить только къ спорахъ a данного куба прибавить $0,2599 \dots$ часть отъ a , что легко можетъ быть сдѣлано посредникомъ десятичнаго масштаба; найденная такимъ образомъ линія изобразить сторону удвоеннаго куба. —

Для дальнѣйшихъ подробностей объ Делійской задачѣ отсылаемъ читателей къ 1-му тому *Histoire des Mathématiques par Montucla* и преимущественно къ сочиненію того же автора: *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle etc. avec une addition concernant les problèmes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle.*

DUPPLICITÉ D'IMAGES. (Опти.) **ДВОЙСТВЕННОСТЬ ИЗОБРАЖЕНІЯ.** *Ce verre cause une duplicité d'objets; это стекло показываетъ предметы двойны.*

DURÉE. (Мех.) **ПРОДОЛЖЕНІЕ, ВРЕМЯ.** *Pendant la durée du mouvement; въ продолженіе движенья. Durée de l'oscillation d'un pendule; время качанія, размаха маятника.*

DURETÉ. ЖЕСТКОСТЬ. Смол. ниже.

DURS (CORPS). (Физ.) **ЖЕСТКІЯ ТѢЛА.** Свойство твердаго тѣла, заключающаго сопротивленіе къ перемѣщенію своихъ составныхъ частей, называется *жесткостью*. Жесткія тѣла одарены способностію терпѣть и полировать другія, болѣе мягкія тѣла. Изъ всѣхъ извѣстныхъ тѣлъ самое жесткое есть алмазъ.

ДУ.¹

DYADIQUE или **BINAIRE, ДІАДИЧЕСКІЙ.** Смол. **BINAIRE (ARITHMÉTIQUE).**

DYNAME. (Прикл. Мех.) **ДИНАМА.** Терминъ, предложенный некоторыми авторами, занимавшимися Прикладною Механикою, и подъ которымъ онъ разумѣлъ единицу количества непрерывнаго дѣйствія. За динаму принимали ось 100 килограммовъ, поднятый на высоту одного метра въ одну секунду времени. Смол. **MACHINE.**

DYNAMÈTRE или **DYNAMOMÈTRE.** По Нѣмецки Dynameter. **ДИНАМЕТРЪ, динамометръ.** Оптический инструментъ. Смол. **DYNAMOMÈTRE.**

DYNAMIE или **UNITÉ DYNAMIQUE.** (Прикл. Мех.)

ДИНАМІЯ, ДИНАМИЧЕСКАЯ ЕДИНИЦА.

Подъ этимъ наименованіемъ нѣкоторые авторы разумѣютъ единицу количества производимой работы. Такъ какъ величина, называемая въ Прикладной Механикѣ *работою* или *дѣйствіемъ* определяется произведеніемъ некотораго вѣса на опредѣленную длину, то эту величину и выражаютъ въ частяхъ извѣстныхъ единицъ, напримѣръ килограммовъ и метровъ. Для удобства при измѣреніи количества дѣйствія условился принять особенную единицу, которую назвали *динамію*; она выражается вѣсомъ 1000 килограммовъ, поднятымъ на высоту одного метра. Этой самой единицѣ Г. Коріолис*) предлагаетъ дать названіе *динамоды* (*dynamode*), болѣе свойственное пошому, что Греческая этимологія этого слова заключаетъ въ себѣ понятія о силѣ и о пространствѣ. — При измѣреніи малыхъ количествъ дѣйствія употребляютъ нынѣ во Франціи вѣсомъ динамоды другую единицу, названную *килограмметромъ* (*kilogrammètre*). Килограмметръ составляетъ тысячную часть динамоды, и следовательно равенъ вѣсу одного килограмма, поднятому на высоту одного метра.

DYNAMIQUE. ДИНАМИКА, СЛОЗУЧЕНІЕ.

Отъ Греческ. *dinamis, сила, могущество.* Наука, занимающаяся законами дѣйствія силъ на какую нѣ есть снѣмену въ предположеніи, что разсуждающая сила не уничтожается знаніемъ, а производитъ движеніе. Лейбницъ употребилъ первый наименованіе *Динамики*, разумѣя подъ этимъ терминомъ науку о движеніи.

§ 1. *Динамика*, въ ряду наукъ математическихъ, должна занять мѣсто возлѣ Геометріи, ибо она занимаетъ начало и Числаго Алгебры, и Геометріи. Въ наукѣ о движеніи допускаютъ существованіе пространства, вещества и времени, несмотря на возраженія, которыми бытіе сихъ прелѣ элементовъ подвергалось со стороны физиковъ. Динамика, не входя въ разбирательство сихъ возраженій, предоставляетъ этою пруду Метафизикѣ, и довольствуется одними указаніями чувствъ и здраваго разсудка. Невозможно сдѣлать опредѣленія пространства, вещества и времени: понятія о нихъ принадлежатъ къ числу первоначальныхъ, и следовательно

*) Du calcul de l'effet des machines, par Coriolis Paris, 1829 г. стр. 33

но не могутъ быть приведены къ простѣйшимъ.

Непосредственное наблюденіе показываетъ, что отдѣльныя части вещества, называемыя *тѣлами*, перемѣняютъ свое положеніе однѣ въ разсужденіи другихъ. Такъ какъ понятіе о взаимномъ положеніи тѣлъ есть чисто геометрическое, то и понятіе о перемѣнѣ положенія не можетъ представлять ничего темнаго нашему уму. Положеніе измѣняется, когда опредѣляющія его данныя измѣняются сами; напротивъ того, оно не перемѣняется, когда данныя остаются однѣ и тѣ же. Если тѣло *A* перемѣняетъ свое положеніе въ разсужденіи другого тѣла *B*, то говоримъ, что первое движется въ отношеніи ко второму; напротивъ того, если *A* не перемѣняетъ своего положенія въ разсужденіи *B*, то говоримъ, что *A* находится въ покоѣ относительно *B*. И такъ, понятія о движеніи и о покоѣ, какъ зависящія отъ идеи, которую мы составляемъ себѣ о взаимномъ положеніи тѣлъ, должны быть вразумительны для насъ. Нельзя и движеніе нельзя назвать свойствомъ тѣлъ: они скорѣе означаютъ взаимныя соотношенія сихъ послѣднихъ. Нельзя также сказать, чтобы эти два состоянія были противоположны одно другому, ибо очень можетъ случиться, что тѣло перемѣняетъ свое положеніе въ разсужденіи другого тѣла, а не перемѣняетъ въ отношеніи къ шрепъему. Въ такомъ случаѣ разсматриваемое тѣло будетъ въ одно время и въ движеніи и въ покоѣ.

§ 2. Древніе мысли самыя ограниченныя понятія о законахъ движенія: по всей вѣроятности имъ были извѣстны только общія свойства равнокрѣпнаго движенія. Динамика, какъ ученіе самостоятельное, есть созданіе новѣйшихъ времъ. Знаменитый Флорентинецъ *Галилей* положилъ первыя основанія сей науки въ сочиненіи своемъ: *Discorsi e dimostrazioni mathematiche intorno a due nuove scienze*, изданномъ въ первый разъ въ Лейденѣ 1638 года. Онъ нашелъ законъ ускоренія свободно падающихъ тяжелыхъ тѣлъ, и распространилъ его на движеніе по наклонной плоскости. Это былъ первый, и, можно сказать, самый важный шагъ въ Динамикѣ. Онъ же усмотрѣлъ начало самостоятельности, и первый употребилъ въ Механикѣ правило совокупленія

скоростей, приложивъ его къ опредѣленію законовъ параболическаго движенія брошенныхъ тѣлъ. Свойство маятника, по которому зноуть приборъ можетъ быть употребленъ для измѣренія времени, замѣчено также Галилеемъ; См. CHUTE DES GRAVES, BALLISTIQUE, PENDULE. *Торригелли*, ученикъ его, тщательнѣе изучившій открытія своего наставника, напечаталъ въ 1644 году книгу: *De motu gravium naturaliter accelerato*, въ которой заключаются примѣчательныя изслѣдованія о паденіи тяжелыхъ тѣлъ и новыя предложенія о параболическомъ ихъ движеніи. Изъ числа любопытныхъ испитій, выведенныхъ имъ, приведемъ слѣдующее свойство: если изъ опредѣленной точки, но подъ разными наклоненіями относительно горизонта, будутъ брошены тѣла съ одинаковыми начальными скоростями, направленія которыхъ заключаются въ одной вертикальной плоскости, то кривая, обертывающая всѣ параболы, описанныя тѣлами, будетъ также парабола. Вершина обертывающей параболы будетъ находиться на вертикальной линіи, проходящей чрезъ точку метанія, а фокусъ совпадетъ съ этою точкою; длина параметра опредѣляется удвоенъ вертикальную высоту, на которую поднимется тѣло, когда ему сообщена будетъ начальная скорость, общая всѣмъ бросаемымъ тѣламъ.

Около того же времени знаменитый Французскій философъ *Декартъ* и Англійскій геометръ *Вальисъ* предложили свои умозрѣнія о Динамикѣ. Но въ зномъ отношеніи труды Декарта были вообще неудовлетворительны. Его теорія соударенія тѣлъ, которою онъ въ особенннсти занимался, была основана на началѣ ошибочномъ. Вальисъ первый предложилъ истинныя понятія о сообщеніи движенія при соудареніи тѣлъ.

Гукъ, родившійся въ 1626 а умершій въ 1695 году, усовершенствовалъ всѣ опытія Галилея въ Динамикѣ, и значительнѣе обогатилъ эту науку собственными трудами. Онъ предложилъ теорію движенія маятника и вообще тяжелыхъ тѣлъ по даннымъ кривымъ. Основываясь на своей теоріи, онъ доказалъ примѣчательное свойство *тавтохронизма* циклоиды; Смол. CYCLOIDE, TAUTOCHRONISME. Онъ же первый рѣшилъ извѣстный вопросъ о *центрѣ качанія*; Смол. PENDULE COMPOSÉE.

Но самая важная заслуга Гюгенса в науку о движении есть, без сомнения, его теория центральных сил, рассматриваемых в кругу. Это открытие напечатано в его сочинении *Horologium oscillatorium*, изданном в 1673 году.

Совокупление теории центральных сил в круг с теорией эволюции, придуманною также Гюгеном, легко могло привести к общему закону центральных сил, рассматриваемых при движении по каким ни есть кривым. Но это обобщение ускользнуло от проницательности Гюгенса, а впоследствии было усмотрено Ньютоном. Сей великий геометр, в сочинении своем *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, предложил ртнее множество динамических задач, относящихся преимущественно к движению небесных тел. Самое важное учение, изложенное Ньютоном в его *Началах*, есть теория всеобщаго тяготения, выведенная на основании трех законов, найденных в начале XVII века *Веплером* посредством наблюдений. См. ATTRACTION, KEPLER (LOIS DE). Появление безмерного творения Ньютона составляет блистательнейшую эпоху как в дмивности Числой Математики, так и Динамики.

Съ конца XVII столетия наука о движении сдѣлалась постоянным предметомъ занятий для всехъ первостепенныхъ геометровъ. Трудами *Лейбница*, братьевъ *Бернулли*, маркиза *де Л'Опиталъ*, *Германа*, *Маклорена*, *Данила Бернулли*, *Эйлера*, *Клеро*, *Д'Аламберта*, *Лагранжа*, *Лапласа*, *Остроградскаго*, Динамика, можно сказать, достигла теперь степени точной науки, дальнейшее успѣхи которой зависать только отъ усовершенствованій математическаго анализа.

Мы улачиваемъ объ ея ходѣ въ концѣ XVII и въ продолженіи первой трети XVIII столетія; въ эпоху промежутокъ времени она непрерывно обогащалась отдѣльными теоріями, но не составляла еще цѣлаго, самостоятельнаго учения. Математики, рѣшающіе многочисленные динамическіе задачи, заготовляли обильный запасъ для новыхъ дѣланій. Чишатели найдутъ во многихъ спадкахъ нашего Лексикона историческія подробности и рѣшеніе разныхъ динамическихъ задачъ. См. ATTRACTION, CAPILLAIRE (ACTION), COEXISTANCE DES

PETITES OSCILLATIONS, CHOC, CORPS (PROBLÈME DES TROIS), FORCE, HYDRODYNAMIQUE, INERTIE, PENDULE, ROTATION, и проч. и проч.

Приводимъ въ короткихъ словахъ труды *Эйлера*, *Д'Аламберта*, *Лагранжа*, *Лапласа* и *Остроградскаго*, поставившіе Динамику на эту степень совершенства, которой эта наука достигла въ наше время.

§ 3. *Эйлеръ* обогатилъ последовательно всѣ части Динамики. Сверхъ огромнаго числа Разсужденій, напечатанныхъ имъ въ *Комментаріяхъ Петербургской Академіи* и въ *Берлинскихъ Запискахъ*, онъ издалъ два отдѣльных сочиненія, въ которыхъ изложилъ рѣшеніе важнѣйшихъ динамическихъ вопросовъ. Первый трактатъ его*) содержитъ въ себѣ полную теорію движения матеріальной точки; онъ въ особенности примѣчательнъ по множеству помѣщенныхъ въ немъ частныхъ примѣровъ. Во второмъ трактатѣ**) рассматривается движеніе твердаго тѣла. Яснось изложенія и особенная легкость способовъ спавіять это сочиненіе на ряду съ самыми примѣчательными изъ твореній, которыми *Эйлеръ* обогатилъ всѣ отрасли математическихъ наукъ.

§ 4. Въ 1743 году вышла въ свѣтъ Динамика *Д'Аламберта****). Появленіе этого сочиненія безъ сомнѣнія имѣло счастливое вліяніе на успѣхи Динамики. *Д'Аламбертъ*, въ своемъ трактатѣ, предлагалъ общій способъ для приведенія въ уравненіе всякой динамической задачи, или, правильнѣе, показавъ какимъ образомъ посредствомъ особеннаго правила, рѣшеніе всякаго вопроса о движеніи можетъ быть приведено къ вопросу о равновѣсіи. *Азпоръ* приложилъ свое правило, къ рѣшенію многихъ динамическихъ задачъ, и между прочимъ къ вопросу о предвареніи равноденствій****). Для болѣе удобности

*) *Mechanica sive motus scientia analytica*, exposita Leonhardo Eulero. Petropoli, 1736 г. 2 тома in-4°.

**) *Theoria motus corporum seu regidorum*. Leonhardo Eulero, Rostoch, 1765.

***) *Traité de Dynamique* par D'Alembert, Paris 1743 г. 1 томъ in-4°. Второе изданіе этого трактата напечатано въ 1758 году. Оно содержитъ въ себѣ значительныя прибавленія противъ перваго. Последнее изданіе напечатано 1796 г.

****) *Recherches sur la précession des équinoxes*, 1 томъ in-4°, 1749 г.

въ приложенияхъ, повѣншіе математики измѣнили форму *Д'Аламбертова правила*; но сущность осталась безъ перемѣны. Мы думаемъ, что читатели прочтутъ не безъ любопытства изложение начала, о которомъ говорятъ, въ помѣ видѣ, въ какомъ оно было предложено самимъ Д'Аламбертомъ. Приводимъ слова алпора въ буквальный переводъ *).

О в щ а я З а д а ч а .

„Пусть будетъ система п тѣлъ, произвольно расположенныхъ одни въ разсужденіи другихъ; положимъ, что каждому изъ силъ тѣлъ сообщаютъ особое движеніе, которому оно не можетъ повиноваться, по причинѣ дѣйствія другихъ тѣлъ системы. Найдите движеніе, принимаемое каждымъ тѣломъ.“

Р а з л о ж е н і е .

„Пусть будутъ m, m', m'' и проч. тѣла, составляющія систему; положимъ, что имъ сообщены движенія u, u', u'' и проч., которыя, по причинѣ взаимодействія сихъ тѣлъ, должны измѣниться въ v, v', v'' и проч. Очевидно, что движеніе u , впечатлѣнное тѣлу m , можно разсматривать какъ бы составленнымъ изъ движенія v , которое m дѣйствительно принимаетъ, и другаго движенія p ; равнымъ образомъ, можно разсматривать движенія u', u'' и проч. соотношенно составленнымъ изъ движеній $v', p'; v'', p''$; и проч. Отсюда слѣдуетъ, что взаимное движеніе тѣлъ m, m', m'' и проч. не измѣнится, когда, вмѣсто движеній u, u', u'' ..., имъ будутъ впечатлѣны совокупныя движенія $v, p; v', p'; v'', p''$;.... Но, по предположенію, тѣла m, m', m'' и проч., по причинѣ существующей между ними взаимной связи, приняли движенія v, v', v'' и проч.; слѣдовательно, движенія p, p', p'' и проч. должны быть такого свойства, что они нисколько не ирреляцируютъ движеніямъ v, v', v'' ..., то есть: когда тѣламъ m, m', m'' ... будутъ сообщены движенія p, p', p'' ..., то эти самыя движенія должны взаимно уничтожаться, а система оставаться въ покоѣ“

„Отсюда выводимъ слѣдующее правило для опредѣленія движенія какого нѣ есть числа тѣлъ, дѣйствующихъ одни на другія: разложимъ движенія u, u', u'' ..., впечатлѣнные тѣламъ m, m', m'' ... каждое на два другія $v, p; v', p'; v'', p''$;.... такого свойства, чтобы 1°. тѣла m, m', m'' ..., получивъ только движенія v, v', v'' ..., сохранили бы сіи движенія не претѣствуя одно другому, и 2°. чтобы система оставалась въ равновѣсѣ, когда тѣламъ m, m', m'' ... будутъ сообщены только движенія p, p', p'' Очевидно, что v, v', v'' ... изображаютъ движенія, дѣйствительно принимаемыя тѣлами въ слѣдствіе взаимнаго ихъ дѣйствія, что и надлежало опредѣлить.“

Завѣсивши, что подъ движеніемъ Д'Аламбертъ разумѣетъ движущую силу, то есть, произведеніе массы тѣла на приложенную къ нему ускорительную силу, принимая въ соображеніе и направление сей послѣдней.

Мы сказали выше, что для удобности, правило Д'Аламберта обыкновенно выражаютъ другими образами. Пусть будутъ m, m', m'' ... массы, составляющія данную систему, а a, a', a'' ... ихъ скорости въ концѣ времени t . Положимъ что силы, дѣйствующія на систему, сообщали бы по собственнымъ своимъ направленіямъ, въ элементъ времени dt , скорости $u dt, u' dt, u'' dt$... массамъ m, m', m'' ..., если бы сіи послѣднія были совершенно свободны. Но по причинѣ связей, существующихъ въ системѣ, массы m, m', m'' ... не получаютъ скоростей $u dt, u' dt, u'' dt$..., а приобриаютъ, въ элементъ времени dt , разумѣея сверхъ первоначальныхъ скоростей a, a', a'' ..., изъ которыхъ другія скорости $v dt, v' dt, v'' dt$ Означимъ теперь чрезъ $p dt, p' dt, p'' dt$... потеряныя или приобритенныя скорости массами m, m', m'' ...; $v dt$ и $p dt$ будутъ составляющими скорости $u dt$; $v' dt$ и $p' dt$ то же въ разсужденіи $u' dt$, и проч. И такъ, вмѣсто силъ $mp, m'p', m''p''$..., которыя должны взаимно уравновѣшиваться, можно будетъ разсматривать составляющія каждой изъ нихъ. Но, очевидно, что сила mp есть равнодѣйствующая силы mu , взятой по собственному ея направленію, и силы mv , принимаемой въ противоположную сторону; слѣдовательно, въ разсматриваемой системѣ количества движенія $mu, m'u', m''u''$...

*) См. второе изданіе Д'Аламбертовой Механики, стран. 73.

сообщения массы $m, m', m'' \dots$, должны уравновешиваться с действительными количествами движения $mv, m'v', m''v'' \dots$ системы, взятыми в противоположную сторону направления $vdt, v'dt, v''dt \dots$.

Въ этомъ извѣщенномъ видѣ Д'Аламбертово правило представляло ту выгоду, что руководствуясь имъ, не имѣемъ надобности разсматривать потерянныя или приобретенныя скорости, а составляемъ прямо условныя уравненія равновѣсія между данными силами $mi, m'i', m''i'' \dots$ и неизвѣстными $mv, m'v', m''v'' \dots$.

§ 5. И такъ, посредствомъ Д'Аламбертова правила, динамическіе вопросы приводятся къ вопросамъ о равновѣсіи. Для рѣшенія сихъ послѣднихъ, еще до появленія въ свѣтъ Д'Аламбертовой Динамики, было открыто *Иваномъ Бернулли* общее правило, извѣстное подъ названіемъ *начала возможныхъ скоростей*; Смол. VIRTUELLES (PRINCIPE DES VITESSES). Очень вѣроятно, что Д'Аламбертъ не воспользовался сими открытіями потому что ни Иванъ Бернулли, ни его послѣдователи не показали, какими образомъ это начало должно быть употреблено при рѣшеніи всѣхъ вопросовъ о равновѣсіи. Мысль о сокращеніи начала Д'Аламберта съ началомъ возможныхъ скоростей принадлежала Лагранжу. На этомъ основаніи, въ Разсужденіи своемъ о либраціи луны, онъ составлялъ уравненія движенія сего спутника около его центра тяжести*). Въ 1788 году Лагранжъ напечаталъ свою *Аналитическую Механику***). Въ этомъ твореніи знаменитый геометръ предложилъ общую формулу, выражающую начало возможныхъ скоростей, и основалъ на ней рѣшеніе статистическихъ и динамическихъ задачъ, руководствуясь однимъ аналитическимъ пріемомъ, безъ пособія чертеней и соображеній геометрическихъ или механическихъ. Этимъ трудомъ Лагранжъ поставилъ Механику на степень новой отрасли чистаго анализа.

§ 6. Лапласъ, которому чистый и прикладной анализъ обязанъ сполна важными теор-

іями, съ особеннымъ пристрастіемъ и постоянствомъ занимаясь Физическою Астрономіею. Результатомъ его трудовъ было замѣчательное твореніе «*Небесная Механика*»). Въ ней авторъ подвелъ подъ общую шпичку всѣ астрономическія теоріи, разбросанныя по разнымъ сочиненіямъ и по отдѣльнымъ трактатамъ, и которыя въ совокупности обнимаютъ всѣ слѣдствія, проистекающія изъ закона всеобщаго тяготѣнія для малой солнечной системы. Рѣшеніе многихъ важнѣйшихъ вопросовъ изъ Физической Астрономіи предложены въ Небесной Механикѣ въ усовершенствованномъ или даже въ совершенно новомъ видѣ. Изъ числа примѣчательнѣйшихъ теорій, изложенныхъ въ этомъ твореніи, можно указать на слѣдующія: о *фигурѣ земли*, и преимущественно *объ опредѣленіи осей земли посредствомъ вѣковыхъ неравенствъ луны*; *объ неизмѣнности среднихъ разстояній планеты отъ земли*; *объ неравенствѣ среднихъ децетимій Юпитера и Сатурна*; *о вѣковыхъ уравненіяхъ луны*; *о приливѣ и отливѣ*. Здѣсь мѣсто упомянуть и о другомъ важномъ трудѣ Лапласа, описывающемъ также къ Механикѣ: *имъ разсужденіе сочиненіе: Exposition du Systeme du Monde***), которое заключаетъ въ себѣ изложеніе главнѣйшихъ результатовъ Небесной Механики, объединенныхъ безъ пособія аналитическихъ формулъ.

§ 7. Для полноты предмета, здѣсь было бы благо очерка успѣховъ Динамики, должно хотя въ короткихъ словахъ указать на то, чѣмъ эта наука одолжена нашему соотечественнику Г. Остроградскому. Послѣ появленія въ свѣтъ Аналитической Механики Лагранжа, первостепенные математикъ занимался составленіемъ уравненій движенія системы тѣлъ, связанныхъ между собою условіями, измѣняющимися въ теченіе времени. Но, должно сознаться, что трудомъ ихъ въ этомъ отношеніи была весьма неадекватно вѣрительны, и что до сихъ поръ недоставало

*) *Traité de Mécanique céleste*, 2 тома, in-4^o, 1798 г. Третій томъ напечатанъ въ 1803, четвертый — въ 1805, пятый — въ 1825 году.

**) Первое изданіе въ двухъ томахъ in-8^o напечатано въ 1796 году. Высвѣдствій имѣло нѣсколько изданій, исправленныхъ авторомъ.

*) *Mémoires de Berlin*, 1780.

**) *Mécanique analytique*, Paris, 1788. Второе изданіе съ значительными прибавленіями напечатано въ двухъ томахъ первый въ 1811, а второй въ 1815 году.

спрогаго и вмѣстѣ съ нѣмъ яснаго доказатель-
ства уравненій, о которыхъ говорить. Въ 1834
году *) Г. Остроградскій предложилъ нѣкоторыя
соображенія, которые много поясняли во-
просъ. Въ примѣчательномъ же Разсужденіи: *Mé-
moire sur les déplacements instantanés des systèmes
assujettis à des conditions variables**)*, онъ исто-
щилъ этотъ важнѣйшій предметъ Динамики,
выведа спрогнѣмъ образомъ самыя общія уравне-
нія движенія. И такъ, можно сказать, что ос-
новная задача науки о движеніи, въ полномъ ея
объѣмѣ, рѣшена въ первый разъ Г. Остроград-
скимъ.

Предѣлы лексиконной науки не позволяютъ
намъ изложить анализа, на которомъ Русскій
геометръ основалъ выводъ общихъ уравненій
движенія. Разборъ условий, доставляемыхъ сущ-
ностію системы, завлекъ бы насъ слишкомъ
далѣко, и мы отсылаемъ по сему предмету къ
Разсужденію, о которомъ сей-часъ упоминали.
Здѣсь ограничимся изложеніемъ главныхъ свойствъ
движенія, при-чемъ по возможности будемъ со-
образовываться съ воззрѣніемъ Г. Остроградскаго.
Мы не будемъ говорить о дѣйствіи силъ на одну
матеріальную точку, потому что эта теорія
объяснена подробно въ статьѣ CUVILIERNE
(MOUVEMENT), къ которой могутъ обратиться
читатели. Переходимъ прямо къ движенію
системы точекъ, связанныхъ между собою из-
вѣстными образомъ, и побуждаемыхъ какими-
либо данными силами.

§ 8. Изобразимъ чрезъ $m, m', m'' \dots$ массы
точекъ, составляющихъ данную систему, и по-
ложимъ что къ каждой массѣ соотвѣтственно
приложены силы $P, P', P'' \dots$. Вопросъ со-
стоитъ въ томъ, чтобы опредѣлить движеніе
каждой точки системы. Для этого изобразимъ
чрезъ $v, v', v'' \dots$ скоростя точекъ $m, m', m'' \dots$,
соотвѣтствующія времени t . На основаніи ска-
заннаго въ снѣжкѣ о криволинейномъ движеніи,
выраженія

$$-m \frac{d(v \cos \omega)}{dt}, -m' \frac{d(v' \cos \omega')}{dt}, -m'' \frac{d(v'' \cos \omega'')}{dt}, \dots$$

будутъ изображать проэкціи силъ инерціи, от-
носящихся къ массамъ $m, m', m'' \dots$, на направ-
ленія $A, A', A'' \dots$, соотвѣтственно соста-
вляющія углы $\omega, \omega', \omega'' \dots$ съ скоростями $v,$
 $v', v'' \dots$. Означимъ чрезъ $P \cos \alpha, P' \cos \alpha',$
 $P'' \cos \alpha'' \dots$ проэкціи силъ $P, P', P'' \dots$ на тѣ
же направленія $A, A', A'' \dots$. Проэкціи равно-
дѣйствующихъ движущихъ силъ и силъ инерціи,
также на линіи $A, A', A'' \dots$, будутъ

$$(1) \begin{cases} m(P \cos \alpha - \frac{d(v \cos \omega)}{dt}) \\ m'(P' \cos \alpha' - \frac{d(v' \cos \omega')}{dt}) \\ m''(P'' \cos \alpha'' - \frac{d(v'' \cos \omega'')}{dt}) \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Эти силы должны уничтожаться взаимно, то
есть, онѣ не должны производить никакого пе-
ремѣненія сверхъ того, которое система дѣй-
ствительно испытываетъ. И въ самомъ дѣлѣ, если
бы онѣ могли производить какое либо передвѣ-
женіе, то проэкціи силъ инерціи не выражались
бы чрезъ

$$-m(P \cos \alpha - \frac{d(v \cos \omega)}{dt}), -m'(P' \cos \alpha' - \frac{d(v' \cos \omega')}{dt}),$$

что противно предположенію. И такъ, опредѣ-
леніе движенія массъ $m, m', m'' \dots$ приводится
къ разысканію условий равновѣсія силъ (1) и еще
къ нахожденію нѣкоторыхъ другихъ условий,
произтекающихъ изъ самаго свойства данной
системы. Последніе получаютъ скорѣе изъ
соображеній чисто геометрическихъ, чѣмъ ме-
ханическихъ.

Силы (1), какъ не производяція никакого
дѣйствія, называются *потерянными силами*
(*forces perdues*). Чтобы выразить условія ихъ
равновѣсія, мы воспользуемся однимъ извѣстнымъ
началомъ Снѣжки. Оно состоитъ въ томъ,
что для равновѣсія какихъ угодно силъ, надобно
чтобы полный ихъ моментъ равнялся нулю или
былъ *отрицательнымъ* для всѣхъ перемѣненій
возможныхъ, то есть совѣстныхъ съ свой-
ствомъ системы. И такъ, если допустить,
что направленія $A, A', A'' \dots$, которые совер-
шенно произвольны, совпадаютъ съ направленіями
возможныхъ перемѣненій системы, то пол-

*) См. Разсужденіе Г. Остроградскаго подъ заглавіемъ:
Considerations générales sur les moments des forces, напе-
чатанное въ *Mémoires de l'Acad. Imp. des Sciences de St.
Petersbourg, Sciences Math. Phys. et Natur.* Т. III. 1835 г.
стр. 129.

**) *Mémoires de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Péters-
bourg, Sciences Math. Phys. et Natur.* Т. III, 1838 г. стр. 565.

ный моментъ выразился суммою

$$m \left(P \cos \alpha - \frac{d(v \cos \alpha)}{dt} \right) \delta s + m' \left(P' \cos \alpha' - \frac{d(v' \cos \alpha')}{dt} \right) \delta s' + m'' \left(P'' \cos \alpha'' - \frac{d(v'' \cos \alpha'')}{dt} \right) \delta s'' + \dots,$$

въ которыхъ $\delta s, \delta s', \delta s'' \dots$ изображаютъ какую нѣ сумму совокупности возможныхъ перемѣщеній массъ $m, m', m'' \dots$. Следовательно, условія равновѣсія непопярныхъ силъ выражаются формулою

$$(2) m \left(P \cos \alpha - \frac{d(v \cos \alpha)}{dt} \right) \delta s + m' \left(P' \cos \alpha' - \frac{d(v' \cos \alpha')}{dt} \right) \delta s' + m'' \left(P'' \cos \alpha'' - \frac{d(v'' \cos \alpha'')}{dt} \right) \delta s'' + \dots < 0,$$

относящуюся ко всѣмъ перемѣщеніямъ, соизмѣнимымъ съ сущностію системы. Эта формула не исключаетъ и случая равенства.

§ 9. Мы уже сказали, что не будемъ входить въ разборъ условій, проистекающихъ изъ свойства разсматриваемой системы. Повторяемъ, чинатели найдутъ всѣ желаемыя подробности объ этомъ предметѣ въ Разсужденіи, о которомъ упоминали выше. Въ немъ доказано, что если замѣнить какія нѣ суммы возможныхъ перемѣщеній $\delta s, \delta s', \delta s'' \dots$ перемѣщеніями дѣйствительными $v dt, v' dt, v'' dt \dots$, то первая часть формулы (2) обратится въ нуль. Но такъ какъ въ этомъ предположеніи $\omega = 0, \omega' = 0, \omega'' = 0 \dots$, а $\alpha, \alpha', \alpha'' \dots$ изображаютъ углы, составляемые силами $P, P', P'' \dots$ съ направленіями скоростей $v, v', v'' \dots$, то и получимъ

$$(3) m v dv + m' v' dv' + m'' v'' dv'' + \dots = m P v \cos \alpha dt + m' P' v' \cos \alpha' dt + m'' P'' v'' \cos \alpha'' dt + \dots$$

Первая часть уравн. (3) равна дифференціалу выраженія $\frac{1}{2}(m v^2 + m' v'^2 + m'' v''^2 + \dots)$, известнаго подъ названіемъ *живой силы системы* (*force vive du systѣme*). Въ извѣстномъ предѣлѣ о живыхъ силахъ, возникшемъ между геометрами прошедшаго столѣтія, условіемъ называвшъ *живою силою точки* произведение ея массы на квадратъ ея скорости, а сумму подобныхъ произведеній, относившихся ко всѣмъ матеріальнымъ точкамъ системы — *живою силою системы*. Позже замѣнили, что половинная сумма сихъ произведеній воспріимаетъ несравненно чаще тѣмъ полную; поэтому полезно было дать какое нибудь названіе выраженію $\frac{1}{2}(m v^2 + m' v'^2 + m'' v''^2 + \dots)$, и, чтобы не вводить новаго термина, согласились эту половинную сумму называть *живою силою сис-*

темы. И такъ, живая сила въ прежнемъ значеніи, равна удвоенной живой силѣ принимаемой въ этомъ смыслѣ, въ какомъ нибудь употребляютъ ~~слово называющіе~~.

Когда вторая часть уравн. (3) будетъ полнымъ дифференціаломъ, то, посредствомъ интегрированія, прямо получится живая сила системы. Въ такомъ случаѣ интегралъ второй части будетъ зависѣть только отъ координатъ, определяющихъ положеніе системы. Изобразивъ чрезъ $x, y, z; x', y', z' \dots$ координаты точекъ m, m', \dots , получимъ

$\frac{1}{2}(m v^2 + m' v'^2 + \dots) = C + q(x, y, z, x', y', z', \dots)$, разумѣя подъ C постоянную произвольную величину. Если означимъ чрезъ $\beta, \beta' \dots$ скорости, а чрезъ $a, b, c; a', b', c' \dots$ координаты массъ m, m', \dots , соотносящуюся опредѣленному мгновенію, то предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$(4) \frac{1}{2}(m \beta^2 + m' \beta'^2 + \dots) - \frac{1}{2}(m \beta^2 + m' \beta'^2 + \dots) = q(a, b, c, a', b', c', \dots).$$

Формула (4) показываетъ, что разность между живыми силами системы, соотносящуюся двумъ опредѣленнымъ мгновеніямъ, зависѣть единственно отъ положенія системы въ эти два мгновенія, а нисколько не зависѣть отъ промежуточныхъ ея положеній. Этого закона движенія имѣетъ многоразличныя и весьма полезныя приложенія. Руководствуясь имъ однимъ, можно рѣшить почти всѣ задачи изъ теоріи машинъ.

Когда силы, дѣйствующія на систему, происходятъ отъ взаимнаго притяженія или отталкиванія массъ $m, m', m'' \dots$, и когда, сверхъ этого, эти силы выражаются функциями взаимныхъ разстояній между точками $m, m', m'' \dots$ то вторая часть уравн. (3) будетъ полнымъ дифференціаломъ нѣкоторой функции сихъ разстояній. И такъ, если означимъ чрезъ $r, r', r'' \dots$ взаимныя разстоянія точекъ $m, m', m'' \dots$ а чрезъ $dq(r, r', r'' \dots)$ полный дифференціалъ, составляющій вторую часть уравн. (3), то получимъ чрезъ интегрированіе $\frac{1}{2}(m v^2 + m' v'^2 + m'' v''^2 + \dots) = U + q(r, r', r'' \dots)$. Изобразимъ, какъ и выше, чрезъ $\beta, \beta', \beta'' \dots$ скорости массъ $m, m', m'' \dots$, соотносящуюся какому нибудь опредѣленному мгновенію θ , отлеченному отъ t , и означимъ чрезъ $\rho, \rho', \rho'' \dots$ значенія разстояній $r, r', r'' \dots$, относящіяся

къ тому же мгновенію θ . Найдемъ

$$\frac{1}{2}(mv^2 + m'v'^2 + m''v''^2 + \dots) - \frac{1}{2}(m\gamma^2 + m'\gamma'^2 + m''\gamma''^2 + \dots) \\ = q(r, r', r'' \dots) - q(\theta, \theta', \theta'' \dots).$$

Если случится, что въ два опредѣленныхъ мгновенія t и θ , взаимныя разстоянія тѣлъ системы будутъ одни и тѣ же, то предыдущее уравненіе доставитъ

$$\frac{1}{2}(mv^2 + m'v'^2 + m''v''^2 + \dots) = \frac{1}{2}(m\gamma^2 + m'\gamma'^2 + m''\gamma''^2 + \dots).$$

И такъ, въ этомъ случаѣ, живая сила системы будетъ одна и та же въ два различныхъ мгновенія. Эта теорема имѣетъ непосредственное приложение къ соударенію упругихъ тѣлъ. См.от. СНОС.

§ 10. Случается часто, что предполагая перемѣненія $\delta s, \delta s', \delta s'' \dots$ равными и параллельными между собою, первая часть формулы (2) обращается въ нуль. Въ этомъ случаѣ, раздѣливъ на δs , получимъ

$$m \frac{d(v \cos \omega)}{dt} + m' \frac{d(v' \cos \omega')}{dt} + \dots = mP \cos \alpha + m'P' \cos \alpha' + \dots$$

Если допустимъ теперь, что направленіе A остается неизмѣннымъ, то первая часть этого уравненія дѣлается полнымъ дифференціаломъ суммы $mv \cos \omega + m'v' \cos \omega' + \dots$. Но, по свойству центра тяжести, выраженіе $mv \cos \omega + m'v' \cos \omega' + \dots$ равняется суммѣ массъ m, m', \dots , помноженной на скорость центра тяжести системы, проецированную на линію A . И такъ, изобразивъ чрезъ V скорость центра тяжести, а чрезъ Ω уголъ, составляемый осю скорости съ направленіемъ A , получимъ

$$MV \cos \Omega = mv \cos \omega + m'v' \cos \omega' + \dots,$$

гдѣ для краткости положили $m + m' + \dots = M$. Дифференцированіе этого уравненія доставитъ

$$M \frac{d(V \cos \Omega)}{dt} = m \frac{d(v \cos \omega)}{dt} + m' \frac{d(v' \cos \omega')}{dt} + \dots \\ = mP \cos \alpha + m'P' \cos \alpha' + \dots$$

Но извѣстно, что сумма $mP \cos \alpha + m'P' \cos \alpha' + \dots$ изображаетъ проэкцію на направленіе A равнодѣйствующей силъ $mP, m'P', \dots$, перенесенныхъ параллельно самимъ себѣ въ какую нѣсть точку, напримѣръ, въ центръ тяжести системы. И такъ, если означимъ чрезъ R равнодѣйствующую о которой говоримъ, а чрезъ λ уголъ, составляемый ея направленіемъ съ A , то получимъ

$$(5) \quad M \frac{d(V \cos \Omega)}{dt} = R \cos \lambda.$$

Слѣженіе этого уравненія съ формулою (4), выведенною въ статьѣ CURVILIGNE (MOMVEMENT) для одной вещественной точки, покажетъ, что центръ тяжести системы движется точно такъ, какъ если бы всѣ массы были сосредоточены въ этомъ центрѣ, а силы, дѣйствующія на систему, перенесены параллельно самимъ себѣ въ эту же точку. Очевидно впрочемъ, что всѣ эти силы могутъ быть замѣнены ихъ равнодѣйствующею R . Въ этомъ предложеніи состоятъ законы движенія центра тяжести. Изъ него можно вывести другіе, менѣе общіе законы; мы считаемъ извѣстными свойствами ихъ. Замѣтимъ только, что когда суммъ $mP, m'P', \dots$ будутъ такого свойства, что по перенесеніи ихъ въ одну точку параллельно собственнымъ ихъ направленіямъ, онѣ уничтожатся взаимно, то равнодѣйствующая ихъ $R=0$, почему и $d(V \cos \Omega)=0$, откуда, чрезъ интегрированіе, $V \cos \Omega = \text{const}$. Это уравненіе показываетъ, что въ рассматриваемомъ случаѣ проэкція скорости центра тяжести на какое нѣсть направленіе будетъ величина постоянная; следовательно, центръ тяжести системы движется равномерно по прямой линіи. Такъ, напримѣръ, центръ тяжести солнечной системы (не принимая въ соображеніе дѣйствія неподвижныхъ звѣздъ и другихъ тѣлъ, чуждыхъ нашей системѣ) можетъ только имѣть прямолинейное равномерное движеніе, потому что планеты, спутники ихъ, кометы и солнца подвержены дѣйствію взаимно притягиваемыхъ силъ, которыя по дѣйствію равны и прямопропорциональны. Подобнымъ образомъ, при соудареніи какихъ нѣсть тѣлъ, движеніе центра тяжести нисколько не измѣняется отъ удара, потому что въ такомъ случаѣ обнаруживаются только силы, которыя, будучи рассматриваемы по дѣйствію, равны и прямопропорциональны.

§ 11. Нередко случается, что формула (2) обращается въ нуль, когда замѣняемъ перемѣненія $\delta s, \delta s', \delta s'' \dots$ безконечно малыми движеніями, относящимися къ вращенію системы около какой нѣсть неподвижной оси, и когда, при вращеніи системы, взаимныя разстоянія точекъ $m, m', m'' \dots$ а равно и разстоянія ихъ отъ оси вращенія, не измѣняются. Изобразивъ чрезъ $\delta \epsilon$ элементарный уголъ вращенія, а чрезъ $r, r',$

r'' расстояния точек m , m' , m'' от
оси вращения, получим равенства

$$\delta s = r \delta \varepsilon, \delta s' = r' \delta \varepsilon, \delta s'' = r'' \delta \varepsilon \dots,$$

вследствие которых формула (2) примет
видъ

$$(6) \quad m r \left(P \cos \alpha - \frac{d(v \cos \omega)}{dt} \right) + m' r' \left(P' \cos \alpha' - \frac{d(v' \cos \omega')}{dt} \right) + \dots = 0.$$

Въ этомъ уравненіи α и ω изображаютъ углы,
составляемые силою P и скоростью v съ на-
правленіемъ передвиженія $r \delta \varepsilon$; то же значеніе
имѣютъ количества α' и ω' въ разсужденіи си-
лы P' и скорости v' , разсматриваемыхъ отно-
сительно направленія передвиженія $r' \delta \varepsilon$, и проч.

Примемъ теперь въ соображеніе дифференці-
алъ $d(v \cos \omega)$; сказанное объ немъ можно будетъ
распространить и на выраженія $d(v' \cos \omega')$,
 $d(v'' \cos \omega'')$ Проведемъ чрезъ радіусъ вектора
 r и чрезъ направленіе перемещенія $r \delta \varepsilon$ плос-
кость, которую примемъ за одну изъ коорди-
натныхъ, наприимѣръ за плоскость (x, y) -овъ.
Въ такомъ случаѣ можно предположить, что
ось x -овъ совпадетъ съ осью вращенія. Коси-
нусы угловъ, составляемыхъ направленіемъ $r \delta \varepsilon$
съ иррадиальными осями x -овъ, y -овъ,
 z -овъ, будутъ соответственно $-\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, 0;

направленіе скорости v составляется съ этими
же осями углы, коихъ косинусы, какъ извѣстно,
выражаются отношеніями $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, разумѣя
подъ ds элементъ кривой, описываемой точкою
 m . Слѣдовательно

$$\cos \omega = \frac{xy - ydx}{rds},$$

откуда, по причинѣ $v = \frac{ds}{dt}$,

$$v \cos \omega = \frac{xy - ydx}{rdt}.$$

Дифференцируя это уравненіе въ предположеніи
 $\frac{x}{r}$ и $\frac{y}{r}$ постоянныхъ, получимъ

$$\frac{d(v \cos \omega)}{dt} = \frac{xd^2y - yd^2x}{rdt^2}.$$

Подобнымъ образомъ найдемся

$$\frac{d(v' \cos \omega')}{dt} = \frac{x'd^2y' - y'd^2x'}{r'dt^2}$$

$$\frac{d(v'' \cos \omega'')}{dt} = \frac{x''d^2y'' - y''d^2x''}{r''dt^2}$$

.....

Сверхъ того, если изображимъ чрезъ X, Y, Z ,
 X', Y', Z' проэкціи силъ P, P' на три
координатныя оси, то получимъ

$$P \cos \alpha = \frac{xY - yX}{r},$$

$$P' \cos \alpha' = \frac{x'Y' - y'X'}{r'}$$

.....

Подставленіе этихъ величинъ въ формулу (6),
приведетъ ее къ виду

$$m \frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} + m' \frac{x'd^2y' - y'd^2x'}{dt^2} + \dots$$

$$= m(xY - yX) + m'(x'Y' - y'X') + \dots$$

Но, извѣстно изъ Геометріи*), что $xdy - ydx$
изображаетъ удвоенную элементарную площадь,
описанную въ элементъ времени dt проэкціею
радіуса вектора на плоскость (x, y) -овъ. Озна-
чивъ чрезъ pdt эту удвоенную площадь, по-
лучимъ

$$\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dt},$$

и, подобнымъ образомъ,

$$\frac{x'd^2y' - y'd^2x'}{dt^2} = \frac{dp'}{dt}$$

.....

Слѣдовательно

$$m \frac{dp}{dt} + m' \frac{dp'}{dt} + m'' \frac{dp''}{dt} + \dots =$$

$$m(xY - yX) + m'(x'Y' - y'X') + m''(x''Y'' - y''X'') + \dots$$

Это уравненіе пошестенно съ пѣтъ, кошо-
рое имѣетъ мѣсто для неизвѣстной системы.
Подобныя уравненія найдутся въ разсужденіи
всякой плоскости, воображаемой въ простран-
ствѣ. Когда силы P, P', P'' такого свой-
ства, что предположивъ на время данную сис-
тему неизвѣстною, онѣ взаимно уничтожаются,
то впередъ частіи послѣдней формулы обратится
въ нуль. Въ этомъ случаѣ, взявъ интегралъ, по-
лучимъ

$$(7) \quad mp + m'p' + m''p'' + \dots = \text{Пост.}$$

И такъ, сумма элементарныхъ площадей, про-
ектированныхъ на какую ни есть плоскость, и
соотвѣстственно помноженныхъ на массы раз-
сматриваемой системы, равна постоянной вели-
чинѣ. Въ этомъ свойствѣ движенія состоитъ
законъ сохраненія площадей. Замѣтимъ, что
правильнѣе было бы назвать его закономъ сохра-
ненія проэкцій площадей.

*) См. стр. 167 и 316 перваго тома сего Лекціона.

§ 12. Когда условия системы даны посредством уравнений, и когда, сверх того, рассматриваются только возможные перемещения δs , $\delta s'$, ..., то, на основании формулы (2), найдемся

$$\sum m \left[P \cos \alpha - \frac{d(v \cos \omega)}{dt} \right] \delta s = 0,$$

разумя под E суммой знак. Изменив δs в δs , получим, как в параграфе 9,

$$Emv \delta v = \sum m P v \cos \alpha dt.$$

В этой формуле мы удержали букву α ; но не должно терять из виду, что она в настоящем случае изображает угол, составленный направлением элемента ds с направлением силы P .

Означим произведение $v \cos \alpha dt$ чрез dp ; dp изображает проекцию перемещения $ds = v dt$ на направление силы P . Следовательно

$$Emv \delta v = \sum m P dp,$$

и если $\sum m P dp$ будет полным дифференциалом, то интегрирование даст нам уравнение

$$\frac{1}{2} Emv^2 = C + \int \sum m P dp,$$

которое, как известно, выражает закон живых сил.

Пусть будет dp проекция перемещения δs на направление силы P . Найдемся

$$\sum m \frac{d(v \cos \omega)}{dt} \delta s = \sum m P \delta p;$$

если возьмем вариацию уравнения, выражающего закон живых сил, то получим

$$Emv \delta v = \sum m P \delta p,$$

и следовательно

$$(8) \quad \sum m \left[\frac{d(v \cos \omega)}{dt} \delta s - v \delta v \right] = 0.$$

В этой формуле, как и во всех предыдущих, выражение $d(v \cos \omega)$ не изображает полного дифференциала. Но оно может быть заменено полным дифференциалом количества $v \cos \omega$, сложившим с разностию $v \cos \omega \frac{\delta s}{ds} - \frac{ds \delta v}{\delta s}$. И так

*) Известно, что $d(v \cos \omega)$ только тогда означает полный дифференциал, когда направление δs неизменно. В противном же случае, так как дифференциал должен быть взят считая это направление постоянным, то $d(v \cos \omega)$ уже не будет полным дифференциалом. Изобразим чрез dx , dy , dz и δx , δy , δz проекции ds и δs на три координатные оси; получим

$$d(v \cos \omega) = d(v \cos \omega) + v \cos \omega \frac{ds}{ds} - \frac{ds \delta v}{\delta s};$$

выражение $d(v \cos \omega)$ во второй части этого уравнения означает полный дифференциал. Далее имеем

$$d(v \cos \omega) \delta s = d(v \cos \omega \delta s) - ds \delta v,$$

вследствие чего уравн. (8) примет вид

$$\sum m \left[\frac{d(v \cos \omega \delta s)}{dt} - 2v \delta v \right] = 0.$$

Помножив это уравнение на dt , и взяв по нему интеграл, получим

$$\left[\sum m v \cos \omega \delta s \right]_T - \left[\sum m v \cos \omega \delta s \right]_0,$$

$$= \sum m f v \delta v dt = \delta \sum m f v^2 dt.$$

Если положим, что перемещение δs , относящееся к времени $t=0$ и к конечному времени $t=T$, обращается в нуль, то найдем

$$(9) \quad \delta \int_0^T dt \sum m v^2 = 0.$$

$$\cos \omega = \frac{dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z}{ds \delta s};$$

откуда

$$v \cos \omega = \frac{dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z}{\delta s dt}.$$

При дифференцировании этой величины для $v \cos \omega$, должно принимать $\frac{\delta x}{\delta s}$, $\frac{\delta y}{\delta s}$, $\frac{\delta z}{\delta s}$ постоянными; означив характерною d' дифференцирование, произведенное в таком предположении, получим

$$d'(v \cos \omega) = \frac{d^2 x \delta x + d^2 y \delta y + d^2 z \delta z}{\delta s dt}.$$

Взяв же полный дифференциал, найдем

$$d(v \cos \omega) = d'(v \cos \omega) + \frac{dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z}{\delta s dt} - \frac{dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z}{\delta s dt} \cdot \frac{\delta s}{\delta s}.$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z}{\delta s dt} &= \frac{1}{\delta s dt} \frac{\partial (dx^2 + dy^2 + dz^2)}{\partial s} \\ &= \frac{1}{\delta s dt} \frac{\partial (ds^2)}{\partial s} = \frac{ds \delta s}{\delta s dt} = \frac{ds \delta v}{\delta s}, \\ \frac{dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z}{\delta s dt} &= v \cos \omega; \end{aligned}$$

следовательно

$$d(v \cos \omega) = d'(v \cos \omega) + \frac{ds \delta v}{\delta s} - v \cos \omega \frac{\delta s}{\delta s};$$

откуда выводим равенство

$$d'(v \cos \omega) = d(v \cos \omega) + v \cos \omega \frac{ds}{ds} - \frac{ds \delta v}{\delta s},$$

которое и имеем в виду доказать.

Следовательно, интеграл $\int_0^T dt \Sigma mv^2$ изображает вообще *наименьшую* величину; Смолт VARIATIONS (CALCUL DES) То же самое можно сказать и обь интегралъ $\int_0^T dt \Sigma mv^2$ по причине $vdt = ds$. Въ этомъ свойствѣ и состоятъ шакъ называемое *начало наименьшаго дѣйствія*, Лагранжъ предлагалъ назвать законъ, о которомъ говоримъ, *началомъ наибольшей или наименьшей живой силы* (*principe de la plus grande ou de la plus petite force vive*). Но сей великій геометръ не замѣтилъ, что *maximum* никогда не имѣетъ мѣста. И шакъ, по причине $\int_0^T dt \Sigma mv^2 = \text{minimum}$, интегралъ $\int_0^T dt \frac{\Sigma mv^2}{2}$ будетъ шакже *наименьшій*, то есть, сумма элементарныхъ живыхъ силъ будетъ всегда наименьшая.

§ 13. Последніе четыре параграфа содержатъ въ себѣ изложеніе четырехъ законовъ движенія, извѣстныхъ подъ наименованіями *динамическихъ началъ*: 1°. *Начало сохраненія живыхъ силъ* (*principe de la conservation des forces vives*). 2°. *Начало сохраненія движенія центра тяжести* (*principe de la conservation du mouvement du centre de gravité*). 3°. *Начало сохраненія площадей* (*principe de la conservation des aires*) и 4°. *Начало наименьшаго дѣйствія* (*principe de la moindre action*). Наименованіе *законовъ* было бы собственнѣе для этихъ четырехъ динамическихъ предложеній.

Первый изъ сихъ законовъ нашелъ *Гугенсои*; онъ предложилъ его въ видѣ мѣнѣ общаго и нѣсколько опличномъ отъ того, въ которомъ впоследствии стали употреблять это предложеніе. *Иванъ Бернулли*, воспользовавшійся теоремою Гугенса для рѣшенія нѣкоторыхъ динамическихъ вопросовъ, назвалъ ее *началомъ сохранения живыхъ силъ*. Позже, *Даниилъ Бернулли* придавъ болѣе общности этому началу, и употребилъ его для опредѣленія движенія жидкостей, заключенныхъ въ сосудахъ. Наконецъ, въ *Запискахъ Берлинской Академіи* за 1748 годъ, онъ же распространилъ законъ, о которомъ говоримъ, показавъ приложеніе его къ опредѣленію обстоятельствъ движенія шѣлъ, подверженныхъ взаимному приложенію, или прилитію ихъ къ неподвижнымъ центрамъ силами, выра-

жающимися какими нѣ есть функциями разстояній шѣлъ отъ сихъ центровъ.

Законъ сохраненія движенія центра тяжести открытъ *Нютономъ*, и изложенъ въ началѣ его творенія *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Впоследствии Д'Аламберъ далъ этому предложенію видъ болѣе общій.

Третій законъ открытъ, какъ полагаютъ, въ одно время *Данииломъ Бернулли*, *Эйлеромъ* и *Д'Арси*. Даниилъ Бернулли изложилъ его въ первой части *Записокъ Берлинской Академіи* за 1746 годъ, а Эйлеръ, въ томъ же году, въ первомъ томѣ своихъ *Opusculs*. Д'Арси представилъ свое открытіе Парижской Академіи Наукъ въ 1747 году; но оно было напечатано только 1752 года. Впрочемъ, должно замѣтить, что *законъ сохраненія площадей*, для силъ центральныхъ, былъ уже найденъ *Нютономъ*.

Наконецъ четвертый законъ, извѣстный подъ наименованіемъ *начала наименьшаго дѣйствія*, найденъ Французскимъ геометромъ *Мопертюи*, который вывелъ изъ него законы отраженія и преломленія свѣта, также теорію соударенія шѣлъ. Первое Разсужденіе его обь этомъ предметѣ представлено въ Парижскую Академію Наукъ 1744 года, а вскоре, въ Берлинскую, въ 1746 году. Но Мопертюи предложилъ начало наименьшаго дѣйствія какъ результатъ метафизическаго умозрѣнія, и это самое могло вселить нѣкоторыя сомнѣнія на счетъ справедливости и степени общности его вывода. Эйлеръ, въ своемъ трактатѣ *объ истериметрахъ*, напечатанномъ въ Лозаннѣ 1744 года, первый предложилъ строгое доказательство этого закона при движеніи матеріальной точки. Впоследствии Лагранжъ, основываясь на законѣ сохраненія живыхъ силъ, распространилъ начало наименьшаго дѣйствія на случай какой нѣ есть системы силъ.

§ 14. На основаніи сказаннаго въ предыдущихъ параграфахъ можно составить предположенія уравненія движенія какой нѣ есть данной системы. Но главное затрудненіе будетъ состоять въ интегрированіи сихъ уравненій. Мы предложимъ здѣсь нѣкоторыя понятія обь общемъ способѣ, которымъ руководствуемся для достиженія этой цѣли. Что касается до подробностей упомянаемаго способа, то чѣмъ

тели найдуть ихъ въ примѣнительномъ Разсужденіи Англійскаго математика Гамильтона*). Описываемъ также по сему же предмету къ трудамъ Г. Якоби и Г. Поассона**).

Предметомъ этого послѣдняго параграфа будетъ приложение теоріи, о которой говорится, къ движенію системы совершенно свободной; а именно случай преимущественно имѣетъ мѣсто въ природѣ. И дѣйствительно, всѣ нѣла предполагаются составленными изъ отдѣльных частицъ, взаимно побуждаемыхъ притягательными и отталкивающими силами. Изобразимъ чрезъ $m, m', m'' \dots$ массы, составляющія данную систему, чрезъ $x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' \dots$ прямоугольныя ихъ координаты, а чрезъ $X, Y, Z; X', Y', Z'; X'', Y'', Z'' \dots$ движущія силы, параллельныя напрямъ координатнымъ осямъ, и побуждающія массы $m, m', m'' \dots$. Найдется

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X, & m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y, & m \frac{d^2z}{dt^2} &= Z, \\ m' \frac{d^2x'}{dt^2} &= X', & m' \frac{d^2y'}{dt^2} &= Y', & m' \frac{d^2z'}{dt^2} &= Z', \\ m'' \frac{d^2x''}{dt^2} &= X'', & m'' \frac{d^2y''}{dt^2} &= Y'', & m'' \frac{d^2z''}{dt^2} &= Z''. \end{aligned}$$

Если положимъ, что массы $m, m', m'' \dots$ подвержены дѣйствию притягательныхъ и отталкивающихъ силъ, пропорціональныхъ нѣкоторымъ функциямъ взаимныхъ разстояній сихъ массъ, то легко будетъ показать, что всѣ ве-

*) Разсужденіе Гамильтона помѣщено во второй части *Philosophical Transactions* за 1834 годъ подъ заглавіемъ: *On a general Method in Dynamics*.

**) Разсужденія Г. Якоби напечатаны въ XVII томѣ (за 1837 годъ) изданія: *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, von A. L. Crelle. Заглавіе первое изъ нихъ: *Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differential-Gleichungen* (стр. 68), а второе: *Ueber die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variablen auf die Integration eines einzigen Systemes gewöhnlicher Differentialgleichung* (стр. 97). Эти два Разсужденія переведены на Французскій языкъ, и напечатаны въ *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, publié par Joseph Liouville (томъ III, 1838 годъ, Февраль и Апрель мѣсяцы). Трудъ Г. Поассона, подъ заглавіемъ: *Remarques sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique*, помѣщенъ въ томъ же Журналѣ Г. Лиувилля (Томъ II, 1837 годъ, Сентябрь мѣсяцъ).

личины $X, Y, Z; X', Y', Z'; \dots$ выравняются по-средствомъ частныхъ производныхъ нѣкоторой функціи V , взятыхъ по измѣненіи переѣнныхъ $x, y, z; x', y', z'; \dots$. На этомъ основаніи будетъ

$$(10) \left\{ \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dV}{dx}, & m \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dV}{dy}, & m \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{dV}{dz}, \\ m' \frac{d^2x'}{dt^2} &= \frac{dV}{dx'}, & m' \frac{d^2y'}{dt^2} &= \frac{dV}{dy'}, & m' \frac{d^2z'}{dt^2} &= \frac{dV}{dz'}, \\ m'' \frac{d^2x''}{dt^2} &= \frac{dV}{dx''}, & m'' \frac{d^2y''}{dt^2} &= \frac{dV}{dy''}, & m'' \frac{d^2z''}{dt^2} &= \frac{dV}{dz''}, \end{aligned} \right.$$

Дѣйствительно, изобразимъ знаменоваемыми $(m, m'), (m, m''), (m', m''), \dots$ взаимныя разстоянія массъ m и m', m и m'', m' и m'', \dots и означивъ чрезъ $mm'f(m, m'), mm''f(m, m''), \dots$ движущія силы, происходящія отъ взаимнаго дѣйствія массы m на m' , той же массы m на m'', m на $m'' \dots$, получимъ

$$X = mm'f(m, m') \frac{x' - x}{(m, m')} + mm''f(m, m'') \frac{x'' - x}{(m, m'')} + \dots$$

$$Y = mm'f(m, m') \frac{y' - y}{(m, m')} + mm''f(m, m'') \frac{y'' - y}{(m, m'')} + \dots$$

$$Z = mm'f(m, m') \frac{z' - z}{(m, m')} + mm''f(m, m'') \frac{z'' - z}{(m, m'')} + \dots$$

$$X' = mm'f(m, m') \frac{x - x'}{(m, m')} + m'm''f(m', m'') \frac{x' - x''}{(m', m'')} + \dots$$

$$Y' = mm'f(m, m') \frac{y - y'}{(m, m')} + m'm''f(m', m'') \frac{y' - y''}{(m', m'')} + \dots$$

$$Z' = mm'f(m, m') \frac{z - z'}{(m, m')} + m'm''f(m', m'') \frac{z' - z''}{(m', m'')} + \dots$$

Замѣнимъ, что имѣть необходимо, чтобы функція f была вездѣ одна и та же: она можетъ быть не одинакова для разныхъ массъ.

Изобразивъ интегралъ $f(m, m') d(m, m')$ чрезъ $F(m, m')$, получимъ $F(m, m') = f(m, m')$; и такъ

$$\frac{dF(m, m')}{dx} = F'(m, m') \frac{x' - x}{(m, m')} = f(m, m') \frac{x' - x}{(m, m')},$$

въ слѣдствіе чего найдемъ:

$$X = \frac{d}{dx} \{ mm' F(m, m') + mn'' F(m, m'') + mn''' F(m, m''') + \dots \}.$$

Подобнымъ образомъ получимъ:

$$Y = \frac{d}{dy} \{ mm' F(m, m') + mn'' F(m, m'') + mn''' F(m, m''') + \dots \}$$

$$Z = \frac{d}{dz} \{ mm' F(m, m') + mn'' F(m, m'') + mn''' F(m, m''') + \dots \}$$

$$X' = \frac{d}{dx} \{ mm' F(m, m') + mn'' F(m, m'') + mn''' F(m, m''') + \dots \}$$

$$Y' = \frac{d}{dy} \{ mm' F(m, m') + mn'' F(m, m'') + mn''' F(m, m''') + \dots \}$$

$$Z' = \frac{d}{dz} \{ mm' F(m, m') + mn'' F(m, m'') + mn''' F(m, m''') + \dots \}$$

Если положимъ для краткости

$$F = mm' F(m, m') + m m'' F(m, m'') + m m''' F(m, m''') + \dots \\ + m' m'' F(m', m'') + m' m''' F(m', m''') + \dots \\ + m'' m''' F(m'', m''') + \dots$$

то предыдущія уравненія обратятся въ слѣдующія:

$$X = \frac{dV}{dx}, \quad Y = \frac{dV}{dy}, \quad Z = \frac{dV}{dz}$$

$$X' = \frac{dV}{dx'}, \quad Y' = \frac{dV}{dy'}, \quad Z' = \frac{dV}{dz'}$$

непосредственно доставляющія формулы (10).

Означимъ чрезъ n число массъ системы. Число всѣхъ уравненій (10) будетъ $5n$; они имѣютъ 6 n интеграловъ, которые заключаютъ въ себѣ во первыхъ 6 n величинъ: $x, y, z; x', y', z'; \dots$ $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}; \frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}; \dots$, а во вторыхъ, время t и 6 n произвольныхъ величинъ, вводимыхъ интегрированіемъ. Изобразимъ сіи постоянныя чрезъ a, b, c, \dots , и положимъ для сокращенія $\frac{dx}{dt} = u, \frac{dy}{dt} = v, \frac{dz}{dt} = w; \frac{dx'}{dt} = u', \frac{dy'}{dt} = v', \frac{dz'}{dt} = w'; \dots$ Если станемъ разсматривать 6 n интеграловъ, о которыхъ сейчасъ упомянули, просто какъ 6 n условныхъ уравненій между величинами $x, y, z; x', y', z'; \dots u, v, w; \dots u', v', w'; \dots t, a, b, c, \dots$, коихъ число равно $12n+1$, то сіи условныя уравненія можно будетъ употребить немного въ смыслѣ интеграловъ формулы (10), но и въ другихъ значеніяхъ. Эти уравненія будутъ выражать интегралы только въ томъ случаѣ, когда предпо-

ложимъ a, b, c, \dots постоянными. Если же, какъ сказать, забудемъ происхождение упомянутыхъ 6 n уравненій, а будемъ разсматривать ихъ въ значеніяхъ известныхъ отношеній между $12n+1$ количествами $x, y, z; x', \dots u, v, w; u', \dots t, a, b, c, \dots$, то они получатъ несравненно большую степень общности, и часто будутъ относиться къ весьма разнообразнымъ задачамъ.

Принимая a, b, c, \dots за количества переменныя, мы можемъ быть приведены посредствомъ различныхъ преобразованій къ слѣдующимъ, весьма примѣчательнымъ въ отношеніи интегрированія уравненій (10). Напримѣръ, если бы какое либо преобразованіе привело насъ къ уравненію, не заключающему въ себѣ дифференціаловъ da, db, dc, \dots , то такое уравненіе могло бы служить интеграломъ формулы (10); для этого стоило бы только принимать въ немъ a, b, c, \dots за величины постоянныя.

Положимъ теперь, что найдено k интеграловъ уравненій (10); одинъ изъ нихъ, выражающій законъ живыхъ силъ [Смол. § 9], будетъ

$$\Sigma m \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) = V + h;$$

въ этой формулѣ знакъ Σ означаетъ сумму членовъ вида $m \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right)$, относящуюся ко всѣмъ массамъ m, m', m'', \dots данной системы, а h произвольную постоянную величину.

Если условимся разсматривать найденные k интеграловъ въ значеніяхъ k уравненій между количествами $u, v, w; u', \dots x, y, z; x', \dots$ и k величинами $a, b, c, \dots h$, то можно будетъ измѣнять всѣ сіи количества принимая k изъ нихъ за переменныя зависящія, а всѣ остальные за переменныя независимыя. И такъ, означивъ характеристическою δ дифференцированіе, относящееся къ этому предположенію, получимъ

$$\Sigma m (u \delta u + v \delta v + w \delta w) = \delta V + \delta h.$$

Допустимъ теперь, что $k = 5n + i$. Можно принимать за переменныя зависящія 5 n количествъ $u, v, w; u', v', w'; \dots$ и i величинъ изъ числа постоянныхъ произвольныхъ; остальные 3 n постоянныя, въ число которыхъ включимъ h , будемъ считать независимыми переменными, равно какъ и 3 n количествъ $x, y, z; x', y', z'; \dots$ Если положимъ, что δ относится

последовательно къ дифференцированию по независимости $x, y, z; x', y', z; h, a, b, c, \dots$, то получимъ

$$\begin{aligned} \sum m \left(u \frac{du}{dx} + v \frac{dv}{dx} + w \frac{dw}{dx} \right) &= \frac{dV}{dx} \\ \sum m \left(u \frac{du}{dy} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dw}{dy} \right) &= \frac{dV}{dy} \\ \sum m \left(u \frac{du}{dz} + v \frac{dv}{dz} + w \frac{dw}{dz} \right) &= \frac{dV}{dz} \\ \sum m \left(u \frac{du}{dx'} + v \frac{dv}{dx'} + w \frac{dw}{dx'} \right) &= \frac{dV}{dx'} \\ &\dots\dots\dots \\ (11) \left\{ \begin{aligned} \sum m \left(u \frac{du}{dh} + v \frac{dv}{dh} + w \frac{dw}{dh} \right) &= 1 \\ \sum m \left(u \frac{du}{da} + v \frac{dv}{da} + w \frac{dw}{da} \right) &= 0 \\ \sum m \left(u \frac{du}{db} + v \frac{dv}{db} + w \frac{dw}{db} \right) &= 0 \\ \sum m \left(u \frac{du}{dc} + v \frac{dv}{dc} + w \frac{dw}{dc} \right) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Формулы (11) суть не иное что, какъ условныя уравненія между количествами $x, y, z; x', y', z; h, a, b, c, \dots$ и h . Эти уравненія будутъ принадлежать динамическому вопросу, о которомъ идееть рѣчь, какъ скоро перестанемъ разсматривать въ нихъ a, b, c, \dots, h переменными. Пусть же a, b, c, \dots, h будутъ величины постоянныя. Такъ какъ мы имѣемъ $3n + i$ уравненій между $x, y, z; x', y', z; h, a, b, c, \dots$ и h , то можемъ выразить количества $u, v, w; u', y', z; x'$ въ функцияхъ постоянныхъ a, b, c, \dots, h и $3n - i$ переменныхъ ξ, η, ζ, \dots , выбранныхъ надлежащимъ образомъ. Мы вводимъ величины ξ, η, ζ, \dots только для снѣшрѣя. Достаточно выразить $u, v, w; u', y', z; x'$ въ функцияхъ какъ оснѣдныхъ изъ нихъ, такъ и постоянныхъ a, b, c, \dots, h ; постоноу количества ξ, η, ζ, \dots могутъ заключаться, если пожелаемъ, въ число переменныхъ $x, y, z; x', y', z; x', y', z; \dots$.

Разсмотримъ теперь выраженіе

$$\sum m(udx + vdy + wdz);$$

подставивъ въ него на мѣсто $x, y, z; x', y', z; h, a, b, c, \dots$ и h величины сихъ переменныхъ, выраженныхъ чрезъ ξ, η, ζ, \dots , оно приметъ видъ

$$Ad\xi + Bd\eta + Cd\zeta + \dots$$

Если, въ этомъ видѣ, разсматриваемое выра-

женіе будетъ полнымъ дифференціаломъ, то можно довести до конца рѣшеніе занимающаго насъ вопроса, то есть, можно найти недостающіе намъ $3n - i$ интеграла, принадлежащіе уравненіямъ (10).

Покажемъ теперь какимъ образомъ получаются интегралы, о которыхъ говоримъ. Пусть будетъ

$$(12) \quad \sum m(udx + vdy + wdz) = dU,$$

разумѣя подъ U извѣстную функцию количества $\xi, \eta, \zeta, \dots, a, b, c, \dots$ и h . Исключаемъ изъ U $3n - i$ количества ξ, η, ζ, \dots и i зависимыхъ постоянныхъ, не теряя изъ виду, что число всѣхъ постоянныхъ равно $3n + i$, изъ которыхъ $3n$ разсматриваются независимыми, а i зависимыми. Исключеніе, о которомъ говоримъ, должно произвѣсти не вводя величины $u, v, w; u', y', z; x'$, что возможно, ибо имѣемъ $6n$ уравненій

$$u = f_1(\xi, \eta, \zeta, \dots)$$

$$v = f_2(\xi, \eta, \zeta, \dots)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x = F_1(\xi, \eta, \zeta, \dots)$$

$$y = F_2(\xi, \eta, \zeta, \dots)$$

$$\dots\dots\dots$$

Для исключенія употреблемъ только послѣдніе $3n$ уравненій, почему можно разсматривать функцию U какъ зависящую отъ нѣхъ количества, которыя въ формулахъ (11) принимались за переменныя независимыя.

Такъ какъ уравненіе (12) имѣетъ мѣсто каковы бы ни были независимыя величины h, a, b, c, \dots , то оно будетъ справедливо и въ томъ случаѣ, когда измѣнимъ h въ $h + dh$, а въ $a + da$, b въ $b + db, \dots$. На этомъ основаніи получимъ

$$\sum m \left(\frac{du}{dh} dx + \frac{dv}{dh} dy + \frac{dw}{dh} dz \right) = d \frac{dU}{dh}$$

$$\sum m \left(\frac{du}{da} dx + \frac{dv}{da} dy + \frac{dw}{da} dz \right) = d \frac{dU}{da}$$

$$\sum m \left(\frac{du}{db} dx + \frac{dv}{db} dy + \frac{dw}{db} dz \right) = d \frac{dU}{db}$$

$$\dots\dots\dots$$

Послѣдніе уравненія имѣютъ мѣсто для какихъ ни есть d, d_1, d_2, \dots , а слѣдовательно они справедливы и въ томъ предположеніи, что дифференціалы $d\xi, d\eta, d\zeta, \dots$ относятся къ времени t ; въ этомъ случаѣ дифференціалы $dx, dy, dz, \dots, d, \frac{dU}{dh}, d \frac{dU}{da}, d \frac{dU}{db}, \dots$ будутъ также

относиться ко времени, почему и найдем
 $u dt = dx$, $v dt = dy$, $w dt = dz$; $u' dt = dx'$,
 И такъ, помноживъ уравненія (11) на dt , по-
 лучимъ

$$\begin{aligned} \sum m \left(\frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz \right) &= dt \\ \sum m \left(\frac{du}{da} dx + \frac{dv}{da} dy + \frac{dw}{da} dz \right) &= 0 \\ \sum m \left(\frac{du}{db} dx + \frac{dv}{db} dy + \frac{dw}{db} dz \right) &= 0 \end{aligned}$$

и следовательно

$$\frac{dU}{dt} = dt$$

$$\frac{dU}{da} = 0$$

$$\frac{dU}{db} = 0$$

Интегрируя послѣднія уравненія относительно t , получимъ

$$(13) \left\{ \begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= t + C \\ \frac{dU}{da} &= C' \\ \frac{dU}{db} &= C'' \end{aligned} \right.$$

Уравненій (13) будетъ числомъ $3n$. Такъ какъ они выражаютъ конечныя соотношенія между величинами x, y, z ; $x', \dots a, b, \dots h$ и временемъ t , то и послужатъ для окончательнаго рѣшенія вопроса, ибо, сверхъ являющихся уже $3n + i$ интеграловъ, получаемъ еще $3n$, и следовательно всего $6n + i$ интеграловъ, изъ которыхъ i будутъ заключаться въ $6n$ остальныхъ. Впрочемъ, должно замѣтить, что интегралы (13), рассматриваемые независимо другъ отъ друга, уже рѣшаютъ вопросъ, потому что число ихъ равно $3n$, и, сверхъ того, они не заключающъ въ себѣ величины u, v, w ; u', \dots . Поэтому можно будетъ вывести изъ нихъ количества x, y, z ; x', \dots въ функціи какъ времени t , такъ и $6n$ постоянныхъ произвольныхъ величинъ $h, a, b, c, \dots C, C', C'', \dots$; потомъ, посредствомъ дифференцированія относительно t , опредѣлятся u, v, w ; u', v', w' ; u'', \dots

Мы пояснимъ изложенную сей-часъ теорію приложивъ ее къ одной динамической задачѣ, состоящей въ опредѣленіи движенія матеріальной

точка, движущейся въ плоскости. Предположивъ для простоты, что масса этой точки равна единицѣ, уравненія рассматриваемаго движенія будутъ

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dV}{dx}, & \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dV}{dy} \\ \frac{du}{dt} &= \frac{dV}{dx}, & \frac{dv}{dt} &= \frac{dV}{dy} \end{aligned}$$

Замѣтимъ, что на основаніи закона живыхъ силъ, имѣемъ

$$(14) \quad \frac{u^2 + v^2}{2} = V + h,$$

и если допустимъ, что каковыя либо образцы имѣли другой интегралъ

$$(15) \quad f(x, y, u, v, a, h) = 0,$$

то посредствомъ уравненій (14) и (15) можемъ опредѣлить величины u и v въ функціи x, y, a и h ; поставимъ потомъ эти величины въ формулу

$$u dx + v dy,$$

которая, въ всякомъ случаѣ, обратится въ полный дифференціалъ. Дѣйствительно, рассматривая u и v какъ функціи переменныхъ x и y , окажется, что уравненія движенія примутъ видъ

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} u + \frac{dv}{dy} v &= \frac{dV}{dx} \\ \frac{dv}{dx} u + \frac{du}{dy} v &= \frac{dV}{dy} \end{aligned}$$

Дифференцируя теперь уравн. (14) сперва по измѣненію x , а потомъ по измѣненію y , получимъ

$$\begin{aligned} u \frac{du}{dx} + v \frac{dv}{dx} &= \frac{dV}{dx} \\ u \frac{du}{dy} + v \frac{dv}{dy} &= \frac{dV}{dy}; \end{aligned}$$

следовательно

$$\begin{aligned} u \frac{du}{dx} + v \frac{dv}{dx} &= \frac{du}{dx} u + \frac{dv}{dy} v \\ u \frac{du}{dy} + v \frac{dv}{dy} &= \frac{dv}{dx} u + \frac{dv}{dy} v, \end{aligned}$$

откуда получаемъ равенство

$$\frac{dv}{dx} = \frac{du}{dy},$$

выражающее условіе интегрируемости выраженія $u dx + v dy$, котораго интегралъ опредѣлитъ количество U въ функціи x, y, a и h . По извѣстному U , найдемъ интегралы

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= t + C \\ \frac{dU}{da} &= C', \end{aligned}$$

разукля подь C и C' постоянныя произвольныя величины. Посредствомъ сихъ двухъ интеграловъ легко будетъ привести къ концу рѣшеніе занимавшаго насъ вопроса.

Рѣшенная сей-часъ задача принадлежитъ къ числу самыхъ простыхъ; и дѣйствительно, когда найдено столько интеграловъ, сколько ихъ нужно для опредѣленія u и v , то рѣшеніе приводится къ концу, потому что выраженіе $u dx + v dy$ будетъ полнымъ дифференціаломъ. Въ общемъ же случаѣ недостаточно имѣть $3n$ интеграловъ, но если такое число уравненій, посредствомъ которыхъ можно опредѣлять всѣ величины $u, v, w; u', \dots$ съ цѣлю обратитъ выраженіе $\Sigma(u dx + v dy + w dz)$ въ полный дифференціалъ. Чаше всего случится, что это выраженіе не будетъ полнымъ дифференціаломъ «функции объ $3n$ переменныхъ независимыхъ. Но если бы нашли болѣе $3n$ интеграловъ, то получили бы некоторыя отношенія между переменными $x, y, z; x', \dots$, и очень могло бы случиться, что формула $\Sigma(u dx + v dy + w dz)$, въ силу найденныхъ отношеній, обратилась бы въ полный дифференціалъ. Въ такомъ предположеніи, рѣшеніе вопроса дѣлается весьма нетруднымъ.

При изложеніи общей теоріи мы предполагали, что выраженіе $\Sigma(u dx + v dy + w dz)$ обратится въ полный дифференціалъ въ силу $3n + i$ интеграловъ, то есть въ силу i условныхъ уравненій между переменными $x, y, z; x', \dots$. Эти соображенія будутъ полезны до нѣхъ поръ, пока i не превзойдетъ $3n - 2$. Но когда $i = 3n - 1$, то изложенная теорія не можетъ уже служить никакимъ пособіемъ при интегрированіи дифференціальнхъ уравненій Динамики.

DYNAMIQUE. ДИНАМИЧЕСКІЙ. Свойственный, принадлежащій Динамикѣ; относящійся къ движенію. Смол. выше. *Problème, question dynamique; динамическая задача; динамическій вопросъ. Unité dynamique; динамическая единица; Смол. DYNAMIE. Electricité dynamique; динамическое электричество.*

SYSTÈME или THÉORIE DYNAMIQUE. (Физ.) ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА, ТЕОРІЯ. Эта теорія была предложена нѣкоторыми Германскими философами въ противоположность теоріи *атомистической* или *частичной*. Въ динамической системѣ дѣйственности вещества не полагаютъ никакихъ предѣловъ, и следовательно отвергаютъ существованіе атомовъ. По этой теоріи вещество разсматривается сплошнымъ, непрерывнымъ, а скважность считается уже случайнымъ свойствомъ тѣла. Смол. CORPS, ATOMISTIQUE (SYSTÈME).

DYNAMODE. ДИНАМОДА. Смол. DYNAMIE.

DYNAMOMÈTRE. (Примк. Мех. и Опт.) **ДИНАМОМЕТРЪ, СИЛОМЪРЪ.** Такъ называется всякій приборъ, служащій для измѣренія напряженія силы. Динамометръ, изобретенный *Рентеромъ* (Regnier) для предпринятыхъ *Бюффономъ* опытовъ надъ силою животныхъ, дѣлается изъ крѣпкой спальной пружины. При употребленіи прибора, пружина, опъ дѣйствія непосредственно приложенной къ ней силы, принимаетъ нѣкоторый погнбъ, болыная или меньшая степень котораго, указываемая движеніемъ стрѣлки, пробѣгающей по дѣлѣніямъ лимба, служитъ для опредѣленія величины измѣряемой силы. Употребляемые нынѣ силонизмѣрительные приборы почти всѣ *пружинные*, и следовательно они устроены на одномъ началѣ съ *Рентеровымъ динамометромъ*. — Динамометромъ или Динамометромъ называютъ также инструментъ, изобрѣшенный *Рамсденомъ* (Ramsden), и служащій для измѣренія *степени увеличенія* астрономическихкихъ трубъ. Читатели найдутъ описаніе этого инструмента въ *Astronomisches Jahrbuch*, von Bode, за 1795 годъ, въ статьѣ: Beschreibung und Gebrauch eines zur Bestimmung der Vergrößerungskraft eines Fernrohrs dienenden Werkzeuges, стр. 225.

DYNAMOMÉTRIQUE. ДИНАМОМЕТРИЧЕСКІЙ, **СИЛОМЪРНЫЙ, СИЛОИЗМѢРИТЕЛЬНЫЙ** *Frein dynamométrique; динамометрический тормазъ, динамометрический нажимъ.* Смол. FREIN.

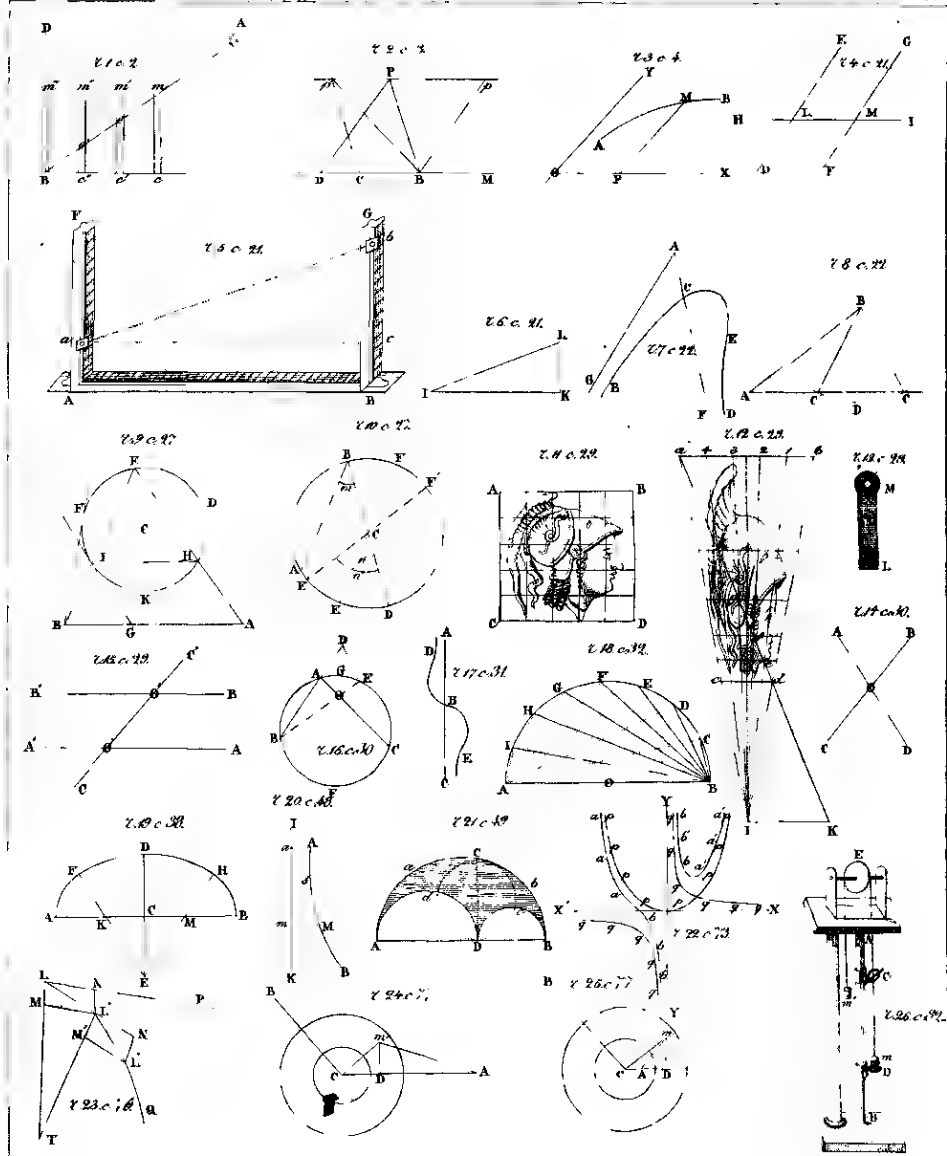
ОПЕЧАТКИ

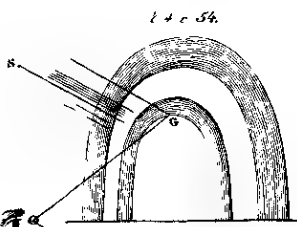
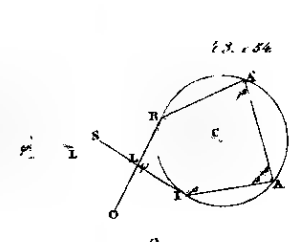
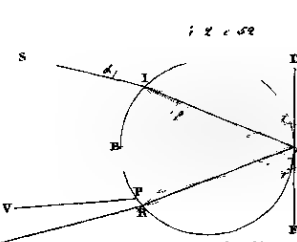
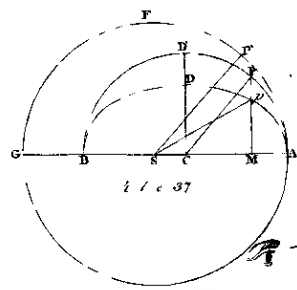
ВЪ I ТОМѢ

ЛЕКСИКОНА ЧИСТОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ.

Напечатано.	Страница	Столбецъ	Строка	Должно быть:
$abc + abd + bcd$	4	2	снизу 21	$-(abc + abd + bcd)$
НИИ	5	1	ст. 10	НИИ
ЛОМАНЫИ	7	2	сверху 15	ЛОМАНЫИ
HYDRODYNAMIQUE	12	1	ст. 24	HYDRODYNAMIQUE
AJOUTER	13	2	ст. 13	AJOUTER
DÉSCARTES	21	1	ст. 7	DÉSCARTES
AMBIGUË	22	1	ст. 16	AMBIGUË (HYPERBOLE)
\int	23	1	ст. 23	\int
ОНЪ	23	2	ст. 12	ОНО
Валис	24	1	ст. 16	Валис
интегра	25	1	ст. 22	интегра
магнетизма	26	1	ст. 22	магнетизма
КРИВОЙ	28	2	ст. 16	КРИВОЙ
пластинку	29	2	ст. 20	пластинку
разумное	30	2	ст. 10	разумное
ассимпту	31	2	ст. 16	ассимпту
известенъ	38	1	ст. 16	известно
эллипсои	39	1	ст. 7	эллипсои
ПРОТЯНУ-РАЗВЕРЗАЮЩАЯСЯ	39	1	ст. 23 и 22	ПРОТЯНУ-РАЗВЕРЗАЮЩАЯСЯ
APPLANISSEMENT	41	1	ст. 18	APPLANISSEMENT
arplane	41	1	ст. 14	arplane
силъ	41	2	ст. 12	силъ
длинн	60	■	ст. 9	длинн
въ	61	2	ст. 14	въ
слѣдовательно	61	2	ст. 15	слѣдовательно
гдѣ x, y	61	2	ст. 25	гдѣ x, y, z
но при $y = 0$	62	■	ст. 5	но при $x = 0$
одного	60	1	ст. 2	одного
изданны	70	■	ст. 4	изданны
измѣненіямъ,	74	■	ст. 6	измѣненіямъ, и
соображеніе	76	2	ст. 18	соображеніе
$b < a[1 - (1 - \frac{x}{a})^q]$	85	2	ст. 20	$b < a[1 - (1 - \frac{x}{a})^q]$
погрѣшностей?	87	2	ст. 19	погрѣшностей?
примамль	89	1	ст. 15	примамль
АС	93	2	ст. 1	АС
Галлилео	96	2	ст. 23	Галлилео
Галлилея	96	■	ст. 22	Галлилея
(шроп	135	1	ст. 2	(шроп
денъ, съ	136	2	ст. 21	денъ, съ
Вѣсто страницы 154 выспавлена страница 451.				
итенъ	156	1	ст. 7	итенъ
сообразнъ	158	2	ст. 1	сообразнъ
прѣше	159	2	ст. 23	прѣше
INDIVISIBLE	166	1	ст. 23	INDIVISIBLES (MÉTHODE DES)
осни	182	1	ст. 6	осни
стелуютъ по улособытію	182	1	ст. 18	стелуютъ этому событію
$v = gt$	188	2	ст. 18	$v = gt$
(vitesse due à la hauteur)	188	2	ст. 21	(vitesse due à la hauteur e)
выше	195	2	ст. 2	выше
roduits	203	1	ст. 1	produits

Ниспечатава :	Страница	Столбец :	Строка	Должно быть :
шкалъ	203	2	ст. 1	шакъ
$(a_5 x^2)^3$	207	1	ст. 4	$(a_5 x^2)^3$
5 вер. 5 дн.	218	2	ст. 13	5 вер.; 5 дн.
жмѣла	222	2	ст. 15	жмѣло
пешеходомъ.	223	1	ст. 19	пѣшеходомъ.
почки	223	1	ст. 7	почкѣ
четвертая	230	1	ст. 20	пятая
разсматриваемыя	240	2	ст. 19	разсматриваемыя
5.5.5.5.7.7.9.9....	246	2	ст. 5	$2 \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots$
2.4.4.6.6.8.8. ...				
$P_n =$	248	1	ст. 1	$P_n =$
$ak = y - b_1$	250	2	ст. 1	$ak = y_1 - b_1$
найденное	256	1	ст. 16	найденное
$a + \frac{\beta}{\gamma}$	258		ст. 6	$a + \frac{\beta}{b + \gamma}$
s_{n-1}	265	2	ст. 5	s_{m-1}
$x < 1$	266	2	ст. 2	$x > 1$
$\frac{d^2 y}{d^2 x}$	273	1	ст. 7	$\frac{d^2 y}{dx^2}$
$2 \frac{1}{a}$	274	2	ст. 1	$2 \frac{1}{a}$
воздѣлователей	278	2	ст. 3	воздѣльвателей
объясненіе къ по	292	1	ст. 7	объясненіе къ
рѣшались	295	2	ст. 5	рѣшались
Асѣмтотѣ	297	1	ст. 7	Асѣмтотѣ
Альфонсъ	309	2	ст. 12	Альфонсъ
радіусъ	316	2	ст. 21	радіуса
площади.	316	2	ст. 9	площади.
въ видѣ:	320	1	ст. 1	въ видѣ:
$MQ = a \sin \varphi$	324	1	ст. 2	$Mq = a \sin \varphi$
поспугаеми	333	1	ст. 22	поспугаемы
AB и AD	333	1	ст. 14	AB и BD
DCB	333	1	ст. 13	ACB
$AD : DC = DB : CB$	333	1	ст. 11	$AD : AB = DB : CB$
этомъ	333	2	ст. 10	этомъ
описываемъ	333	2	ст. 8	описываемъ
Видѣно страницы 357 выставлена страница 356.				
составляемъ	357	1	ст. 21	составляемъ
два	365	2	ст. 9	два
гидростатической	368	1	ст. 3	гидравлической
Фермата	375	2	ст. 13	Фермата
$u_2 = u_1 = du_1$	378	1	ст. 11	$u_2 = u_1 = du_1$
$e^u - 1 = -f(x)$	386	1	ст. 2	$e^{du} - 1 = -f(x)$
$y^m = 2^{m-1}, x^m = 2^{m-1} - 1$	388	1	ст. 7	$y_m = 2^{m-1}, x_m = 2^{m-1} - 1$
онъ	392	1	ст. 22	оно
ходивъ	393	1	ст. 1	находямъ
$= \text{пред.} \left\{ \frac{\text{Log} \left(1 + \frac{i}{x} \right)}{i} \right\}$	400	1	ст. 2	$= \text{пред.} \left\{ \frac{\text{Log} \left(1 + \frac{i}{x} \right)}{i} \right\}$
$\frac{d^4 u}{dx^2 dy^2} =$	408	1	ст. 4	$\frac{d^4 u}{dx^2 dy^2} =$
$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy$	410	1	ст. 6	$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy$
$\frac{1^4}{a+b}$	433	1	ст. 4	$\frac{2^4}{a+b}$
обобщенъ	446	2	ст. 16	абсценсъ
родившиися	448	2	ст. 11	родившиися.

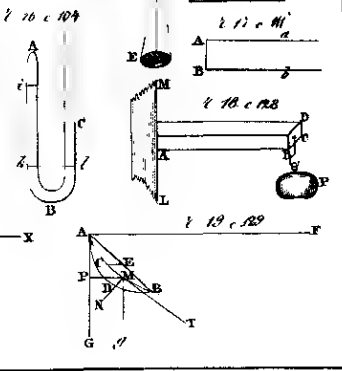
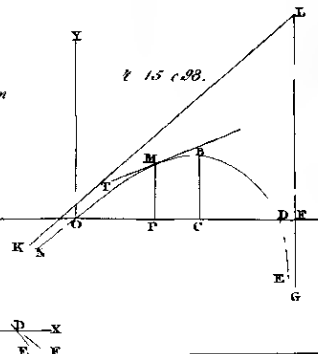
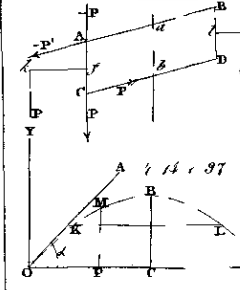
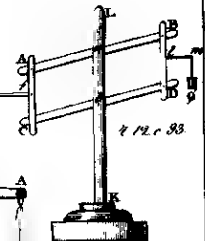
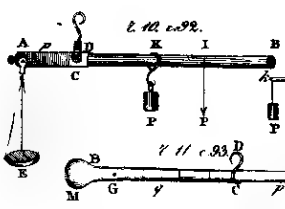
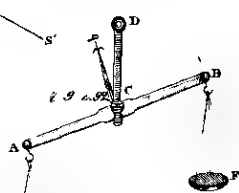


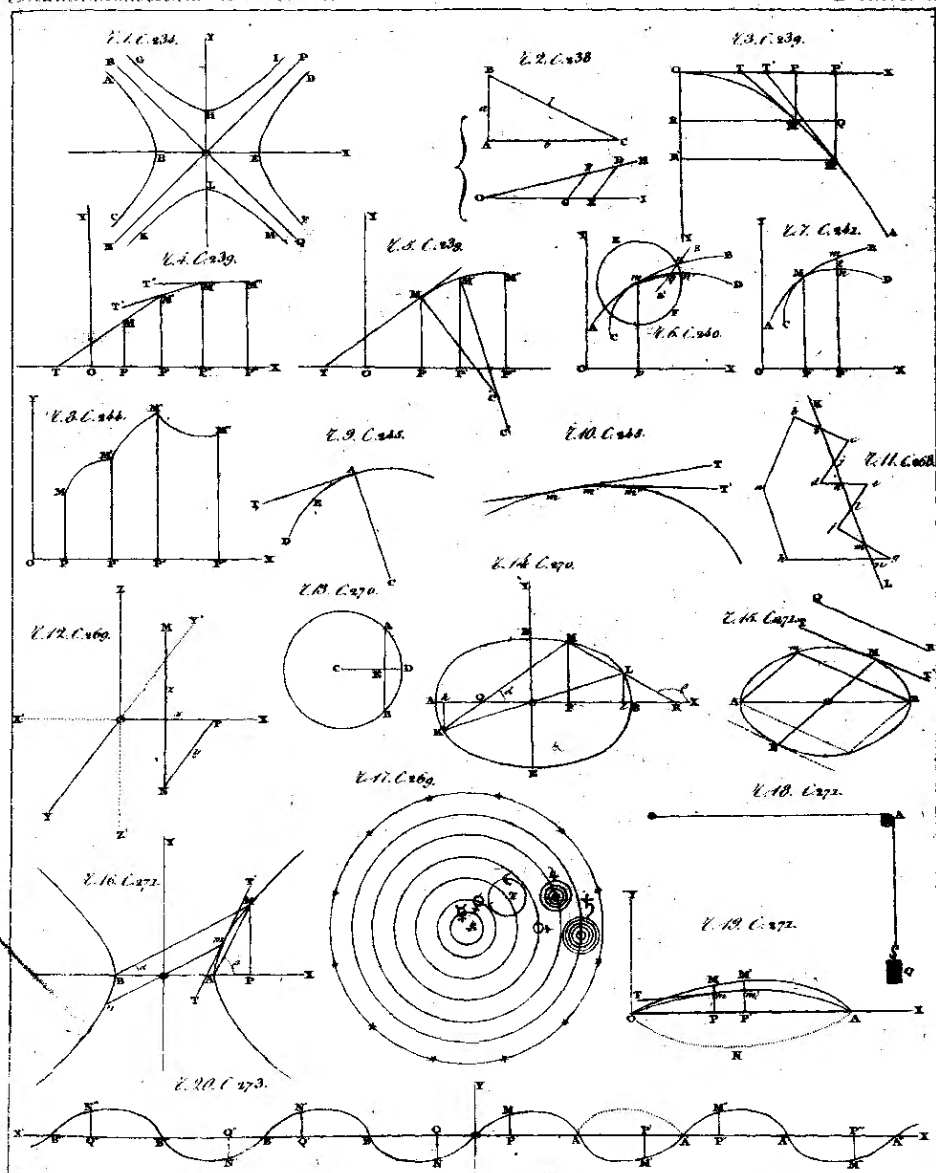


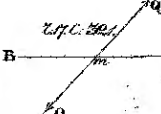
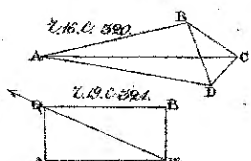
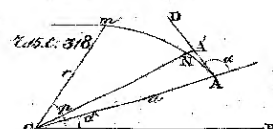
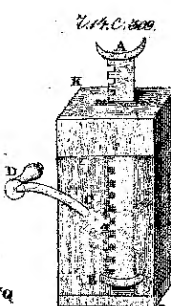
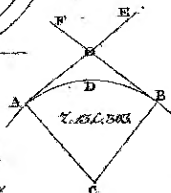
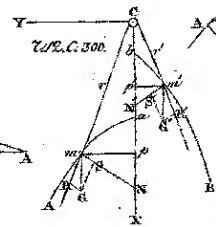
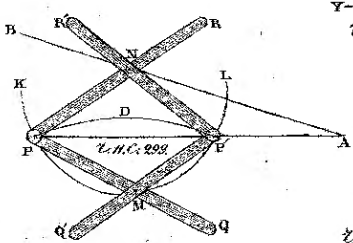
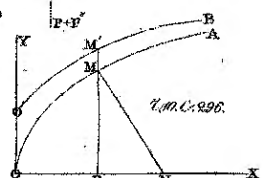
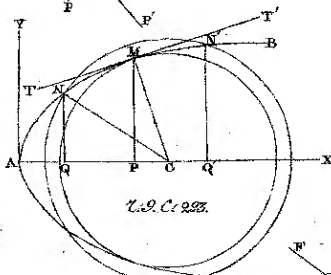
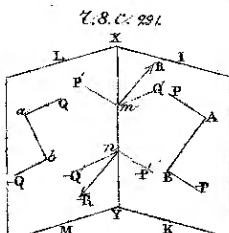
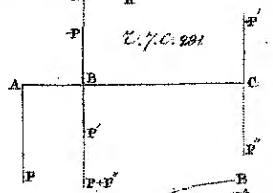
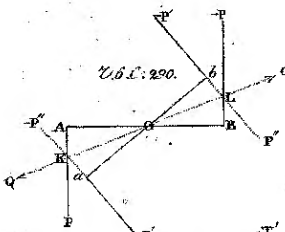
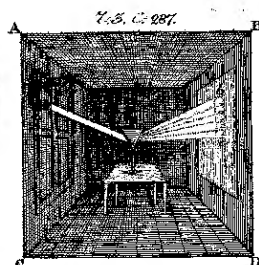
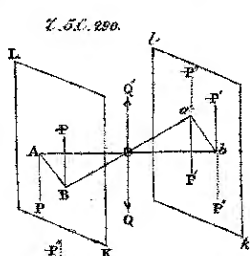
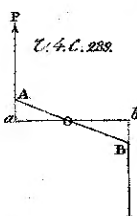
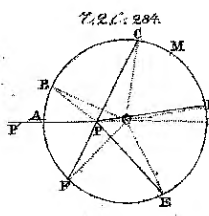
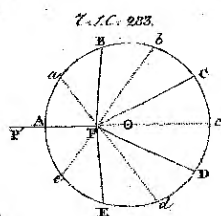
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

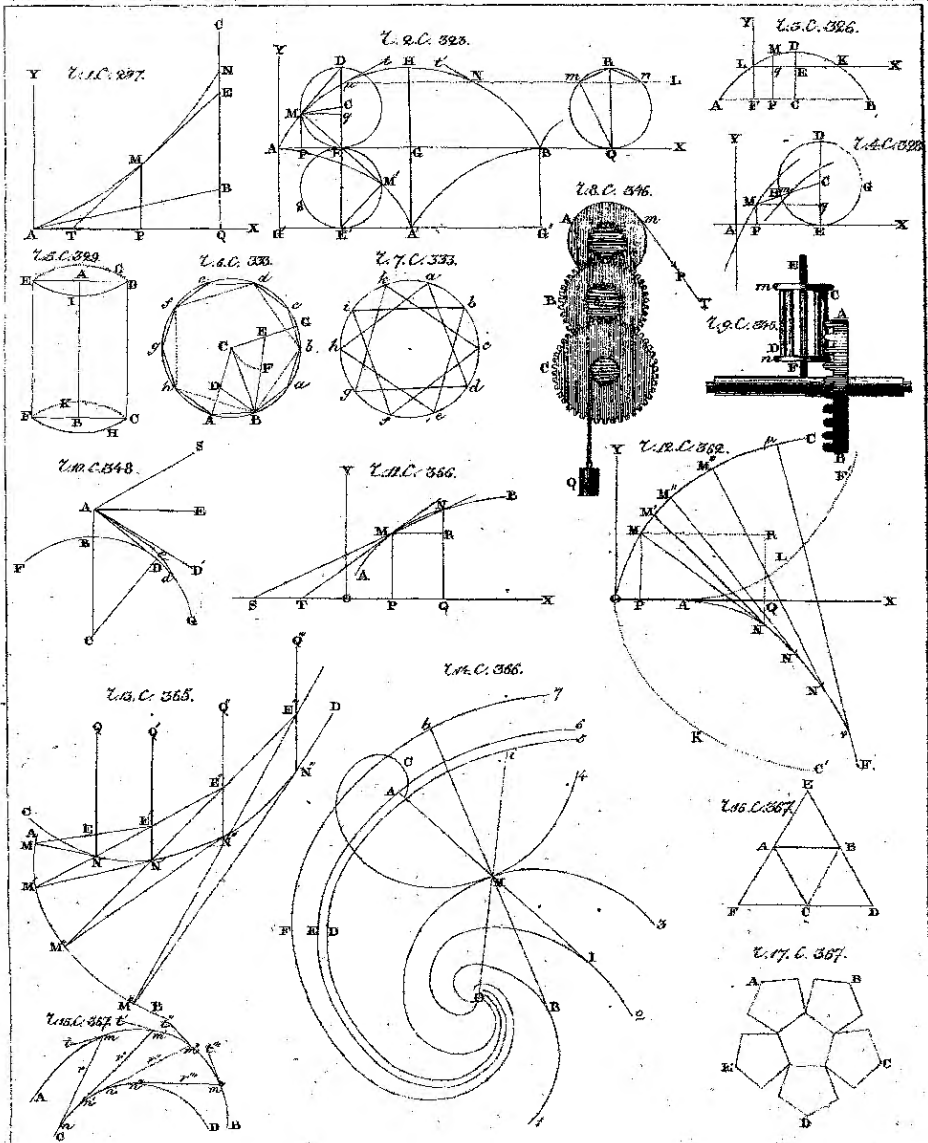
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

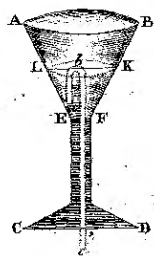




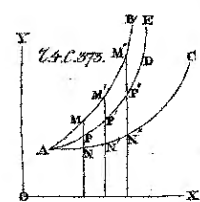
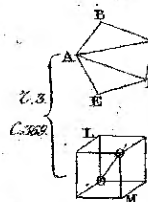
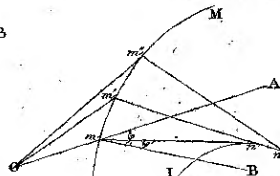




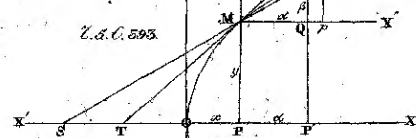
У. 1. С. 368.



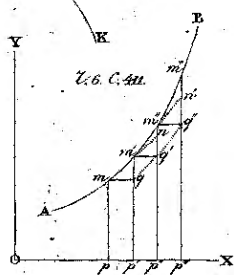
У. 2. С. 368.



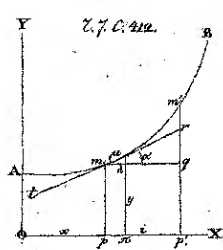
У. 3. С. 393.



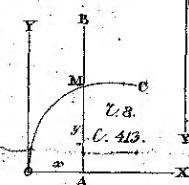
У. 6. С. 411.



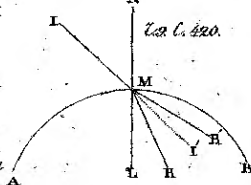
У. 7. С. 412.



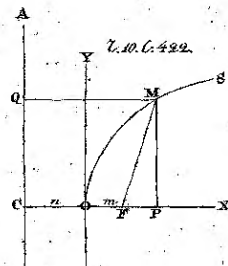
У. 8. С. 413.



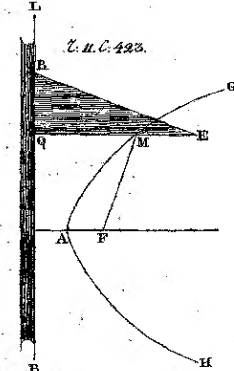
У. 9. С. 420.



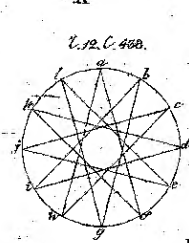
У. 10. С. 422.



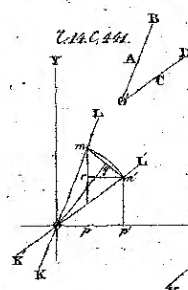
У. 11. С. 423.



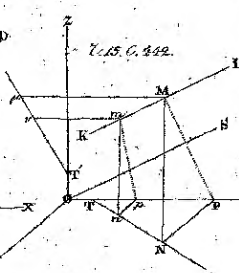
У. 12. С. 450.



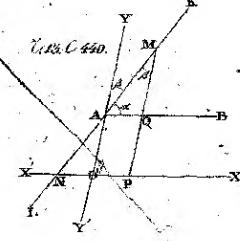
У. 13. С. 441.



У. 15. С. 442.



У. 13. С. 440.



У. 16. С. 446.

